STAATL.BIBLIOTHEK
REGENSBURG

4° Philos. 5028 (1

Bibliothek
des
Alten Gymnasiums
in
Regensburg

Math. 92/1

THEORIE UND ANWENDUNG

des sogenannten

VARIATIONSCALCUL'S

von

Dr. G. W. STRAUCH.

ERSTER BAND.

ZWEITE AUSGABE.

Bibliothek des K. Alten Gymnasiums in Regensburg

Geschenk v. Dr. Steinberger

ZÜRICH,
VERLAG VON MEYER & ZELLER.
1854.

STAATL. BIBLIOTHEK REGENSBURG

1963/1320

STAATL. BIBLIOTHEK
REGENSBURG

Vorrede.

Der höchste Zweig der Analysis, welcher der Gegenstand des vorliegenden Buches ist, hat seine Entstehung und die ersten Anfänge seiner Ausbildung einigen geometrischen und mechanischen Problemen zu verdanken. Auch er liefert ein in der That höchst merkwürdiges Beispiel, wie die Entwickelung der menschlichen Erkenntnisse so oft ihren Weg vom Schweren zum Leichten und vom Verwickelten zum Einfachen nimmt, anstatt dass es umgekehrt sein sollte. Manche Abhandlung musste geschrieben werden, ehe sich der sehr einfache Begriff des Gegenstandes aus seinen Umgebungen hervorarbeitete, und das Wesentliche desselben klar wurde.

Das erste hierher gehörige Problem wurde von *Newton* gelöst, als er die Rotationsfläche bestimmte, welche, während sie sich in der Richtung der Axe bewegt, den geringsten Widerstand erleidet. Das gefundene Resultat hat er 1687 zwar bekannt gemacht, aber nicht das dabei angewendete Verfahren.[1]

Johann Bernoulli löste das Problem der Brachistochrone[2], und forderte 1696 die Mathematiker auf, dessen Lösung gleichfalls zu versuchen.[3] Eine solche wurde geliefert von *Leibnitz*, von *Newton*, von *Jacob Bernoulli*, vom *Marquis de l'Hôpital*, etc. Auch diesmal gab *Newton* nur das Resultat, ohne das dabei angewendete Verfahren.[4] Ebenso verhält es sich mit der Lösung des *Marquis de l'Hôpital*. Besagte Arbeiten trug *Leibnitz* zusammen, und machte sie 1697 bekannt.[5] *Johann Bernoulli's* eigene Auflösung ist gleichfalls 1697 erschienen.[6] Dieses Problem[7] kann als der Anfang jener langen Reihe von Arbeiten betrachtet werden, deren Gegenstand das Maximum oder Minimum von Integralen ist.

Hierauf verband man mit der Bedingung des Maximum und Minimum noch eine andere, nemlich die, dass die gesuchte Curve eine vorgeschriebene

1) Das Nähere findet man im zweiten Bande, in der Schlussbemerkung zu Aufg. 194.

2) Die richtige Schreibart ist Brachistochrone, von βράχιστος und χρόνος. Man hat bis jetzt immer Brachystochrone geschrieben, als wenn das Wort unmittelbar von βραχὺς herkäme.

3) Acta eruditorum Lipsiensia von 1696. Seite 269.

4) Philosophical Transactions von 1697. Nr. 224, p. 384.

5) Acta erud. Lips. von 1697. Monat Mai.

6) Acta erud. Lips. von 1697. Monat Mai. Seite 206.

7) Das Problem der Brachistochrone hat nach Erfindung des Variationscalculs eine grosse Erweiterung erhalten. Die geschichtlichen Nachrichten hierüber befinden sich ausführlich in den Schlussbemerkungen, welche den Aufgaben 195 und 197—200 beigegeben sind.

Länge habe. *Jacob Bernoulli* war der erste, welcher dergleichen Probleme öffentlich vorlegte, und zu deren Lösung aufforderte. Auch war er der erste, welcher 1701 eine richtige Lösung veröffentlichte. *Johann Bernoulli* hat zwei verschiedene Auflösungen bekannt gemacht; die erste derselben ist falsch, die zweite aber richtig, und beruht auf demselben Princip, wie die seines Bruders, nur ist sie einfacher. Auch *Taylor* hat eine Lösung geliefert, die ebenfalls auf demselben Princip beruht, wie die von *Jacob Bernoulli.*[1]

Wegen der Gleichheit der Bogenlänge (perimeter) nannte man solche Aufgaben »isoperimetrische«; und die Aufsuchung einer Methode zur Auflösung derselben bildete das »isoperimetrische Problem.«

Nachdem diese beiden Benennungen in Gebrauch gekommen waren, vermehrten sich die verschiedenen Arten von Aufgaben, bei denen die Auffindung einer noch unbekannten Curve, welcher irgend eine Eigenschaft des Grössten und Kleinsten zukommt, gefordert wird; und so kam es, dass man obigen Benennungen eine ganz allgemeine und weit mehr, als ihr eigentlicher Wortsinn sagt, in sich fassende Bedeutung beilegte, d. h. dass man unter isoperimetrischen Aufgaben alle diejenigen verstund, bei denen die Auffindung einer Curve gefordert wird, welcher irgend eine Eigenschaft des Grössten oder Kleinsten zukommt, es mögen noch Nebenbedingungen damit verbunden sein oder nicht. Die Aufsuchung einer, zur Lösung aller dieser Aufgaben geeigneten, allgemeinen Methode bildete dann das »isoperimetrische Problem im weitesten Sinne.«[2]

Die bis jetzt genannten Auflösungen isoperimetrischer Aufgaben stimmen, wie gesagt, in den Principien überein; allein eine allgemeine Methode war noch nicht gefunden, und wir werden sehen, dass *Euler* um die Auffindung einer solchen unablässig bemüht war.

Seine erste Abhandlung[3] erschien 1739. Hier werden bereits die verschiedenen Aufgaben in Klassen eingetheilt. Erste Klasse: Man sucht aus allen möglichen Curven diejenige heraus, bei welcher die Eigenschaft A ein Grösstes oder Kleinstes wird. Zweite Klasse: Man sucht aus allen jenen Curven, denen die Eigenschaft B gemeinschaftlich ist, diejenige heraus, bei welcher die Eigenschaft A ein Grösstes oder Kleinstes wird. Dritte Klasse: Man sucht aus allen jenen Curven, denen die Eigenschaften B und C gemeinschaftlich sind, diejenige heraus, bei welcher die Eigenschaft A ein Grösstes oder Kleinstes wird. Und so fort.

Der Inhalt dieser Abhandlung bedurfte noch sehr der Vervollkommnung und Erweiterung; und so erschien 1741 eine zweite.[4] Aber auch hier ist noch Vieles mangelhaft und unklar.

[1]) Die betreffenden historischen Notizen, namentlich über die Lösungen von *Jacob* und *Johann Bernoulli* und von *Taylor* findet man in der Schlussbemerkung zu Aufg. 214.

[2]) Man vergleiche die letzten Zeilen der Schlussbemerkung zu Aufg. 214. (Band II. Seite 486.)

[3]) Diese befindet sich in den Comm. Petrop. t. VI. 1739, und führt den Titel: Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis.

[4]) Diese befindet sich in den Comm. Petrop. t. VIII. 1741, und führt den Titel: Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis.

Desshalb veröffentlichte er 1744 ein ausgedehntes Werk.[1] Hier theilt er alle Aufgaben in zwei Klassen ein. In die erste Klasse gehören diejenigen, wo ein absolutes Grösstes oder Kleinstes, und in die zweite Klasse diejenigen, wo ein relatives Grösstes oder Kleinstes gesucht wird. Zu den bereits vorhandenen Aufgaben hat er noch eine Menge neuer hinzugefügt, und damit sein Buch auf das Glänzendste ausgestattet. Die darin aufgestellten Regeln sind soweit vervollkommnet, dass sie allgemein gelten, und jedesmal zu dem richtigen Resultate führen. Namentlich ganz vortrefflich ist diejenige, durch die es möglich geworden ist, die Aufsuchung eines relativen Grössten oder Kleinsten auf die eines absoluten zurückzuführen.[2] Doch alle diese Regeln sind nur auf geometrische Betrachtungen gegründet, und man kann den Scharfsinn und die Geschicklichkeit, womit der Verfasser jede Schwierigkeit überwindet, nicht genug bewundern. Dass aber die Wissenschaft immer noch einen Anspruch auf eine vollkommnere Methode hatte, hat der Verfasser nicht nur gefühlt, sondern sogar auf folgende Weise ausgesprochen:[3]

„Es ist noch eine von jeder geometrischen Betrachtung freie Methode zu „wünschen, aus welcher hervorgeht, warum man (bei einer solchen Auf- „suchung eines Grössten oder Kleinsten) an die Stelle von P . dp den Aus- „druck — p . dP schreiben muss.“

Die gewünschte analytische Methode wurde von *Lagrange* erfunden. Schon 1755 theilte er sie dem um den Gegenstand bereits so sehr verdienten *Euler* mit.[4] Dieser erkannte sogleich die hohe Wichtigkeit der neuen Erfindung, und sein Urtheil befindet sich in einem an *Lagrange* gerichteten Briefe vom 2. Oct. 1759, wo es heisst:[5]

„Ihre analytische Auflösung des isoperimetrischen Problems lässt nichts „zu wünschen übrig, und ich freue mich, dass dieser Gegenstand, mit „welchem ich mich, seit den ersten Versuchen bis jetzt, fast allein be- „schäftigt habe, durch Sie zum höchsten Grade der Vollkommenheit ge- „bracht worden ist. Die Wichtigkeit des Gegenstandes hat mich veranlasst, „mit Hilfe der von Ihnen gegebenen Aufklärungen auch selbst eine analyti- „sche Lösung des Problems auszuarbeiten, die ich aber durchaus nicht eher „bekannt machen werde, bis Sie Ihre Untersuchungen haben drucken „lassen, um Ihnen nicht den geringsten Theil des Ruhmes zu entziehen, „der Ihnen gebührt.“

Oeffentlich bekannt gemacht wurde die neue Erfindung erst 1761.[6] Sie ist folgende: *Lagrange* unterwirft einen mit Veränderlichen und ihren Diffe-

[1]) Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes seu solutio problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti. Lausannae et Genevae. 1744. 4.

[2]) Diese Regel habe ich beschrieben. Bd. II. Seite 486.

[3]) Methodus inveniendi etc. Seite 56 ganz unten stehen die Worte: desideratur itaque etc.

[4]) Miscellanea Taurinensia. t. IV. für die Jahre 1766—1769. Zweite Abtheil. S. 163.

[5]) Diese Stelle des Briefes befindet sich ebenfalls auf der soeben citirten Seite 163, und lautet: Analytica tua solutio problematis etc.

[6]) Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les Maxima et les Minima des formules intégrales indéfinies. Miscell. Taurin. t. II. für die Jahre 1760 und 1761. Zweite Abtheilung. Seite 173.

rentialen versehenen Ausdruck abermals einer Differentiation, bezeichnet aber letztere nicht mit dem gewöhnlichen Buchstaben d, sondern mit δ. Dann setzt er den Buchstaben δ, wenn er vor den Zeichen d und ∫ steht, hinter dieselben. Zuletzt führt er so viele theilweisen Integrationen aus, dass unter dem Integralzeichen kein Veränderlicher mehr den beiden verschiedenartigen, durch d und δ angedeuteten, Differentiationen zugleich unterworfen ist.

Die Vorzüge dieses Verfahrens sind:

1) Es ist einfach und allgemein, d. h. lässt sich ganz gleichmässig auf Ausdrücke mit beliebig vielen Veränderlichen anwenden. Man kann also jetzt ebenso leicht räumliche Curven und Flächen aufsuchen, wie früher ebene Curven.

2) Man bekommt nicht allein die Hauptgleichungen, sondern auch die Gränzengleichungen, d. h. erst von jetzt an war es möglich, Gränzbedingungen zu stellen und in Rechnung zu bringen.

Ungeachtet dieser Vorzüge, kann man sich doch nicht verhehlen, dass in dieser ersten Abhandlung von *Lagrange* der Mangel einer streng wissenschaftlichen Begründung noch sehr fühlbar ist. Man kann nemlich fragen:

1) Was für ein Unterschied besteht zwischen der neuen durch δ angezeigten, und der gewöhnlichen durch d bezeichneten Differentiation?

2) Ist man wirklich berechtigt oder gar genöthigt, den Buchstaben δ, wenn er vor den Zeichen d und ∫ steht, hinter dieselben zu setzen?

3) Der Werth der durch das neue Zeichen δ differentiirten Form wird durch die nachfolgenden theilweisen Integrationen nicht geändert. Warum müssen aber auch sie ausgeführt werden?

Nun erlaubte sich *Euler*, auch seine analytische Bearbeitung zu veröffentlichen. Dieses geschah 1766 in zwei Abhandlungen.[1] Hier suchte er festere Principien aufzustellen, auf welche man die *Lagrange'sche* Erfindung begründen könne, und legte ihr den Namen „Variationscalcul" bei. Am Ende der zweiten Abhandlung stellte er auch zum ersten Male die (sogenannte) Bedingungsgleichung der Integrabilität auf.

Trotz solcher Anerkennung von Seiten *Euler's* hatte *Lagrange* auch mit Verdriesslichkeiten zu kämpfen. *Fontaine* hatte schon 1734 zur Aufsuchung der tautochronischen Linien eine neue und ihm eigene Methode angewendet.[2] Nun erklärte er, mittelst derselben könnten alle Aufgaben über das Grösste und Kleinste gelöst werden, sie sei aber nicht in Gebrauch gekommen. Zu Gunsten dieser Behauptung veröffentlichte er 1767 eine Abhandlung.[3] Darin beschuldigt er *Lagrange*, dieser habe sich auf der neuen Bahn, die er betreten, verirrt, weil er ihre Theorie nicht hinreichend ergründet, etc. Zu-

[1]) Beide befinden sich in den Nov. Comment. Acad. Petrop. Bd. X vom Jahre 1766. Die erste führt den Titel: „Elementa calculi variationum", und die zweite: „Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum."

[2]) Sie befindet sich in den Pariser Mémoiren von 1734.

[3]) Sie befindet sich in den Pariser Mémoiren von 1767, und hat den Titel: „Addition à la méthode pour la solution des problèmes de maximis et minimis.

gleich stellte *Fontaine* zwei Methoden auf, welche er für neu ausgab und für vortrefflicher, als alle andern, die über diesen Gegenstand bekannt seien. Hiergegen vertheidigt sich 1770 *Lagrange*[1], indem er spricht: „Ich „glaube zu meiner Rechtfertigung nichts besseres thun zu können, als wenn „ich die Sachkenner einlade, *Fontaine's* Abhandlung zu lesen. Man wird „finden, dass die eine Methode desselben keine andere ist, als die, welche „schon *Euler* in seinem Werke von 1744 aufgestellt hat, und dass die an-„dere in Beziehung auf Begründung ganz die gleiche ist, wie die meinige, „und sich nur durch unvollkommene Darstellung davon unterscheidet."

Bei dieser Gelegenheit mag auch eines Vorfalles erwähnt werden, wo *Lagrange* glaubte, dass man ihm die Ehre der ersten Erfindung streitig machen wollte. Es hatten nemlich die beiden Mathematiker *Leseur* und *Jacquier* ein Werk über Integralcalcul herausgegeben.[2] Im zweiten Bande haben sie der neuen Methode ein ganzes Kapitel gewidmet, ohne *Lagrange's* Namen zu nennen. Dazu spricht er[3]: „Ich würde mich nicht beklagen, „wenn sie sich begnügt hätten, meine Methode aufzunehmen, ohne den Ur-„heber zu nennen, ein Verfahren, welches sie auch an andern Stellen[4] ihres „Buches sich haben zu Schulden kommen lassen; allein da sie die Abhand-„lungen von *Euler* citiren, so scheint es, als wollten sie ihm die Methode „zueignen, während ich doch der erste Erfinder bin."

Auch der berühmte *Borda* hat eine Abhandlung geschrieben[5], in welcher er zeigen wollte, dass es mit der Zuverlässigkeit der durch die *Lagrange'sche* Methode sich ergebenden Gränzengleichungen nicht so ganz richtig stehe. Zu dem Ende legte er sich das Problem der Brachistochrone, mit dem sich auch *Lagrange* in seiner ersten Abhandlung befasst hatte, vor, und fand ein allerdings richtiges Resultat, welches mit dem des *Lagrange* nicht übereinstimmt. Diese Thatsache beweist aber nichts gegen die Gränzengleichungen an sich, sondern hat darin ihren Grund, dass die Formel, von welcher *Lagrange* bei seiner Untersuchung ausging, mangelhaft ist. Letzterer stellt nemlich[6] folgende Formel $t = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{x}}$ auf. Dabei sind die mit der Richtung der Schwere parallelen Coordinaten durch x bezeichnet. Diese Formel gilt nur für den Fall, dass die Bewegung grade da, wo $x = 0$ ist, beginne, und sie ist unpassend für alle jene Fälle, in denen die Bewegung an einer andern Stelle beginnen soll. *Lagrange* hat nun[7] seine Formel vervollkommnet, d. h. so eingerichtet, dass man vor-

1) Man sehe Miscell. Taurin. t. IV. für die Jahre 1766—1769. Zweite Abtheil. Seite 164. (Dieser Band, obgleich für die Jahre 1766—1769 gedruckt, enthält dennoch die Vertheidigung *Lagrange's*, welche, wie man Seite 187 sehen kann, am 28. Mai 1770 geschrieben wurde; ja Seite 250 befindet sich sogar noch eine Abhandlung von 1771.)

2) Ist zu Parma erschienen unter dem Titel: „Traité du calcul intégral."

3) Seite 165 des eben citirten vierten Bandes der Miscell. Taurin.

4) Es ist zu bemerken, dass *Lagrange* die betreffenden Stellen des Buches von *Leseur* und *Jacquier* citirt hat.

5) Sie befindet sich in den Pariser Mémoiren von 1767 und 1768. Seite 551.

6) Man sehe Seite 176 des bereits citirten zweiten Bandes der Miscell. Taurin.

7) Seite 183 des vierten Bandes der Misc. Taur.

schreiben kann, welche Geschwindigkeit an irgend einer Stelle der gesuchten Brachistochrone herrschen, oder in welcher Stelle die Bewegung beginnen soll. Mit dieser Vervollkommnung konnte *Lagrange* darthun, dass unter den geeigneten Voraussetzungen seine früheren Resultate [1] allerdings richtig sind, und dass unter andern Voraussetzungen auch *Borda* Recht habe. Hiermit ist die Zuverlässigkeit der Gränzengleichungen auf das glänzendste gerechtfertigt. (Ich habe dieses höchst wichtige Ereigniss vollständig auseinandergesetzt in Bd. II. S. 414 und 426.)

Im Jahre 1770 erschien abermals eine Abhandlung über Variationscalcul von *Euler*, welche er dem dritten Bande seines Werkes über Integralcalcul beifügte.[2] Hier wird an Vollständigkeit alles Frühere weit übertroffen. Bisher hatte man den Variationscalcul nur mit der Lehre des Grössten und Kleinsten in Verbindung gebracht. Jetzt hat sich der Verfasser bereits von dieser beschränkten Idee befreit, und erklärt (§. 115), dass der Variationscalcul weit allgemeiner gemacht werden kann, als man ihn seither angewendet habe, und dass die betreffenden Probleme in zwei Klassen zerfallen. Bei der einen Klasse wird die zwischen x und y stattfindende Relation als gegeben angenommen, und die Variation eines ebenfalls gegebenen Integralausdruckes $\int V \,.\, dx$ hergestellt, nachdem man den beiden Veränderlichen x und y was immer für Variationen beigelegt hat. Bei der andern Klasse wird eine zwischen x und y stattfindende Relation erst gesucht, damit die Variation des Integralausdruckes $\int V \,.\, dx$ eine gewisse Eigenschaft erhalte, damit z. B. in dem Falle, wo dieser Ausdruck ein Grösstes oder Kleinstes werden soll, die Variation der ersten Ordnung verschwinde.

Aber auch jetzt noch strebte *Euler*, diesen Calcul nicht nur in seinen Principien immer fester zu begründen, sondern auch mit den vorhergehenden Zweigen der Analysis in engere Verbindung zu bringen. So erschien 1772 wieder eine Abhandlung.[3] Bisher hatte man den Variationscalcul nur auf Integralausdrücke angewendet. Jetzt hat sich der Verfasser auch von dieser Einschränkung befreit, und hat (in §. 1 und 2) alle Ausdrücke, welche einer Variation unterworfen werden können, in drei Abtheilungen gebracht. In die erste gehören diejenigen Ausdrücke, welche nur aus Urfunctionen bestehen; in die zweite diejenigen, welche auch mit Differentialen versehen sind; und in die dritte diejenigen, wo auch Integrale vorkommen.

Sodann führt er (in §. 3) noch einmal das Prinzip vor, auf welches er bisher den Variationscalcul gegründet hatte. Er hatte nemlich, wenn zwischen x und y irgend eine Relation stattfindet, bisher zweierlei Aenderungen unterschieden, die das y erleiden kann. Die erste Art, welche von jeher mit

[1]) Seite 179 und 180 des zweiten Bandes der Misc. Taur.

[2]) Institutiones calculi integralis. 3 T. Petrop. 1768—1770. 4. Von diesem Werke existirt eine schöne von *Salomon* besorgte deutsche Uebersetzung. Wien 1828—1830. 4 Bd. 8. Der vierte Band enthält neuere Abhandlungen von *Euler*, welche sich nicht im lateinischen Original befinden.

[3]) Diese befindet sich in den Nov. Comm. Petrop. t. XVI. 1772, und führt den Titel: „Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi.“ In *Salomon's* Uebersetzung steht sie Bd. IV. S. 551.

dy bezeichnet und Differential genannt wurde, entsteht, wenn x in x + dx übergeht. Die andere, welche mit δy bezeichnet und Variation genannt wird, hängt nicht von den Aenderungen des x, sondern ganz von unserer Willkür ab.

So schien (§. 4 und 5) der Variationscalcul allerdings eine ganz eigenthümliche Gattung von Calcul zu bilden. Als aber *Euler* dessen Wesen genauer untersuchte, fand er, dass derselbe ganz auf die Theorie der partiellen Differentiale zurückgeführt werden kann. Statt jene Aenderung, die Variation genannt wird, beizubehalten, betrachtet er y nicht mehr als Function des einzigen Veränderlichen x, sondern er führt y als Function zweier Veränderlicher x und t in die Rechnung ein.

Dieses versinnlicht er zuerst auf folgende Weise:

Man denke sich y als die zu irgend einer Curve gehörige Ordinate, welche der Abscisse x entspricht. Wenn nun X jene Function bezeichnet, welcher die Ordinate y gleichgesetzt wird; so können solche Curven, die der vorigen nächstanliegen, durch $y + \Delta y = X + t . V$ dargestellt werden, wo V irgend eine Function von x bedeutet, und t unendlich klein ist.

Hierauf macht er die Sache noch allgemeiner auf folgende Weise:

Es sei $y = \varphi(x)$ die Gleichung einer Curve. Dann werden durch $\varphi(x, t)$ alle ihr nächstanliegenden Nachbarcurven dargestellt, wenn $\varphi(x, t)$ so beschaffen ist, dass bei $t = 0$ sich $\varphi(x, t)$ auf $\varphi(x)$ zurückzieht. Dabei wird durch die Formel $\left(\frac{d\varphi(x, t)}{dt}\right) . dt$ eben das ersetzt, was früher durch δy angedeutet wurde.

Eine ähnliche, jedoch beschränktere, Idee kann man schon in der differentiatio de curva in curvam erblicken. Dieses Verfahren, von *Leibnitz* 1697 aufgestellt[1], besteht bekanntlich darin, dass man den in der gegebenen Gleichung einer Curve enthaltenen Constanten stetig nebeneinander liegende Werthänderungeu beilegt, wodurch sich immer andere und andere Ordinaten, die einer und derselben Abscisse entsprechen, ergeben. Dadurch bekommt man ein System von stetig aufeinander folgenden Curven, aber nur von Curven einerlei Art. Und so fort.

Durch die Einführung eines neuen Veränderlichen ist der Variationscalcul allerdings auf seine wahre Grundlage gebracht. Allein gegen das *Euler'sche* Verfahren lässt sich immer noch Einiges einwenden. Ich habe dieses nicht nur (in §. 61, Seite 96) nachgewiesen, sondern auch (in §. 53, Seite 78, etc.) ein anderes Verfahren aufgestellt.

In keiner seiner Abhandlungen hat *Euler* die Variation der zweiten Ordnung untersucht, um das Kennzeichen aufzustellen, aus dem hervorgeht, ob ein Grösstes oder Kleinstes oder keines von beiden stattfinde. Die erste Untersuchung dieser Art hat 1772 *Laplace* veröffentlicht.[2] Hierauf hat *Legendre* sich mit diesem Gegenstande befasst, und zwei Abhandlungen darüber, die eine 1786, die andere 1787 bekannt gemacht.[3] In diesen drei Untersuchungen kommen aber nur diejenigen Fälle vor, wo eine einzige Function y des einzigen Veränderlichen x gesucht wird.

1) Commercium epistolicum Leibnitii et Bernoullii. epist. LIX, LX, LXI und LXIII.

2) Nova acta eruditorum. 1772. Seite 193.

3) Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris; 1786. S. 7; und 1787 S. 348.

Lagrange bemühte sich gleichfalls, seine Methode fester zu begründen und zu erweitern. Dieses geschah 1797 zum ersten Male in seinem Werke „Théorie des fonctions analytiques“, von welchem 1813 eine zweite Ausgabe erschien. Eine Untersuchung der Variation zweiter Ordnung kommt hier allerdings auch vor; allein dieselbe ist

1) auch hier auf solche Fälle[1] beschränkt, wo nur eine einzige Function y des einzigen Veränderlichen x gesucht wird; dagegen dehnt sie sich

2) nicht auf solche Fälle aus, wo gleichzeitig zwei verschiedene Functionen y und z des einzigen Veränderlichen x gesucht werden, und ebenso

3) nicht auf solche Fälle, wo eine Function z von zwei unabhängigen Veränderlichen x und y gesucht wird.

Zwar kommt[2] ein, jedoch sehr specielles, Beispiel vor, wo allerdings zwei Functionen y und z des einzigen Veränderlichen x zugleich gesucht werden; allein dabei bietet die Formel für das Prüfungsmittel sich schon von selbst dar, und eine für alle solche Fälle allgemein giltige Untersuchung findet sich hier nicht.

In diesem Werke ist auch[3] zum ersten Male ein Problem aufgestellt, in welchem ein Ausdruck, der zwar Differentiale aber keine Integrale enthält, ein Grösstes oder Kleinstes werden soll. Zugleich sind daselbst zu einer für die Lösung solcher Probleme nöthigen Theorie einige jedoch nur schwache Andeutungen gegeben.

Sehr wesentlich hat *Lagrange* seine Methode verbessert und zugleich mit interessanten Aufgaben ausgestattet in der 1806 erschienenen zweiten Ausgabe seines Werkes „Leçons sur le calcul des fonctions“.[4] Er liess[5] nach *Euler's* Vorgange die Function $y = \varphi(x)$ in eine andere mit einem neuen Veränderlichen t versehene Function $\varphi(x, t)$ übergehen, in der Art, dass bei $t = 0$ sich $\varphi(x, t)$ auf $\varphi(x)$ zurückzieht. Hierauf entwickelt er $\varphi(x, t)$ mittelst des *Maclaurin'schen* Satzes in eine Reihe von der Form

$$\varphi(x) + t \cdot \psi(x) + \frac{t^2}{1.2} \cdot \chi(x) + \frac{t^3}{1.2.3} \cdot \pi(x) + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Durch die Einführung eines neuen Veränderlichen ist, wie schon einmal gesagt, der Variationscalcul allerdings auf seine wahre Grundlage gebracht. Allein gegen die *Lagrange'sche* Einführungsweise, weil sie dieselbe ist, wie die *Euler'sche*, lassen sich auch dieselben Einwendungen machen.[6]

Dadurch, dass *Lagrange* seine Reihe durch den *Maclaurin'schen* Satz entwickelt, ist darauf auch der ganze Variationscalcul gegründet, d. h. sind diesem alle jene Vortheile gesichert, welche der *Maclaurin'sche* Satz selbst hat.

1) Seconde partie; chap. XII. Nr. 64—70. Zweite Ausgabe.

2) Seconde partie; chap. XII; Nr. 73. Zweite Ausgabe.

3) Seconde partie; chap. XI; Nr. 59 und 60. Zweite Ausgabe.

4) Die erste Ausgabe dieses Werkes wurde im zwölften Hefte des Journals der école polytechnique im Jahre 1804 abgedruckt. Im Jahre 1806 erschien eine neue Ausgabe bei Courcier, welche so vermehrt ist, dass man die erste Ausgabe nicht mehr citiren kann.

5) Leçon XXII. Nr. 355. Zweite Ausgabe.

6) Man sehe abermals §. 61, Seite 96, wo ich die betreffenden Einwendungen gemacht, und §. 53, Seite 78, etc., wo ich ein anderes Verfahren aufgestellt habe.

Blicken wir nun auf die bisherige Geschichte unsers Calculs zurück, so sehen wir:

1) *Euler* hatte durch geometrische Betrachtungen das isoperimetrische Problem soweit ausgebildet, dass die Wissenschaft auf dem Punkte stund, wo eine rein analytische Methode gefunden werden musste.

2) *Lagrange* war es, welcher diese Erfindung machte.

3) *Euler* hat sich bemüht, die *Lagrange'sche* Erfindung zu befestigen und auszubilden, und hat sie dadurch am meisten vervollkommnet, dass er einen neuen Veränderlichen einführte.

4) Diese Idee hat auch *Lagrange* als die geeignetste anerkannt, und als Grundlage seiner Erfindung angenommen.

Ausser *Laplace* und *Legendre*, welche, wie bereits gemeldet, schätzenswerthe Beiträge geliefert haben, glaubten noch viele andere Schriftsteller sich des Variationscalculs annehmen zu müssen. Die meisten derselben haben die Wissenschaft soviel wie gar nicht gefördert, sondern haben sich begnügt, das Vorhandene zu sammeln, und nach eigner Einsicht zu ordnen. Ein Verzeichniss solcher Schriftsteller aufzustellen, wäre ein sehr überflüssiges Unternehmen; und es genügt, wenn über sie folgendes bemerkt wird:

Einige hielten sich streng an *Euler's* allgemeine Grundlage, d. h. stellten die unmittelbare Variation durch eine unaufhörliche Reihe dar. Dahin gehört z. B. *Lacroix*, welcher in seinem Werke[1] Alles, was bis dahin geleistet war, gesammelt, schön geordnet und klar vorgetragen hat.

Andere haben sich mit einer schon von *Euler*[2] als zu speciell erklärten Grundlage begnügt, d. h. sie haben auch für eine allgemeine unmittelbare Variation nur die allereinfachste geschlossene Reihenform

$$\varphi(x) + t \cdot \psi(x)$$

gesetzt.[3] Indem sie glaubten, auf diese Weise dem Calcul mehr Einfachheit

[1]) Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. Seconde édition, tome II. Paris 1814. Ueber die Art, wie *Lacroix* sich an die *Euler'sche* Grundlage gehalten hat, vergleiche man folgende drei Stellen:

α. Seite 724. Da lässt er $\varphi(x)$ in $\varphi(x, t)$ übergehen, und entwickelt $\varphi(x, t)$ in eine nach Potenzen des t aufsteigende Reihe.

β. In Nr. 839, Seite 744 lässt er die beiden gleichzeitig bestehenden Functionen $\varphi(x)$ und $\chi(x)$ in $\varphi(x, t)$ und $\chi(x, t)$ übergehen, etc.

γ. In Nr. 842, Seite 751, lässt er $\varphi(x, y)$ in $\varphi(x, y, t)$ übergehen, etc.

[2]) Man sehe Seite XI dieser Vorrede, wo die *Euler'sche* Abhandlung von 1772 besprochen worden ist.

[3]) Solcher Schriftsteller will ich nur drei nennen:

α. Gergonne. In den Annales de math. pures et appliquées. t. XIII. 1822.

β. Dirksen. Analytische Darstellung der Variationsrechnung. Berlin 1823.

γ. Poisson. Man sehe folgende zwei Schriften:

1) Die Pariser Mémoiren. t. XII von 1833. Seite 231 ganz unten steht: Es seien δx und δy willkürliche Functionen und unendlichklein; man setze $x + \delta x$ und $y + \delta y$ an die Stelle von x und y, etc. Ferner Seite 243 steht: Es sei α unendlichklein, man setze die Producte $\alpha . \delta x$ und $\alpha . \delta y$ statt δx und δy, und entwickle den ganzen Zuwachs des U in eine nach Potenzen des α aufsteigende Reihe, etc.

2) Traité de mécanique. Seconde édition. 1833. Im ersten Bande §. 199 steht: Man bezeichne durch i eine beständige und unendlichkleine Grösse, und durch δy und δz zwei willkürliche Functionen von x. Man setze $y + i . \delta y$ und $z + i . \delta z$ an die Stelle des y und z, etc. Am Ende des §. 202 verweist er auch auf die vorhin genannte Abhandlung in den Pariser Mémoiren.

und Eleganz zu geben, haben sie ein Verfahren eingeschlagen, welches an den allerstärksten Gebrechen leidet. Wenn nemlich eine Function $\varphi(x)$ in jede beliebige $\varphi(x, t)$ übergehen soll, so ist die Reihenentwicklung nicht wirklich ausführbar, sondern nur in der Idee gedenkbar, und die Reihe selbst muss eine unaufhörliche sein; denn wollte man behaupten, sie dürfe auch eine geschlossene sein, so müsste die Function $\varphi(x, t)$ irgend eine bestimmte Eigenschaft haben, welche berechtigt, die Reihe bei einem frühern oder spätern Gliede abzubrechen (man sehe S. 95 des ersten Bandes). Ausserdem wird aber auch dieses Verfahren durch eine Menge Widersprüche von selbst bestraft, wovon man sich überzeugen kann, wenn man die betreffenden Stellen dieses Buches [1] vergleicht.

Nun erschienen 1825, 1831, 1833 und 1839 vier Schriften von *Martin Ohm.*[2] Auch sie verdienen berücksichtigt zu werden; denn durch sie hat der Variationscalcul an Ausdehnung und Inhalt gewonnen, wie wir sogleich sehen werden.

In der Schrift von 1825 befindet sich eine allgemeine Theorie des Variationscalculs, welche sehr vollständig ist, und einzelne schwierige Partien weit genügender behandelt, als bisher der Fall war. In dieser Schrift befindet sich aber auch noch eine sehr ausführliche Lehre des Grössten und Kleinsten. Der Verfasser bringt daselbst, nach *Euler's* Vorgange, alle Ausdrücke in drei Abtheilungen. Die erste umfasst die Ausdrücke, welche wirkliche Urfunctionen sind. Die betreffenden Untersuchungen sind ziemlich vollständig; jedoch fehlen diejenigen, welche ich in Bd. I. §. 162—179 vorgenommen habe, und zu deren Anwendung die Aufgaben 55—60 dienen. Die zweite Abtheilung umfasst die Ausdrücke, wo auch Differentiale eingehen. Die betreffenden Untersuchungen, für welche, wie bereits gemeldet, *Lagrange* nur einige schwache Andeutungen gegeben hat, finden wir hier zum ersten Male mit ziemlicher Ausführlichkeit erledigt. Die dritte Abtheilung umfasst jene Ausdrücke, wo Integrale eingehen. Viele der betreffenden Untersuchungen zeichnen sich durch Vollständigkeit aus, andere dagegen sind mangelhaft. I) Bei den Problemen, welche auf einfache Integrale führen, und bei welchen die Gränzelemente constant sind, findet man hier[3] zum ersten Male eine allgemeine Untersuchung der Variation zweiter Ordnung für den Fall, wo gleichzeitig zwei Functionen y und z des einzigen Veränderlichen x gesucht werden, welche voneinander unabhängig sind; dagegen für den Fall, wo diese beiden Functionen (entweder durch eine Urgleichung oder eine Differentialgleichung) von einander abhängig sind, ist diese Untersuchung[4]

1) Dieses habe ich näher ausgeführt in Bd. I. §. 110, Seite 163 etc., und in der dritten Bemerkung Seite 97.

2) Diese vier Schriften sind:
α. Lehre des Grössten und Kleinsten. Berlin 1825.
β. System der Mathematik. Bd. V. Berlin 1831.
γ. System der Mathematik. Bd. VII. Berlin 1833.
δ. Lehrbuch der höhern Mathematik, in zwei Bänden. Bd. II. Berlin 1839.

3) Man sehe das Buch von 1825. Seite 293 die Anmerkung ganz unten.

4) Ebendaselbst: Seite 285 den Schluss von §. 88, und Seite 289 den §. 90. Man vergleiche diese beiden Stellen mit dem Verfahren, welches ich in Bd. I. Seite 327 und in Bd. II. Seite 671 vorgeschlagen, und in Bd. II. Seite 361—363, 365, 395, etc. praktisch angewendet habe.

kaum angedeutet, obgleich für sie eine ganz eigenthümliche Regel aufgestellt werden muss. Ebenso ist die Untersuchung der Variation zweiter Ordnung für alle die Fälle, wo die Gränzelemente veränderlich sind, unrichtig.[1] II) Bei den Problemen, welche auf Doppelintegrale führen, findet man hier zum ersten Male den Fall berücksichtigt, wo der Veränderliche, nach welchem zuerst integrirt wird, eine Function des Veränderlichen ist, nach welchem die zweite Integration ausgeführt werden soll.[2] Es ist gezeigt, wie in solchem Falle die Variation der ersten Ordnung umgeformt wird; allein die Darstellung, in welcher diese umgeformte Variation erscheint, kann durchaus nicht als praktisch gelten. Davon überzeugt man sich ohneweiters, wenn man die betreffenden Stellen[3] mit meinen Aufgaben vergleicht. Was die Gränzengleichungen betrifft, so ist grade bei den Doppelintegralen die ungeheuerste Manichfaltigkeit möglich. Dessenungeachtet findet man[4] nur den allereinfachsten Fall berücksichtigt; und so kann man gradezu aussprechen, dass in dieser Beziehung so viel wie Nichts geschehen sei. Die Untersuchung der Variation zweiter Ordnung fehlt gänzlich.

In den beiden Schriften von 1831 und 1839 kommt[5] eine Theorie des Variationscalculs vor. Damit sind sehr beachtenswerthe und elegante Reihenentwickelungen verbunden, welche verdienen, dass man darauf aufmerksam mache.

Auch befindet sich in den beiden Schriften von 1833 und 1839 eine allgemeine Lehre des Grössten und Kleinsten[6], die aber nur als Auszug aus

[1]) Man sehe das Buch von 1825. Seite 261 steht: Verfolgt man die Schlüsse des §. 69, so wird man jedesmal dasselbe Resultat erhalten, es wird nemlich jedesmal ein Maximum oder Minimum existiren, so oft $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ beständig negativ oder positiv bleibt. (p ist bekanntlich statt $\frac{dy}{dx}$ gesetzt.)

Seite 271 steht: Ebenso wird man die Schlüsse des §. 79 für das hiesige $\delta^2 U$ mit wenigen Abänderungen auch hier anwenden können, um sich zu überzeugen, dass auch jetzt ein Maximum oder Minimum stattfindet, so oft $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$ beständig negativ oder positiv bleibt. (q ist bekanntlich statt $\frac{d^2y}{dx^2}$ gesetzt.)

In §. 82 Seite 275, in §. 86 Seite 284, etc. stehen ganz dieselben Behauptungen.

Alle diese Behauptungen stimmen darin überein, dass das Prüfungsmittel von den Aenderungen der Gränzelemente gar nicht abhange, sondern dass es dasselbe sei, wie in jenen Fällen, wo die Gränzelemente constant sind.

Dem ist aber nicht so, sondern in den Fällen, wo auch die Gränzelemente veränderlich sind, sind ganz eigenthümliche Transformationen und Betrachtungen nöthig, dergleichen ich in Bd. I. Seite 333, etc. vorgetragen, und später bei den Aufgaben angewendet habe.

[2]) Das Buch von 1825. Seite 306 – 310.

[3]) α. Man vergleiche den im Buche von 1825 Seite 306 für δU aufgestellten Ausdruck mit jenem, welchen ich in Bd. II. Seite 676 aufgestellt habe.

β. Man verbinde die im Buche von 1825 Seite 308 und 310 stehenden Formeln miteinander, und vergleiche sie dann mit den meinigen, welche sich in den Aufg. 280 – 288 befinden.

[4]) Im Buche von 1825. Seite 306 ganz oben.

[5]) Man sehe das Buch von 1831, Seite 51 – 87, und das Buch von 1839, S. 289 – 314.

[6]) Man sehe das Buch von 1833, Seite 184 – 208, und das Buch von 1839, S. 315 – 338.

dem Buche von 1825 gelten kann, und sich nur durch gedrängteren Vortrag davon unterscheidet.

Jetzt kommen wir aber zur Hauptsache. Wie steht es um die Grundlage, auf welche der Verfasser seinen Calcul baut? — Diese ist allerdings eine höchst eigenthümliche. Er setzt[1] für die unmittelbare Variation ohneweiters die unaufhörliche Reihenform

$$y_\varkappa = y + \varkappa \cdot y_1 + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot y_2 + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot y_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

oder

$$y_\varkappa = y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.2} \cdot \delta^3 y + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

voraus, ohne nur im geringsten anzugeben, woher er dieselbe genommen habe, oder woher sie entstanden sein könnte. Sodann spricht er

1) im Werke von 1825[2]: Wenn ein Ausdruck y für sich und unabhängig von einem andern in eine nach ganzen Potenzen des $\varkappa$ fortlaufende Reihe übergehend gedacht wird, so heisst er „durch $\varkappa$ unmittelbar variirt", geht aber ein Ausdruck V nur dadurch in gedachte Reihenform über, dass ein anderer, von welchem er abhangt, in eine solche unaufhörliche Reihe übergeht, so heisst er „durch $\varkappa$ mittelbar variirt" etc. etc. Dagegen spricht er

2) in den beiden andern Werken[3]: Sowie es bisher von Nutzen gewesen ist, eine Function $V_\varkappa$ nach Potenzen von $\varkappa$ in eine unaufhörliche Reihe zu verwandeln, so kann es nöthig werden, V_y in eine nach Potenzen von $\varkappa$ fortlaufende Reihe zu verwandeln, während y selbst eine nach Potenzen von $\varkappa$ fortlaufende Reihe ist, etc. etc. Im folgenden Abschnitte[4] spricht er: In manchen Fällen der Anwendung der so eben mitgetheilten Lehren sind dergleichen Reihen von ihrem ersten Gliede unendlichwenig verschieden, weil $\varkappa$ unendlichklein gedacht ist. Dann nennt man die einzelnen Glieder des Unterschiedes $y_\varkappa - y$ oder $V_\varkappa - V$, die mit den verschiedenen Potenzen des $\varkappa$ afficirt sind, die Variation von y oder von V, und es enthält der vorhergehende Abschnitt (wo die besagten Reihenentwickelungen vorgetragen sind) den sogenannten Variationscalcul seinem Wesen nach, etc. etc.

Dadurch, dass er die unmittelbaren Variationen durch unaufhörliche Reihen darstellt, hat er seinem Calcul weiter nichts als die richtige Form gesichert; aber hinsichtlich der Grundlage kann man mit Recht fragen: Woher hat der Verfasser seine unaufhörlichen Reihen entnommen? — Warum hat derselbe nicht ein Verfahren eingeschlagen, aus welchem diese Reihe mit Nothwendigkeit hervorgeht? — Warum hat er die *Euler'sche* Begründungsweise, die doch von *Lagrange* angenommen worden ist, aufgegeben, ohne dieses sein Verfahren zu motiviren? — etc. etc.

1) Das Buch von 1825, Seite 87 und 89. Das Buch von 1831, Seite 51 und 52. Das Buch von 1839, Seite 289.

2) Man sehe §. 3, Seite 88.

3) Man sehe das Buch von 1839, Seite 289; sodann das Buch von 1831, Seite 51, besonders Seite 52.

4) Seite 82 des Buches von 1831, und Seite 311 des Buches von 1839.

Es ist bereits gemeldet, dass auch in dem ausführlichen Buche von 1825 für die Untersuchungen, welche auf Doppelintegrale führen, noch sehr wenig gethan ist. Desshalb schrieb *Poisson* eine eigene Abhandlung über diesen Gegenstand, welche 1833 erschienen ist.[1] Er hat geglaubt, er müsse (um für die Fälle, wo auch die Gränzen des Doppelintegrals veränderlich sind, den Formeln die gehörige Allgemeinheit zu geben) dem Calcul ein neues Princip unterlegen; und zu diesem Ende hat er an die Stelle der beiden Veränderlichen x und y, nach welchen integrirt werden soll, zwei Functionen zweier neuer Veränderlicher u und v gesetzt, etc. etc. Zuletzt hat er die beiden Veränderlichen x und y wieder zurückgeführt. Allein durch solches Verfahren hat er die ohnehin nicht sehr einfache Untersuchung nur noch mehr verwickelt, und mit unnöthigen Schwierigkeiten überhäuft.

Dieses ist der Grund, warum auch *Ostrogradsky* sich des Gegenstandes angenommen, und 1834 eine Abhandlung[2] darüber veröffentlicht hat. Er zeigte, dass die Einführung der beiden neuen Veränderlichen unnöthig ist, und dass bei der bisherigen Grundlage der Variationscalcul jede nur wünschenswerthe Allgemeinheit mit der grössten Einfachheit vereinigen kann.

Dass aber auch diese beiden Abhandlungen sowohl in theoretischer als praktischer Beziehung das nicht leisten, was der Gegenstand erfordert, habe ich bereits (Bd. II, S. 737 und 738) vollständig und gründlich auseinandergesetzt. Dort kann man z. B. ersehen, dass in beiden Abhandlungen der für die Variation erster Ordnung hergestellte Ausdruck nicht nur unpraktisch, sondern sogar unvollendet ist, dass in beiden noch immer die Untersuchung der Variation zweiter Ordnung fehlt, dass in beiden kein einziges specielles Beispiel vorkommt, um die ohnehin so schwierige Untersuchung in ihren Einzelheiten zu beleuchten, etc. etc.

Hiermit ist der Zustand, in welchem sich die Theorie des höchsten Zweiges der Analysis befindet, in kurzem Umrisse dargestellt; und wir haben sowohl gesehen, dass viel Vortreffliches geleistet, als auch, dass noch Manches nachzuholen ist. Zugleich haben wir aber auch gesehen, dass in praktischer Beziehung die Werke von *Euler* und *Lagrange* mit schönen und interessanten Anwendungen ausgestattet sind; dass jedoch grade hinsichtlich der Anwendungen noch das Meiste nachgeholt werden muss, werden wir später sehen.

Viele wichtige historische Notizen, welche sich aber mehr auf specielle Aufgaben als auf den Variationscalcul im Allgemeinen beziehen, findet man in jenen Schlussbemerkungen, welche Seite 787 hinter dem Inhaltsverzeichnisse des zweiten Bandes aufgezeichnet sind.

Bei solchen Verhältnissen habe ich es unternommen, ein Werk über Variationscalcul auszuarbeiten, welches in theoretischer und praktischer Be-

[1]) Sie befindet sich in dem (1833 gedruckten) Band XII der Pariser Mémoiren, und führt den Titel: Mémoire sur le calcul des variations. Par M. Poisson. Lu à l'académie le 10 novembre 1831.

[2]) Sie befindet sich in den Petersburger Mémoiren, série VI, tome III, und führt den Titel: Mémoire sur le calcul des variations des intégrales multiples. Par *M. Ostrogradsky*. Lu à l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg le 24 janvier 1834.
Einen Abdruck davon enthält *Crelle's* Journal. Bd. XV. Heft IV. 1836.

ziehung die vorhandenen Lücken ausfüllen soll. Ich lege den Mathematikern zwei Bände desselben vor. Ihr Inhalt zerfällt in einen theoretischen und einen praktischen Theil.

Der theoretische Theil besteht aus sieben Abtheilungen.

Die erste Abtheilung (Seite 1—8) befasst sich mit den für die verschiedenartigen Differentialquotienten passenden Bezeichnungen. Die oft sehr zusammengesetzten Ausdrücke und manichfaltig verbundenen Operationen, welche im (sogenannten) Variationscalcul vorkommen[1], machen vielerlei Bezeichnungen nöthig, während sich bei den einfacheren Beziehungen im Differential- und Integral-Calcul ein solches Bedürfniss weniger fühlbar macht.

Die zweite Abtheilung (Seite 8—13) enthält einige Sätze aus dem Integralcalcul. Sie sind alle bekannt, finden sich aber nicht in jedem Lehrbuche beisammen.

In der dritten Abtheilung (Seite 13—20) finden sich die Untersuchungen über den Zeichenstand der homogenen Functionen. Hier befindet sich nichts Neues, und besagte Untersuchungen sind nur desshalb aufgenommen, um bei spätern Anlässen darauf verweisen zu können.

Die vierte Abtheilung (Seite 20—69) hat zum Gegenstande die Entwicklung der ungesonderten Functionen in Reihen.

Der Erste, welcher sich mit diesem Probleme befasst hat, war *Newton*. Er nahm[2] ein Rechteck, welches man sich nach allen Richtungen hin unbestimmt erweitert denken muss, und theilte es in eine (ebenfalls unbestimmte) Anzahl gleichgrosser Quadrate. In diese zerstreute er sodann, nach einer gewissen Ordnung, die einzelnen Theilsätze der gegebenen Gleichung, etc. Das so eingerichtete Rechteck wird das *Newton'sche* Parallelogramm genannt.

Der *Abbé de Gua* nahm statt des Rechteckes ein Dreieck, und verfuhr auf ähnliche Weise. Das Dreieck hat auch *Cramer*[3] angenommen.

Erst *Lagrange* stellte[4] eine rein analytische Methode auf, wodurch das Problem direct gelöst ist, und die bisherigen geometrischen Nothbehelfe überflüssig geworden sind. Die betreffende Abhandlung des *Lagrange* hat *Lacroix* erweitert, und so in sein grösseres Werk[5] aufgenommen.

[1]) Man sehe z. B. die Lehrsätze, welche durch Gleichung VI auf Seite 3, durch Gleichung VIII und IX auf Seite 4, durch Gleichung XVI und XVII auf Seite 7 dargestellt sind. Diese Sätze hätten bei der gewöhnlichen Bezeichnungsart nicht dargestellt werden können. Sie finden im Variationscalcul unendlichviele Anwendung. Namentlich sind sie die Grundlage zu den durch die Gleichungen $\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d\delta y}{dx}$, $\delta\left(\frac{d_x z}{dx}\right) = \frac{d_x \delta z}{dx}$, etc. ausgesprochenen Wahrheiten, wie man (Bd. I. S. 93) ersehen kann

[2]) Man sehe:
α. Newton's Abhandlung „Methodus fluxionum et serierum infinitarum."
β. Newtoni opuscula. T. I. p. 41 et 351.
Sämmtliche Werke *Newton's* sind in lateinischer Sprache herausgegeben von *Horsley*. Lond. 1779. 4. 5 Bd. In dieser Ausgabe ist die zuerst genannte Abhandlung eingereiht unter dem Titel: „Artis analyticae specimen vel geometria analytica."

[3]) Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Genève 1750. 4. Im VII[ten] Capitel findet man diese Untersuchung mit sehr vielen Einzelheiten.

[4]) Mémoires de l'académ. de Berlin, an 1776. pag. 238.

[5]) Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. Seconde édition. Tome premier. pag. 102—114.

Später haben nur wenige Schriftsteller von dem Vorhandensein dieses Problems einige Notiz genommen, und die Abhandlung, welche sich im Werke von *Lacroix* befindet, abgeschrieben. Sogar die Beispiele haben sie beibehalten, und nicht um ein einziges vermehrt.

Da nun die Entwicklung ungesonderter Functionen so oft vorkommt, und der Differentialcalcul nur diejenigen Reihen liefert, welche nach ganzen positiven Potenzen des Fortschreitungselementes aufsteigen; so muss allerdings diejenige Methode, welche gleichmässig gilt sowohl für die nach ganzen (positiven oder negativen) als auch für die nach gebrochenen (positiven oder negativen) Potenzen fortschreitenden Reihen, so vollkommen als möglich ausgebildet werden. Ich habe mir desshalb das genannte Problem vorgelegt, und dessen Lösung zu vervollkommnen gesucht. Meine Beiträge mögen ungefähr folgende sein:

1) Ich habe[1] gezeigt, wie die verschiedenen Reihenformen vertheilt sind. Damit hangt unmittelbar zusammen

2) dass, wenn eine Reihe n-förmig ist, und nach gebrochenen Potenzen des Fortschreitungselementes fortläuft, der Nenner dieser gebrochenen Potenzen niemals grösser, wohl aber kleiner als n sein kann. Ferner habe ich

3) dargethan[2], dass die Gleichungen, durch welche die Coefficienten der Reihen bestimmt werden, in Gruppen zerfallen, deren jede ein eigenthümliches Discerptionsgesetz beobachtet. Dabei ist das Bildungsgesetz zwar nur ein recurrentes, allein es ist doch einmal ein Bildungsgesetz aufgestellt, was früher nie geschehen ist. Nicht jedesmal fängt das Discerptionsgesetz mit der Gleichung an, aus welcher sich der Coefficient des ersten Gliedes ergibt, sondern öfters erst mit einer spätern.[3] Desshalb wird auch das erste Glied nicht immer so vielförmig sein, als die Reihe selbst. Auch habe ich

4) gezeigt[4], wie die Reihenentwickelungen ausgeführt werden, wenn in ungesonderten Functionen den unabhängigen Veränderlichen Werthänderungen beigelegt, und an die Stelle der abhängigen Veränderlichen bestimmte Functionen gesetzt werden. Dass aber dieser Punkt alle Aufmerksamkeit verdient, darüber vergleiche man die Bemerkung, welche Seite 67 ganz unten steht.

Um eine vielförmige Reihe von einer einförmigen zu unterscheiden, sind für die vielförmigen Radicale und Potenzen passende Bezeichnungen nöthig. Dergleichen hat schon *Cauchy*[5] vorgeschlagen. Ein vielförmiges Radical zeigt er durch $\sqrt[n]{\!\sqrt{a}}$, und eine vielförmige Potenz durch $((a))^x$ an. Die doppelte Klammer ist aber oft sehr unbequem; und desshalb habe ich (Seite 33) für

1) Man sehe Seite 65 – 67.

2) Man sehe z. B. Seite 63, etc.

3) Man sehe Seite 31, 36, 63.

4) Man sehe Seite 67, etc; und die praktischen Anwendungen in den Aufgaben 18 bis 23, 34, 53, 54.

5) Cours d'analyse de l'école royale polytechnique. 1[re] partie. Paris. 1821. pag. 7 – 18

vielförmige Potenzen den doppelten Bruchstrich vorgeschlagen. So z. B. steht (Seite 64) die vielförmige Reihe

$$\text{II)}\quad u = A \cdot \left(v^{\frac{m}{\overline{n}}}\right)^{\alpha} + B \cdot \left(v^{\frac{m}{\overline{n}}}\right)^{\beta} + C \cdot \left(v^{\frac{m}{\overline{n}}}\right)^{\gamma} + \ldots\ldots$$

Nach *Cauchy's* Vorschlag müsste man schreiben

$$u = A \cdot \left(((v))^{\frac{m}{n}}\right)^{\alpha} + B \cdot \left(((v))^{\frac{m}{n}}\right)^{\beta} + C \cdot \left(((v))^{\frac{m}{n}}\right)^{\gamma} + \ldots\ldots$$

eine Schreibart, die gewiss sehr schwerfällig ist. Die doppelte Klammer mag in allen den Fällen bleiben, wo keine zweckmässigere Bezeichnung möglich ist, z. B. bei allgemeinen Potenzen, wo der Exponent nicht in Bruchform erscheint, und bei allen transcendenten Ausdrücken. Jeder, welcher sich mit dergleichen Reihenentwickelungen beschäftigt, wird nothwendig auf das Bedürfniss solcher unterscheidenden Bezeichnungen hingeführt. Wie könnte man ohne eine solche z. B. an den Reihen XXV (Seite 449) und XXXII (Seite 450) erkennen, dass sie zweiförmig und nicht einförmig sind? Wie an Reihe XLIII (Seite 451), dass sie nothwendig vierförmig sein muss, und dass in ihr die beiden vorhin genannten Reihen enthalten sind?

Durch einige Aufmerksamkeit kommt man leicht zu der Ueberzeugung, dass jeder aus einer ungesonderten Function entwickelten Reihe alle ihre Formen schon durch die Beschaffenheit der Coefficienten gesichert sind, und dass es sonach erlaubt ist, den gebrochenen Potenzen des Fortschreitungselementes ihre einfachste Form beizulegen.

1) Seite 41 steht die aus einer ungesonderten Function entwickelte dreiförmige Reihe

$$\text{XI)}\quad u = 3 \cdot (\overset{3}{W}\overline{1}) \cdot v^{\frac{2}{\overline{3}}} + 2v$$

und mit dieser ist folgende ganz gleichbedeutend

$$u = 3 \cdot (\overset{3}{W}\overline{1}) \cdot v^{\frac{2}{3}} + 2v$$

2) Seite 54 ganz unten steht die aus einer ungesonderten Function entwickelte dreiförmige Reihe

$$u = v + 2 \cdot v^2 + 3 \cdot (\overset{3}{W}\overline{1}) \cdot v^{\frac{7}{\overline{3}}}$$

und mit dieser ist folgende ganz gleichbedeutend

$$u = v + 2 \cdot v^2 + 3 \cdot (\overset{3}{W}\overline{1}) \cdot v^{\frac{7}{3}}$$

3) Seite 61 steht die aus einer ungesonderten Function entwickelte $\frac{n \,.\, (n + 1)}{1 \,.\, 2}$ förmige Reihe

$$\text{V)}\quad u = A \cdot x^{\frac{2}{\overline{n+1}}} + R_1$$

wo der Coefficient A ein $\frac{n \,.\, (n + 1)}{1 \,.\, 2}$ förmiger Ausdruck ist, und die Potenz $x^{\frac{2}{\overline{n+1}}}$ entweder $(n + 1)$ oder $\frac{n + 1}{2}$ verschiedene Formen hat, je nachdem $(n + 1)$ eine ungrade oder grade Zahl ist;, und so hat es den Anschein,

als habe das erste Glied mehr als $\frac{n \cdot (n + 1)}{1 \cdot 2}$ verschiedene Formen. Es ist aber (Seite 61 — 63) nachgewiesen, dass es doch nicht mehr als $\frac{n \cdot (n + 1)}{1 \cdot 2}$ verschiedene Formen hat, und dass man statt obiger Reihe auch schreiben kann

$$u = A \cdot x^{\frac{2}{n+1}} + R_1$$

Die Reihe V) ist um so beachtenswerther, als sie ein Beispiel liefert, wo die Formen des Coefficienten andere sind, als die des Fortschreitungselementes, und doch das ganze Glied nicht mehr Formen annehmen kann, als schon dem Coefficient zukommen.

Dieses Verfahren gilt, wie gesagt, jedesmal bei Reihen, welche aus ungesonderten Functionen entwickelt sind. Kommt man aber einmal zu einer Reihe, welche auf andere Weise entstanden ist, z. B. zu folgender Reihe

$$u = A \cdot v + B \cdot v^{\frac{4}{3}} + v^{\frac{5}{3}} - v^{\frac{7}{3}}$$

wo A und B einförmig sind, und den Potenzen $v^{\frac{5}{3}}$ und $v^{\frac{7}{3}}$ die Zahl 1 als Coefficient zugedacht werden muss; und will man die Potenzen des Fortschreitungselementes nur einförmig nehmen, zugleich aber der Reihe dennoch ihre drei Formen beilegen, so muss man setzen

$$u = A \cdot v + B \cdot (1)^{\frac{4}{3}} \cdot v^{\frac{4}{3}} + (1)^{\frac{5}{4}} \cdot v^{\frac{5}{3}} - (1)^{\frac{7}{3}} \cdot v^{\frac{7}{3}}$$

In der fünften Abtheilung (Seite 69 — 131) kommt die Theorie des (bis jetzt sogenannten) Variationscalculs vor. In der Einleitung (§. 47) befindet sich die Darstellung und Vergleichung der zweierlei Aenderungen, welche eine Function erleiden kann, und die Gründe, warum man dem Zweige der Analysis, um den es sich hier handelt, eine andere Benennung geben müsse. Sodann kommt das System, nach welchem er vorgetragen werden soll.

Die unmittelbaren reinen Mutationen (Seite 69 — 97) habe ich nicht ganz nach der *Euler-Lagrange'schen* Weise vorgetragen. Nach letzterer gilt, wie früher schon einmal angedeutet wurde, eine Function $\varphi(x)$ für unmittelbar mutirt, wenn sie in eine andere $\varphi(x, \varkappa)$ in der Weise übergeht, dass bei $\varkappa = 0$ sich $\varphi(x, \varkappa)$ auf $\varphi(x)$ zurückzieht. Mein Verfahren aber ist folgendes: Eine Function $\varphi(x)$ wird unmittelbar mutirt, wenn sie in eine andere F(x) übergeht; dann erst führe ich das Element $\varkappa$ so in F(x) ein, dass diese die Form $\varphi(x, \varkappa)$ annimmt, welche sich bei $\varkappa = 0$ auf $\varphi(x)$ zurückzieht, und bei dem passenden speciellen Werthe des $\varkappa$ wieder in F(x) übergeht.[1] Hinsichtlich der verschiedenen Arten, wie das Element $\varkappa$ in F(x) einzuführen ist, habe ich passende Regeln aufgestellt.[2] Sodann habe ich mittelst des *Maclaurin'schen* Satzes entwickelt, wodurch der unmittelbaren Mutation alle jene Vorzüge gesichert sind, die dieser Satz selbst hat. Dafür, dass eine

[1]) Eine Beurtheilung des *Euler-Lagrange'schen* Verfahrens findet man in der ersten Bemerkung, Seite 96.

[2]) Man sehe §. 56 und die Beispiele in §. 58.

noch ganz allgemeine unmittelbare Mutation nur durch eine unaufhörliche Reihe dargestellt werden könne, habe ich den Beweis geliefert.[1] Auch findet man[2] eine neue und in höchster Allgemeinheit durchgeführte Begründung der für die Mutationen in theoretischer und praktischer Beziehung so wichtigen Sätze, welche durch die Gleichungen

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{d\delta y}{dx}, \quad \delta \int_a^x y \cdot dx = \int_a^x \delta y \cdot dx, \quad \text{etc. etc.}$$

ausgesprochen sind.

Die mittelbaren reinen Mutationen (Seite 97 — 114) finden ihre Begründung in der der unmittelbaren. Desshalb habe ich hierüber nichts weiter zu berichten, als dass auch sie mittelst des *Maclaurin'schen* Satzes entwickelt worden sind, und bei diesen Entwickelungen selbst jede nur wünschbare Eleganz erreicht werden kann.

Hiermit ist die Theorie der eigentlichen Mutationen abgeschlossen. Man kann aber die Operationen noch verwickelter machen, und mit den Mutationen die Werthänderungen der nichtmutablen Veränderlichen verbinden. So gelangt man (Seite 114 — 128) zu den (von mir sogenannten) gemischten Mutationen. Diese Idee ist bis jetzt allen andern Mathematikern entgangen; und doch liefert sie die wirksamsten Mittel zur Lösung der wichtigsten Probleme. Die Werthänderungen des x werden im Differenzencalcul gewöhnlich mit x + Dx bezeichnet. Um aber die gemischten Mutationen gleichfalls auf den *Maclaurin'schen* Satz zu begründen, habe ich[3] die Werthänderungen des x durch die unaufhörliche Reihe

$$x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x + \cdots\cdots\cdots$$

dargestellt. Es ist zwar richtig, dass, wenn diese Werthänderung unabhängig ist, schon die allereinfachste Reihenform

$$x + \varkappa \cdot \vartheta x$$

genügt; wenn aber diese Werthänderung abhängig ist, so muss man obige unaufhörliche Reihe nehmen. Um nun den Calcul für alle Fälle gleichförmig zu machen, habe ich alle Entwickelungen allgemein durchgeführt. Ausserdem habe ich manches Problem[4] gelöst, wo man im Voraus gar nicht wissen kann, ob die Werthänderungen abhängig oder unabhängig, sondern wo sich erst im Laufe der Untersuchung gezeigt hat, dass dieselben in der That abhängig sind; und bei diesen Problemen wäre man in ein grosses Gedränge gekommen, wenn man nicht schon beim Anfange der Untersuchung eine in allgemeiner Form dargestellte Werthänderung angewendet hätte. In allen jenen Fällen, wo die gemischten Mutationen zwar allgemein entwickelt sind, aber dennoch die geschlossene Reihe

$$x + \varkappa \cdot \vartheta x$$

1) Man sehe §. 60. Auch vergleiche man Seite XIV dieser Vorrede.

2) Man sehe Seite 93.

3) Band I. Seite 116 und 117.

4) Band II. Zusatz 7 in Aufg. 160, Zusatz 3 in Aufg. 176, Zusatz 4 in Aufg. 178, etc.

genügt, kann man die einfachere Form sich dadurch verschaffen, dass man die übrigen Coefficienten $\vartheta^2 x$, $\vartheta^3 x$, etc. zu Null werden lässt.[1] So wie aber die gemischten Mutationen sich der Idee und Ausführung nach von den reinen unterscheiden, so musste für sie auch eine neue Bezeichnungsweise eingeführt werden, sonst wäre die ärgste Confusion der Begriffe unvermeidlich.

Die Idee der Mutationen konnte noch weiter ausgedehnt werden; und so gelangte man (Seite 128 — 131) zu den zusammengesetzten. Auch hierfür mussten eigne Bezeichnungen eingeführt werden, und zwar eine eigne für die zusammengesetzten reinen, und eine eigne für die zusammengesetzten gemischten Mutationen. Sie sind so wichtig, dass man ohne sie die schönsten und interessantesten Probleme nur höchst unvollständig auflösen könnte (man sehe Bd. II. Seite 708 die Schlussbem. zu Aufg. 282).

In der sechsten Abtheilung (Seite 132—165) befinden sich Specialitäten, welche zwar auch zur Theorie der Mutationen gerechnet werden können, aber in der vorigen Abtheilung keinen schicklichen Platz gefunden haben. Man lese das Inhaltsverzeichniss darüber nach. Besonders beachte man den Nachweis[2] der Irrthümer und Widersprüche, denen jene Lehrer und Schriftsteller nicht entgehen, welche sich begnügen, auch für eine allgemeine Mutation bloss die allereinfachste geschlossene Reihenform

$$y + \varkappa \cdot \delta y$$

oder, was dasselbe ist,

$$\varphi(x \cdot \cdot \cdot \cdot w) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x \cdot \cdot \cdot \cdot w)$$

zu setzen.

Die siebente Abtheilung (Seite 165—356) enthält eine auf die Theorie der Mutationen gegründete Lehre des Grössten und Kleinsten und andere damit zusammenhangende Untersuchungen.

In der Einleitung (Seite 165 — 171) werden zweierlei ausgezeichnete Zustände unterschieden. Die einen sind die, welche einen bestimmten Werth haben, und Maximum-werth, Minimum-werth, Gränz-werth, Einzel-werth heissen. Die andern sind die, welche mit veränderlichen Elementen versehen sind, bei jedem Werthe dieser Veränderlichen die Eigenschaft eines Grössten, Kleinsten, etc. haben und behalten, und von mir Maximum-stand, Minimum-stand, etc. genannt werden.

Indem ich nun in das Einzelne eingehe, halte auch ich mich an *Euler's* Vorgang, und unterscheide dreierlei Ausdrücke.

Zur ersten Art (Seite 171 — 231) gehören diejenigen, die aus mutablen und nichtmutablen Veränderlichen zusammengesetzte Urfunctionen sind, und wo für die mutablen Veränderlichen bestimmte Functionen gesucht werden sollen. Der Umstand, dass Functionen gesucht werden, bringt mit sich, dass dergleichen Probleme zu den Anwendungen der Mutationen gehören; und wer nicht ganz damit übereinstimmt, den verweise ich auf

[1]) Man sehe den Schluss des §. 77 und 78; ferner Aufg. 2 und Aufg. 16.

[2]) Man sehe §. 110, Seite 163 – 165.

eine Gattung von Untersuchungen und Aufgaben, welche hier in diesem Buche zum ersten Male vorkommt.[1]

Zur zweiten Art (Seite 231—274) gehören diejenigen Ausdrücke, in welchen auch Differentiale vorkommen. Ich habe schon einmal erwähnt, dass *Lagrange*[2] das Vorhandensein solcher Probleme nur angedeutet habe, und dass sie erst von *Ohm*[3] ausführlicher behandelt worden seien. Die Untersuchungen haben an und für sich nichts Schwieriges; doch habe ich auch hier Gelegenheit gehabt, manche auf eigenthümliche Weise zu behandeln und durchzuführen.[4]

Zur dritten Art (Seite 274—356) gehören diejenigen Ausdrücke, wo Integrale vorkommen. Obgleich, wie schon öfters erwähnt, dergleichen sich am frühesten dargeboten haben; so habe ich die betreffende Theorie doch in einem Zustande angetroffen, welcher mir noch Vieles zu thun übrig liess. Ich habe für gut gefunden, in der Theorie des Grössten und Kleinsten nur diejenigen Untersuchungen vorzutragen, welche sich auf einfache Integrale beziehen, dagegen diejenigen, welche sich auf zweifache, dreifache, etc. Integrale beziehen, später mit den zugehörigen Aufgaben zu verbinden. Sonach habe ich hier an dieser Stelle auch nur erstere Untersuchungen zu berühren.

Wenn man aus dem Ausdrucke $U = \int_a^\alpha V \,.\, dx$ den ersten Mutationscoefficient $\delta U = \int_a^\alpha \delta V \,.\, dx$ hergestellt hat, dann kann man soviele theilweisen Integrationen ausführen, bis endlich unter dem Integralzeichen kein Veränderlicher mehr den beiden durch d und δ angezeigten Operationen zugleich unterworfen ist. Die ursprüngliche Form des δU ist bis jetzt von Niemand untersucht worden. Dieses ist aber eine Einseitigkeit, wie an folgendem Beispiele gezeigt werden soll.

Man sucht für y eine solche Function von x, dass das Integral

$$U = \int_a^\alpha \left(y^2 - 2xy + 2 \cdot \frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man mutire, so gibt sich

$$\text{I)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \left(2(y - x) \cdot \delta y + 2 \cdot (1 - p) \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx$$

Man forme um, so bekommt man

1) Man sehe die Untersuchungen 20—23 in Bd. I. Seite 218—231, und die Aufgaben 55—60 in Bd. I. Seite 469—480.

2) Théorie des fonctions analytiques. Seconde partie, chap. XI, Nro. 59 und 60. Zweite Ausgabe.

3) In seiner Lehre des Grössten und Kleinsten. Seite 208—244.

4) Man sehe die Untersuchungen 28—47 (Bd. I. Seite 251, etc.), und vergleiche sie mit denen, welche sich an der so eben citirten Stelle der *Ohm'schen* Schrift befinden.

$$\text{II)}\quad \delta U = 2(1-p)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - 2(1-p)_a \cdot \delta y_a + \int_a^\alpha 2\left(y - x + \frac{d^2y}{dx^2}\right) \cdot \delta y \cdot dx$$

Diese beiden (in I und II aufgestellten) Formen des δU sind dem Werthe nach einander vollkommen gleich. Welche aber soll man nehmen, um das gesuchte Grösste oder Kleinste zu finden? — Alle bisherigen Theorien entscheiden sich einstimmig für die zweite Form, und lassen die erste ganz unberücksichtigt; aber den Beweis sind sie schuldig geblieben. Da ich nun eben so wenig einen Beweis aufstellen kann, als meine Vorgänger; so untersuche ich beide Formen, und das Ergebniss ist folgendes:

α) Aus der ersten Form, wenn sie zu einem Resultate führt, ergibt sich eine von den Gränzen unabhängige Function; dagegen

β) aus der zweiten Form kann sich nur eine von den Gränzen abhängige Function ergeben.

Dieses mag jetzt ausgeführt werden.

A) Untersuchung der ersten Form des δU.

Aus I folgen gleichzeitig die beiden identischen Gleichungen

$$\text{III)}\quad y - x = 0, \qquad \text{und} \qquad \text{IV)}\quad 1 - p = 0$$

Die Function, welche diesen beiden Gleichungen zugleich genügt, ist

$$\text{V)}\quad y = x$$

und somit bekommt man

$$\text{VI)}\quad U = \frac{\alpha}{3}(3 - \alpha^2) - \frac{a}{3}(3 - a^2)$$

Um zu untersuchen, ob dieser Ausdruck ein Grösstes oder Kleinstes sei, mutire man II noch einmal; und wenn man die Gleichungen III und IV beachtet, so bleibt nur

$$\text{VII)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left(2 \cdot \delta y^2 - 2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx$$

Man forme um, so bekommt man (nach Bd. I. Seite 284—287)

$$\text{VIII)}\quad \delta^2 U = 2 \cdot \operatorname{tg}(m + \alpha) \cdot \delta y_\alpha^2 - 2 \cdot \operatorname{tg}(m + a) \cdot \delta y_a^2$$
$$- 2 \cdot \int_a^\alpha \left(\operatorname{tg}(m + x) \cdot \delta y + \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Der Werth dieses Ausdruckes ist bekanntlich (Bd. I. Seite 285, etc.) unabhängig von den beliebigen Werthen, die man dem Constanten m beilegt. Man lege also dem Constanten m einen solchen Werth bei, dass die Gleichung

$$\text{IX)}\quad 2 \cdot \operatorname{tg}(m + \alpha) \cdot \delta y_\alpha^2 - 2 \cdot \operatorname{tg}(m + a) \cdot \delta y_a^2 = 0$$

stattfindet. Dabei reducirt sich VIII auf

$$\text{X)}\quad \delta^2 U = -2 \cdot \int_a^\alpha \left(\operatorname{tg}(m + x) \cdot \delta y + \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Gleichung IX ist gleichbedeutend mit folgender

$$\text{XI)}\quad \frac{\operatorname{tg}m + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}m \cdot \operatorname{tg}\alpha} \cdot \delta y_\alpha^2 - \frac{\operatorname{tg}m + \operatorname{tg}a}{1 - \operatorname{tg}m \cdot \operatorname{tg}a} \cdot \delta y_a^2 = 0$$

und Gleichung X ist gleichbedeutend mit folgender

$$\text{XII)}\quad \delta^2 U = -2 \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{\operatorname{tg} m + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} m \cdot \operatorname{tg} x} \cdot \delta y + \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Jetzt hat man tgm aus XI zu bestimmen, und den sich ergebenden Ausdruck in XII zu substituiren. Doch dieses ist nicht nöthig; man erkennt schon, dass das in XII befindliche $\delta^2 U$ unter allen Umständen negativ bleibt, und die von den Gränzen unabhängige Function $y = x$ den Ausdruck VI zu einem Grössten gemacht hat.

B) Untersuchung der zweiten Form des δU.

Daraus folgt zuerst die Hauptgleichung

$$y - x + \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

und die Gränzengleichung

$$(1 - p)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - (1 - p)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Hier bekommt man eine von den Gränzen abhängige Function, welche aber nicht aufgesucht werden soll, weil grade dieses Geschäft bisher bei allen derartigen Aufgaben ausgeführt worden ist.

Nun kommt die Frage: Warum haben die Mathematiker die erste Form des δU bisher keines Blickes gewürdigt? — Die Antwort ist folgende: Wären sie mit jener grossen Klasse von Aufgaben, welche in Bd. II. Seite 1 bis 211 vertreten ist, und wo gewöhnlich eine und dieselbe Function mehrere Gleichungen zugleich erfüllen muss, näher vertraut gewesen; so wären sie auch auf den Gedanken gekommen, zu untersuchen, ob die erste Form des δU zu einem Resultate führe oder nicht. Die Thatsache aber, dass diese erste Form nicht immer zu einem Resultate führt, berechtigt keineswegs zu der Bequemlichkeit, dieselbe ganz unberücksichtigt zu lassen, und nur die zweite Form zu untersuchen.

Was aber von der ersten Form des δU in dem soeben aufgestellten einfachen Beispiele gilt, gilt natürlich auch in solchen Beispielen, wo höhere (totale oder partielle) Differentialquotienten vorkommen, d. h. aus der ersten Form des δU, wenn sie zu einem Resultate führt, gibt sich eine von den Gränzen unabhängige, dagegen aus der zweiten Form eine von den Gränzen abhängige Function.

Wenn ein Integral $U = \int_a^\alpha V \cdot dx$ von zwei Functionen y und z zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande gemacht werden soll, und zwischen y und z eine Bedingungsgleichung, sei sie eine Urgleichung oder Differentialgleichung, stattfindet; so ist die Behandlung der Gränzengleichung und die Herstellung des Prüfungsmittels gewöhnlich mit Schwierigkeiten verbunden, zu deren Erledigung bis jetzt soviel wie nichts geschehen ist. Man findet sie aber alle von mir erledigt.[1]

[1]) Man sehe Bd. I. Seite 327 und Seite 316 – 321, besonders die Anmerkung auf Seite 321. Ferner sehe man Bd. II. Seite 361—363, 365, 395 – 398, etc. etc.

Die Probleme, wo auch die Gränzelemente Werthänderungen erleiden, habe ich mittelst der (von mir sogenannten) gemischten Mutationen gelöst, und dadurch erst das wahre Licht über dergleichen Untersuchungen verbreitet.[1] Allen meinen Vorgängern ist es, wie gesagt, entgangen, zwischen Mutation und Werthänderung zu unterscheiden; und so sind dieselben auch nicht in den Fall gekommen, neben der für die Mutationen bereits eingeführten Bezeichnung noch eine weitere für die Werthänderungen geltende einzuführen. Wenn ihnen nun ein Problem vorkam, zu dessen Lösung die Vereinigung beider Begriffe nöthig ist; so haben sie auch da Mutationen angewendet, wo Werthänderungen hätten angewendet werden sollen, sie haben also auch da das Zeichen der Mutationen gesetzt, wo ich das der Werthänderungen setze. Sowie aber zwischen dem Begriffe einer Mutation und dem einer blossen Werthänderung ein wesentlicher Unterschied besteht, so ist auch die Behandlungsweise beider wesentlich verschieden; und in dieser Beziehung verweise ich auf die zwei letzten Aufgaben (Nr. 287 und 288), welche ganz vorzüglich geeignet sind, die Verschiedenheit der Behandlungsweise vor die Anschauung zu führen.

Die bisher üblichen zwei Methoden zur Auflösung der (von *Euler*) sogenannten relativen Grössten und Kleinsten leiden, wie ich[2] nachgewiesen habe, an bedeutenden Mängeln. Ich habe dafür eine andere Methode aufgestellt[3], welche auf die gemischten Mutationen gegründet ist, und in jeder Beziehung alle Wünsche befriedigen kann.

Von den theoretischen Untersuchungen, welche sich auf zweifache, dreifache, etc. Integrale beziehen, wird, weil sie sich bei den zugehörigen Aufgaben befinden, später an der geeigneten Stelle die Rede sein.

Der praktische Theil, welcher Aufgaben über das Grösste und Kleinste enthält, musste ebenso, wie die betreffende Theorie, in drei Abtheilungen gebracht werden.

In der ersten Abtheilung (Bd. I. S. 327—480) kommen 60 Aufgaben vor, welche auf Ausdrücke führen, die wirkliche Urfunctionen sind. Dergleichen Aufgaben findet man hier zum ersten Male. Weil bei ihnen eine Function, eine Curve, eine Fläche, etc. gesucht wird; so gehören, wie schon einmal bemerkt, auch sie zur Anwendung des (bis jetzt sogenannten) Variationscalcul's. Die meiste Beachtung mögen die sechs letzten (Nr. 55 bis 60) verdienen.

Besonders vollständig sind diejenigen behandelt, welche auf ungesonderte Gleichungen führen. Die dabei nöthigen Reihenentwickelungen haben öfters mit den grössten Schwierigkeiten zu kämpfen. Ich habe dafür gesorgt, dass man diese kennen lerne, aber auch erledigt finde. An andern Orten wird man sich vergeblich nach dergleichen Reihenentwicklungen umschauen; und doch kann ohne sie kein Fall, bei welchen einmal Null in den Nenner

1) Man sehe Bd. I. Seite 330 - 339.
2) Erster theoretischer Nachtrag. Bd. II. Seite 740 - 763.
3) Man sehe Bd. I. §. 265 - 269, Seite 339 - 356.

kommt, vollständig untersucht werden. (Man vergleiche die Aufgaben 18 bis 23, 34 bis 36, und vorzüglich 53.)

Man hat bis jetzt übersehen, dass man bei Herstellung des Prüfungsmittels sich überzeugen müsse, ob alle (wenn auch unendlichvielen) Glieder der Gesammtmutation reell bleiben. Bleiben nemlich alle reell, und ist jedes folgende Glied gegen das vorhergehende im Momente des Verschwindens befindlich; so hangt die Positivität oder Negativität der ganzen Reihe vom ersten Gliede ab, und es existirt ein Grösstes oder Kleinstes, je nachdem das erste Glied beständig negativ oder positiv bleibt. Wird aber ein wenn auch noch so spätes Glied der Gesammtmutation imaginär, so kommt folgender Satz zur Anwendung:

„Das Imaginäre und Reelle können weder zusammen addirt noch von„einander subtrahirt, desshalb kann auch das eine nicht gegen das andere „in den Moment des Verschwindens gesetzt werden.“

Eine Reihe gilt also nicht für reell, sobald ein wenn auch noch so spätes Glied imaginär wird; und dabei existirt weder ein Grösstes noch ein Kleinstes. In dieser Beziehung vergleiche man die Aufgaben 11, 12 und 15. In den Aufgaben 11 und 15 ist $\delta U = 0$ und $\delta^2 U = 6 . \delta y^2$. In Aufgabe 12 dagegen ist $\delta U = 0$, $\delta^2 U = 0$, $\delta^3 U = 0$ und $\delta^4 U = 24 . \delta y^4$. Wenn man nun um die folgenden Glieder sich nicht weiter bekümmert, so kann man allerdings zu der Meinung kommen, dass ein Minimum-stand existire, während in der That ein Gränzstand stattfindet.

Alle Ausdrücke, die man bis jetzt für das Prüfungsmittel aufgestellt, sind hinsichtlich der Dimensionen des Fortschreitungselementes homogen gewesen. Es gibt aber auch Fälle, wo diese Homogenität nicht stattfindet. So z. B. steht in Aufgabe 26 (Bd. I. Seite 403) für das Prüfungsmittel folgender Ausdruck

$$\Delta U = \varkappa^2 \cdot \left(\delta y + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\right)^2$$

$$+ \varkappa^4 \cdot \left(\delta z + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 z + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 z + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\right)^4$$

d. h. die von y herrührende Mutation kommt in der zweiten Potenz, dagegen die von z herrührende kommt in der vierten Potenz vor; und dabei findet ein Minimum-stand statt. Ferner in Aufgabe 27 (Seite 405, Gleichung VI) steht

$$\Delta U = h^{\frac{2}{3}} \cdot \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\delta y + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 z + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$+ \left(2\sqrt{ax} + \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\right)^2 \cdot \varkappa^2 \cdot \left(\delta z + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 z + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\right)^2$$

Auch hier kommen die von y und z herrührenden Mutationen in verschiedenen Dimensionen vor; und es findet wieder ein Minimum-stand statt.

Solche Erscheinungen zeigen sich gewöhnlich, wenn die zur Bestimmung der gesuchten Functionen nöthigen Gleichungen sich dadurch ergeben, dass man die Nenner zu Null werden lässt, wie in diesem Buche an sehr vielen Stellen geschehen ist.

Die Form $\frac{0}{0}$ kommt sehr häufig vor, vorzüglich in Aufgaben, welche auf ungesonderte Gleichungen führen. Ich habe den wahren Werth dieser Form durch directe Reihenentwickelung ermittelt, ein Verfahren, welches jedesmal zum Ziele führt.[1]

In der zweiten Abtheilung (Bd. II. S. 1—211) kommen 93 Aufgaben vor, welche auf Ausdrücke führen, wo auch Differentiale eingehen. Aufgaben dieser Art existirten früher nur folgende vier:

Nr. 72, welche von *Lagrange* herstammt.[2]

Nr. 68, 95 und 96, welche von *Ohm* herstammen.[3] Nr. 68 ist die einfachste, die von dieser Art möglich ist. Bei Nr. 95 und 96 hat der Urheber nur den ersten und einfachsten Fall behandelt; die übrigen und grade schwierigeren Fälle habe ich hinzugefügt.

Hiermit erkennt man, dass, eine Kleinigkeit abgerechnet, der Inhalt dieser ganzen Abtheilung von mir geschaffen ist. Man wird daselbst viele interessante Aufgaben finden, wo schwierige Integrationen vorkommen. Man wird aber auch Aufgaben finden, welche ich zwar gehörig in Ansatz gebracht, jedoch, um eine allzugrosse Ausdehnung des Buches zu vermeiden, nicht vollständig durchgeführt habe. Diese habe ich desshalb mitgetheilt, weil es jedenfalls instructiv ist, das Vorhandensein recht vieler und verschiedenartiger Aufgaben kennen zu lernen. Der Leser kann ihre Lösung versuchen, da ihm dazu Anleitung genug gegeben ist.

In der dritten Abtheilung (Bd. II. Seite 212—739) kommen 135 Aufgaben vor, welche auf Ausdrücke führen, wo Integrale eingehen.

I. Für die Aufgaben, welche auf einfache Integrale führen, konnte ich zwei vortreffliche Vorarbeiten benützen.

Die eine ist das berühmte Werk von 1744. *Euler* hat, wie schon einmal gesagt, alle bis zu jener Zeit gelösten Aufgaben zusammen getragen, und noch mit eigenen vermehrt. Es sind aber, mit Ausnahme einer einzigen[4], nur solche, wo eine ebene Curve, oder eine einzige Function des einzigen Veränderlichen x gesucht wird. Da das Werk vor Erfindung des Variationscalcul's geschrieben worden ist, so sind die dortigen Auflösungen nur unvollständig; denn es fehlen jedesmal die Gränzengleichungen und das Prüfungsmittel. Aus diesem Werke habe ich 32 Aufgaben entnommen, und bei jeder den Ort angegeben, wo sie im Original zu finden ist.

Die zweite Vorarbeit besteht aus den in *Lagrange's* Schriften zerstreuten Aufgaben. Von diesen habe ich 14 aufgenommen, und auch dabei jedesmal den Ort angegeben, wo man sie im Original finden kann. Aber auch *Lagrange* hat bei keiner einzigen Aufgabe das Prüfungsmittel hergestellt; und was die Gränzfälle anbelangt, so hat er jedesmal nur die allereinfachsten

[1]) Man vergleiche wegen dieser Ermittelung die Aufgaben 18, 20, 33, 34, etc., besonders aber 53.

[2]) Théorie des fonctions analytiques. Seconde partie; chap. XI; Nr. 59. Zweite Ausgabe.

[3]) System der Mathematik. Berlin 1833. Bd. VII. Zweiter Anhang, Seite 47—53, sodann Seite 58 und 59.

[4]) Man sehe die Schlussbemerkung in Bd. II. Seite 364.

vorgenommen, und durchaus keinen, wo zwischen den Gränzordinaten noch eine Bedingungsgleichung stattfindet.

Die übrigen Schriftsteller haben den Stand der Aufgaben, um die es sich hier handelt, nicht gefördert. Sie haben *Euler's* Werk von 1744 als Fundgrube benützt, und den Inhalt desselben nach der *Lagrange'schen* Methode vorzutragen gesucht. Ausserdem haben sie die von *Lagrange* selbst herrührenden Aufgaben gradezu in der ursprünglichen Gestalt aufgenommen. Ja Viele haben es sich als Verdienst angerechnet, veränderte und oft sehr unzweckmässige Bezeichnungen einzuführen. Dabei sind aber alle, was Vollständigkeit und Manichfaltigkeit betrifft, um keinen Schritt weiter gekommen, als *Lagrange*.

Ich hatte also auch hier noch Vieles nachzuholen und zu ergänzen; z. B.: ich habe fast überall mehrere verschiedene Gränzfälle aufgestellt, namentlich solche, wo zwischen den Gränzordinaten noch Bedingungsgleichungen stattfinden. Dadurch wurde in die einzelnen Aufgaben mehr Manichfaltigkeit gebracht.

Man findet hier auch solche Fälle behandelt, wo sich die gesuchte Function aus einem zu Null gewordenen Nenner ergibt.[1]

Diejenigen Aufgaben, wo die Gränzelemente Werthänderungen erleiden, habe ich mit viel grösserer Einfachheit und zugleich mit mehr Verschiedenartigkeit der Gränzbedingungen durchgeführt, als es früher geschehen ist.[2] Man beachte namentlich die Aufgaben 178, 179 und 187.

Meistentheils habe ich das Prüfungsmittel hergestellt. Dieses ist in keiner andern Schrift bei einer speciellen Aufgabe geschehen. Die dabei nöthigen Transformationen verlangen sehr viele Umsicht, besonders dann, wenn auch die Gränzelemente veränderlich sind.

Zu den Aufgaben, wo räumliche Curven gesucht werden, deren *Euler* eine einzige[3], und *Lagrange* nur einige und zwar nur die allereinfachsten aufgestellt hat, habe ich eine grosse Anzahl neuer hinzugefügt[4], namentlich solcher, wo noch identische Bedingungsgleichungen zu erfüllen sind.

Man hat bis jetzt nur die umgeformte Mutation der ersten Ordnung berücksichtigt. Ich habe auch jedesmal nachgesehen, ob aus der ursprünglichen Form sich ein brauchbares Resultat ergeben kann oder nicht.

Man wird auch eine Aufgabe finden, wo ein wiederholendes Integral vorkommt (Aufg. 248).

Bei Producten und Quotienten bestimmter Integrale habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass die Aufgabe oft einen Widerspruch in sich selbst

[1]) Man sehe die Aufgaben 154, 163 – 165, 172.

[2]) Man sehe z. B. die Aufgaben 156, 157, 160, 161, 176 – 180, 187, 196, 197, 199, 215, 218, und die beiden Aufgaben in Bd. II. Seite 753 und 757. In den Aufgaben 157 und 197 sind die Gränzelemente schon im Differentialcoefficient enthalten. Die Aufg. 187 ist desshalb interessant, weil eine identische Bedingungsgleichung dabei vorkommt; dasselbe findet statt bei der Aufgabe auf Seite 757.

[3]) Man sehe die Schlussbemerkung in Bd. II. Seite 364.

[4]) Man sehe z. B. die Aufgaben 181 – 193, 202, 203, 206, 207, 228, 245 – 247. Die Aufgabe 186, wo die kürzeste Linie auf der Kugelfläche gefordert wird, kommt zwar auch schon bei vielen andern Schriftstellern vor, allein in einem sehr mangelhaften Zustande; und darüber vergleiche man die vier letzten Punkte der Bemerkung in Bd. II. Seite 364.

trägt, während das Prüfungsmittel dennoch allen Bedingungen eines Grössten oder Kleinsten genügt.[1]

Vieles, was aber mehr auf einzelne Aufgaben sich bezieht, kann hier nicht namentlich aufgeführt werden. Manches ist in den Schlussbemerkungen erwähnt; und dass ich überall mehr nach Manichfaltigkeit, Vollständigkeit und Gründlichkeit gestrebt habe, als meine Vorgänger, das lässt sich auf den ersten Blick erkennen.

II. Ich komme nun zu den Ausdrücken, welche eine mehrfache Integration erfordern. Die betreffenden theoretischen Untersuchungen habe ich im ersten Bande[2] nicht mitgetheilt; desshalb kommen hier theoretische Untersuchungen und Aufgaben untereinander vor.

Die theoretischen Untersuchungen, wo alle Integrationsgränzen constant sind, habe ich überall nur in dem Zustande angetroffen, wie sie schon in *Euler's* Abhandlung von 1772 vorkommen.[3] Dieselben habe ich (in den Aufgaben 251, 252, 265 und 271) so eingerichtet, wie es die Wissenschaft erfordert, und habe sie noch mit andern (in den Aufgaben 272—275) vermehrt. Besonders beachtenswerth ist Aufgabe 275, wo ich (Seite 671) eine neue Vorschrift mitgetheilt habe für den Fall, dass eine Bedingungsgleichung vorhanden ist.

Mit den theoretischen Untersuchungen, wo die Gränzelemente nicht alle constant sind, haben sich, wie bereits gemeldet, *Ohm*, *Poisson* und *Ostrogradsky* beschäftigt.[4] Ich habe ihre Formeln in einer besseren und brauchbareren Gestalt dargestellt[5], und erst an meinen Formeln kann man erkennen, wie die Gränzengleichung in jedem einzelnen Falle behandelt werden muss. Besonders beachte man meine Formeln in Aufgabe 284 und 287.

Specielle Aufgaben, wo eine bestimmte Function oder eine bestimmte Fläche gesucht wird, hat es bis jetzt nur zwei gegeben, welche von *Lagrange* herstammen.[6] Diese sind so, wie sie ihr Urheber durchgeführt hat, in alle Schriften, wo man sie vorfindet, übergegangen. Die übrigen 25 speciellen Aufgaben habe erst ich gebildet und durchgeführt. Ich habe bei ihnen nicht nur

1) verschiedene Gränzfälle berücksichtigt, was bis jetzt nie geschehen ist, sondern ich habe auch

2) zum ersten Male die Untersuchung zur Herstellung des Prüfungs-

1) Man sehe z. B. die Untersuchungen in Bd. II. Seite 530, 538, und an andern Orten.

2) Man sehe Bd. I. Seite 356.

3) Man sehe die zwei Schlussbemerkungen in Bd. II. Seite 574 und 633.

4) Man sehe diese Vorrede Seite XV und XVII. Ferner die soeben citirten zwei Schlussbemerkungen.

5) Man sehe die Aufgaben 277, 280, 284, 285, 287, und vergleiche z. B. den in *Ohm's* Buche von 1825, Seite 306 (ganz unten) für ∂U aufgestellten Ausdruck mit jenem, welchen ich in Bd. II. Seite 676 aufgestellt habe. Auch beachte man die Gränzengleichung, welche sich in *Ohm's* Buche Seite 308 (ganz unten) befindet, und mit II. (𝔅) bezeichnet ist. Diese Gleichung hat nicht die richtige Form, weil ihr Urheber nicht alle nach x möglichen Integrationen ausgeführt hat, wodurch namentlich zu der von jedem Integralzeichen freien Partie noch andere Theilsätze hinzugetreten wären. Dergleichen Integrationen habe ich z. B. in Bd. II. Seite 714 und 715 ausgeführt, und so meinem auf Seite 716 stehenden Ausdrucke die richtige Form gegeben. Wegen *Poisson* und *Ostrogradsky* lese man, was ich in Bd. II. Seite 737 und 738 bemerkt habe.

6) Es sind die Aufg. 261 und 262. Man sehe die zugehörigen Schlussbemerkungen.

mittels ausgeführt, mittelst dessen man bei doppelten, dreifachen, etc. Integralen erkennt, ob ein Grösstes oder Kleinstes oder keines von beiden existirt.[1]

Besonders interessant wird man die Aufgaben 281, 282, 283, 286, 288 finden; denn sie lassen eine grosse Verschiedenartigkeit der Gränzbedingungen zu, und führen auf Eigenheiten, welche für den, der zum ersten Male auf dergleichen stösst, nicht so leicht zu überwinden sind.

Zuletzt kommen noch zwei Anhänge. In dem ersten habe ich nachgewiesen, dass die beiden, seither zur Auflösung der (von *Euler* sogenannten) relativen Grössten oder Kleinsten befolgten, Methoden mangelhaft sind, und habe dafür eine andere aufgestellt. Man beachte die daselbst (Seite 752—763) befindlichen zwei Beispiele, wo auch die Gränzelemente veränderlich sind. Im zweiten Anhange habe ich einige Aufgaben dadurch gelöst, dass ich für die unmittelbaren Mutationen ganz allgemeine Reihenformen annahm.

Nach Aufzählung dieser Einzelheiten empfehle ich die vorliegende Arbeit den Sachkennern zu strenger Prüfung. Mein Streben, die Ausbildung der Wissenschaft zu fördern und den Kreis ihrer Anwendungen zu erweitern, wird, davon bin ich überzeugt, nicht mit Missfallen aufgenommen werden.

[1]) Man sehe Bd. II. Aufgabe 251—257; sodann auch Seite 631, 635, 661, 663, 665.

Der Verfasser.

I. Sätze, welche in den Differentialcalcul gehören.

§. 1. Euler und Andere haben die totalen und partiellen Differentialquotienten dadurch unterschieden, dass sie letztere in Klammern einschlossen. Andere Analytiker liessen die Klammern weg, und überliessen es so der Fertigkeit des Lesers, zu unterscheiden, ob von totalen oder partiellen Differentialquotienten die Rede sei. Diese Gleichgiltigkeit war aber nicht von Nutzen.

Bei den Fortschritten der Wissenschaft in neuester Zeit konnten aber auch die Klammern nicht mehr genügen, und man sah sich nach einer andern Bezeichnungsweise um, welche mehr leiste, und um so willkommener sein musste, als die Klammern noch zu sehr vielen andern Zwecken im Differentialcalcul nöthig sind. Eine zweckmässige Bezeichnung der partiellen Differentiale ist die, welche darin besteht, dass man hinter d das Element setzt, nach welchem differentiirt werden soll.

Ist z. B. $u = \psi(x, w)$ gegeben, so ist

$$du = d_x u + d_w u$$

$$d^2u = d_x^2 u + 2 \cdot d_x d_w u + d_w^2 u$$

$$d^3u = d_x^3 u + 3 \cdot d_x^2 d_w u + 3 \cdot d_x d_w^2 u + d_w^3 u$$

etc. etc.

Hier ist also $d_x u$ dasselbe, was bei Euler $\left(\frac{du}{dx}\right).dx$ ist; ebenso ist $d_w u$ dasselbe, was bei Euler $\left(\frac{du}{dw}\right).dw$ ist.

Ist $u = \psi(x, w, z)$ gegeben, so bezeichnet man durch $d_x^m d_w^n d_z^p u$ dasselbe, was Euler durch $\left(\frac{d^{m+n+p}u}{dx^m \,.\, dw^n \,.\, dz^p}\right) \cdot dx^m \,.\, dw^n \,.\, dz^p$ bezeichnet. Ebenso ist der Quotient $\frac{d_x^m d_w^n d_z^p u}{dx^m . dw^n . dz^p}$ dasselbe, was bei Euler durch $\left(\frac{d^{m+n+p}u}{dx^m \,.\, dw^n \,.\, dx^p}\right)$ bezeichnet wird.

Und so fort.

Ist wieder $u = \psi(x, w)$ gegeben, und sind x und w von einem andern Elemente v abhängig; so sind bekanntlich die Differentiale von x und w selbst veränderlich. Ihre Abhängigkeit von v kann, wenn man will, dadurch bemerkbar gemacht werden, dass man v unten anhängt, und demnach schreibt

$$du = \frac{d_x u}{dx} \cdot dx_v + \frac{d_w u}{dw} \cdot dw_v$$

$$d^2u = \frac{d_x^2 u}{dx^2} \cdot dx_v^2 + 2 \cdot \frac{d_x d_w u}{dx \,.\, dw} \cdot dx_v \,.\, dw_v + \frac{d_w^2 u}{dw^2} \cdot dw_v^2$$
$$+ \frac{d_x u}{dx} \cdot d^2x_v + \frac{d_w u}{dw} \cdot d^2w_v$$

$$d^3u = \frac{d_x^3 u}{dx^3} \cdot dx_v^3 + 3 \,.\, \frac{d_x^2 d_w u}{dx^2 \,.\, dw} \cdot dx_v^2 \,.\, dw_v + 3 \,.\, \frac{d_x d_w^2 u}{dx \,.\, dw^2} \cdot dx_v \,.\, dw_v^2$$
$$+ \frac{d_w^3 u}{dw^3} \cdot dw_v^3 + 3 \,.\, \frac{d_x^2 u}{dx^2} \,.\, dx_v \,.\, d^2x_v + 3 \,.\, \frac{d_x d_w u}{dx \,.\, dw} \,.\, d^2x_v \,.\, dw_v$$
$$+ 3 \cdot \frac{d_x d_w u}{dx \,.\, dw} \cdot dx_v \,.\, d^2w_v + 3 \,.\, \frac{d_w^2 u}{dw^2} \,.\, dw_v \,.\, d^2w_v + \frac{d_x u}{dx} \cdot d^3x_v$$
$$+ \frac{d_w u}{dw} \,.\, d^3w_v$$

etc., etc.

Sind x und w von zwei Elementen v und z abhängig, so kann man dieses, wenn man will, auf folgende Weise bemerkbar machen:

$$d\mathfrak{v} = \frac{d_x\mathfrak{v}}{dx} \cdot dx_{v,z} + \frac{d_w\mathfrak{v}}{dw} \cdot dw_{v,z}$$

etc., etc.

So oft nun in dieser Schrift $\frac{d\mathfrak{v}}{dx}$ oder $\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dx}\right)$ vorkommt, so ist kein Unterschied zu machen, sondern man hat jedesmal den totalen Differentialquotienten darunter zu verstehen. Hat man einen ausgedehnten Ausdruck zu differentiiren, so kann man zur Bequemlichkeit die totalen Differentialquotienten darstellen durch

$$\frac{1}{dx} \cdot d(P, Q, R \ldots), \qquad \frac{1}{dx^2} \cdot d^2(P, Q, R \ldots), \text{ etc.};$$

und die partiellen kann man darstellen durch

$$\frac{1}{dx} \cdot d_x(P, Q, R \ldots), \qquad \frac{1}{dx^2} \cdot d_x^2(P, Q, R \ldots), \qquad \frac{1}{dx^m \cdot dw^n} \cdot d_x^m d_w^n (P, Q, R \ldots),$$

und so fort.

§. 2. Ist $\mathfrak{v} = \psi(x, y)$ gegeben, während noch gleichzeitig besteht $y = \varphi(x)$, so ist $\mathfrak{v}$ nur von x abhängig, was dadurch erreicht wird, dass man y aus $\mathfrak{v} = \psi(x, y)$ eliminirt. Hat man aber die totalen Differentiale nach x zu nehmen, und will man y selbst nicht aus $\psi(x, y)$ eliminiren, so differentiirt man $\mathfrak{v}$ bekanntlich in der Weise, dass die Differentiale von y als veränderlich behandelt und sodann eliminirt werden. Man bekommt nun aus $\mathfrak{v} = \psi(x, y)$

$$d\mathfrak{v} = d_x\mathfrak{v} + \frac{d_y\mathfrak{v}}{dy} \cdot dy_x$$

$$d^2\mathfrak{v} = d_x^2\mathfrak{v} + 2 \cdot \frac{d_x d_y\mathfrak{v}}{dy} \cdot dy_x + \frac{d_y^2\mathfrak{v}}{dy^2} \cdot dy_x^2 + \frac{d_y\mathfrak{v}}{dy} \cdot d^2y_x$$

etc., etc.

Daraus ergeben sich dann die totalen Differentialquotienten

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dx} = \frac{d_x\mathfrak{v}}{dx} + \frac{d_y\mathfrak{v}}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2\mathfrak{v}}{dx^2} = \frac{d_x^2\mathfrak{v}}{dx^2} + 2 \cdot \frac{d_x d_y\mathfrak{v}}{dx \cdot dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_y^2\mathfrak{v}}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d_y\mathfrak{v}}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

etc., etc.

wo man aber an dy, d^2y, etc. die unten angehängten x wieder weggelassen hat, weil keine Zweideutigkeit mehr möglich ist, wenn dx im Nenner steht. Die Quotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc. werden aus der Function $y = \varphi(x)$ bestimmt. Wenn man aber für den Verlauf der Untersuchung bemerkbar machen will, dass die totalen Differentialquotienten $\frac{d\mathfrak{v}}{dx}, \frac{d^2\mathfrak{v}}{dx^2}$, etc. dadurch hergestellt worden sind, dass man nur die Differentiale des y, nicht aber auch y selbst eliminirt hat, so bezeichnet man dieses durch einen doppelten Bruchstrich. Dieser doppelte Bruchstrich ist aber als zusammengesetztes Zeichen sehr passend, eben weil er einen zusammengesetzten Ausdruck darstellen hilft. Man schreibt also

$$\text{I)} \quad \frac{d\mathfrak{v}}{\overline{\overline{dx}}} = \frac{d_x\mathfrak{v}}{dx} + \frac{d_y\mathfrak{v}}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\text{II)} \quad \frac{d^2\mathfrak{v}}{\overline{\overline{dx^2}}} = \frac{d_x^2\mathfrak{v}}{dx^2} + 2 \cdot \frac{d_x d_y\mathfrak{v}}{dx \cdot dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_y^2\mathfrak{v}}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d_y\mathfrak{v}}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

etc., etc.

Hat man einen ausgedehnten Ausdruck, so kann man auch hier schreiben

$$\frac{1}{\overline{\overline{dx}}} \cdot d(P, Q, R \ldots), \qquad \frac{1}{\overline{\overline{dx^2}}} \cdot d^2(P, Q, R \ldots), \text{ etc.}$$

Der doppelte Bruchstrich erinnert also daran, dass die relativ unabhängigen Veränderlichen selbst noch vorkommen, dagegen ihre Differentiale eliminirt sind.

Aus $\frac{d_x\mathfrak{v}}{dx}$ und $\frac{d_y\mathfrak{v}}{dy}$ folgt nun

$$d\left(\frac{d_x u}{dx}\right) = \frac{d_x^2 u}{dx} + \frac{d_x d_y u}{dx \,.\, dy} \,.\, dy_x$$

$$d\left(\frac{d_y u}{dy}\right) = \frac{d_x d_y u}{dy} + \frac{d_y^2 u}{dy^2} \,.\, dy_x$$

Daraus ergibt sich bezüglich

$$\text{III)}\quad \frac{d\left(\frac{d_x u}{dx}\right)}{dx} = \frac{d_x^2 u}{dx^2} + \frac{d_x d_y u}{dx \,.\, dy} \,.\, \frac{dy}{dx}$$

$$\text{IV)}\quad \frac{d\left(\frac{d_y u}{dy}\right)}{dx} = \frac{d_x d_y u}{dx \,.\, dy} + \frac{d_y^2 u}{dy^2} \,.\, \frac{dy}{dx}$$

Differentiirt man Gleichung I nach y, so bekommt man

$$\text{V)}\quad \frac{d_y\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy} = \frac{d_x d_y u}{dx \,.\, dy} + \frac{d_y^2 u}{dy^2} \,.\, \frac{dy}{dx}$$

Aus IV und V folgt also

$$\text{VI)}\quad \frac{d\left(\frac{d_y u}{dy}\right)}{dx} = \frac{d_y\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}$$

Ein wichtiger Satz, welcher später häufige Anwendung findet, und sich leicht auf höhere Differentialquotienten ausdehnen lässt.

Beispiel. Aus $u = x^m \,.\, y^n$ folgt die Differentialgleichung

$$\text{I)}\quad du = m \,.\, x^{m-1} \,.\, y^n \,.\, dx + n \,.\, x^m \,.\, y^{n-1} \,.\, dy$$

Es ist also $\text{II)}\quad \frac{d_x u}{dx} = m \,.\, x^{m-1} \,.\, y^n,$

und $\text{III)}\quad \frac{d_y u}{dy} = n \,.\, x^m \,.\, y^{n-1}$

Wenn aber y auch eine Function von x ist, so folgt aus I jetzt der totale Differentialquotient

$$\text{IV)}\quad \frac{du}{dx} = m \,.\, x^{m-1} \,.\, y^n + n \,.\, x^m \,.\, y^{n-1} \,.\, \frac{dy}{dx}$$

Wenn man IV nur nach y differentiirt, so bekommt man

$$\text{V)}\quad \frac{d_y\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy} = mn \,.\, x^{m-1} \,.\, y^{n-1} + n \,.\, (n-1)\, x^m \,.\, y^{n-2} \,.\, \frac{dy}{dx}$$

Aus III folgt die Differentialgleichung

$$\text{VI)}\quad d\left(\frac{d_y u}{dy}\right) = mn \,.\, x^{m-1} \,.\, y^{n-1} \,.\, dx + n \,.\, (n-1)\, x^m \,.\, y^{n-2} \,.\, dy$$

und daraus folgt der totale Differentialquotient

$$\text{VII)}\quad \frac{d\left(\frac{d_y u}{dy}\right)}{dx} = mn \,.\, x^{m-1} \,.\, y^{n-1} + n \,.\, (n-1) \,.\, x^m \,.\, y^{n-2} \,.\, \frac{dy}{dx}$$

so dass die in V und VII gewonnenen Resultate dem durch die Gleichung

$$\frac{d\left(\frac{d_y u}{dy}\right)}{dx} = \frac{d_y\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}$$

ausgesprochenen Lehrsatze vollkommen genügen.

§. 3. Ist $u = \psi(x, y, z)$ gegeben, während noch gleichzeitig bestehen $y = \varphi'(x)$ und $z = \varphi''(x)$; so ist u nur von x abhängig, was dadurch erreicht wird, dass man y und z aus $\psi(x, y, z)$ eliminirt. Hat man aber die **totalen** Differentiale nach x zu nehmen, und will man y und z selbst nicht aus $\psi(x, y, z)$ eliminiren; so differentiirt man u bekanntlich in der Weise, dass die Differentiale von y und z als veränderlich

behandelt werden, und eliminirt, nach vorhergehendem § verfahrend, nur die Differentiale des y und des z. Sonach bekommt man

$$d\mathfrak{u} = d_x\mathfrak{u} + \frac{d_y\mathfrak{u}}{dy} \cdot dy_x + \frac{d_z\mathfrak{u}}{dz} \cdot dz_x$$

$$d^2\mathfrak{u} = d^2_x\mathfrak{u} + 2 \cdot \frac{d_x d_y \mathfrak{u}}{dy} \cdot dy_x + 2 \cdot \frac{d_x d_z \mathfrak{u}}{dz} \cdot dz_x + \frac{d^2_y\mathfrak{u}}{dy^2} \cdot dy_x^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_z \mathfrak{u}}{dy \cdot dz} \cdot dy_x \cdot dz_x$$

$$+ \frac{d^2_z\mathfrak{u}}{dz^2} \cdot dz_x^2 + \frac{d_y\mathfrak{u}}{dy} \cdot d^2y_x + \frac{d_z\mathfrak{u}}{dz} \cdot d^2z_x$$

etc., etc.

Daraus ergeben sich nun die totalen Differentialquotienten

$$\text{I)}\quad \frac{d\mathfrak{u}}{dx} = \frac{d_x\mathfrak{u}}{dx} + \frac{d_y\mathfrak{u}}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_z\mathfrak{u}}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\text{II)}\quad \frac{d^2\mathfrak{u}}{dx^2} = \frac{d^2_x\mathfrak{u}}{dx^2} + 2 \cdot \frac{d_x d_y \mathfrak{u}}{dx \cdot dy} \cdot \frac{dy}{dx} + 2 \cdot \frac{d_x d_z \mathfrak{u}}{dx \cdot dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{d^2_y\mathfrak{u}}{dy^2} \cdot \frac{dy^2}{dx^2}$$

$$+ 2 \cdot \frac{d_y d_z \mathfrak{u}}{dy \cdot dz} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{d^2_z\mathfrak{u}}{dz^2} \cdot \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{d_y\mathfrak{u}}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d_z\mathfrak{u}}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dx^2}$$

etc., etc.

Aus $\frac{d_x\mathfrak{u}}{dx}$, $\frac{d_y\mathfrak{u}}{dy}$, $\frac{d_z\mathfrak{u}}{dz}$ ergibt sich bezüglich

$$d\left(\frac{d_x\mathfrak{u}}{dx}\right) = \frac{d^2_x\mathfrak{u}}{dx} + \frac{d_x d_y \mathfrak{u}}{dx \cdot dy} \cdot dy_x + \frac{d_x d_z \mathfrak{u}}{dx \cdot dz} \cdot dz_x$$

$$d\left(\frac{d_y\mathfrak{u}}{dy}\right) = \frac{d_x d_y \mathfrak{u}}{dy} + \frac{d^2_y\mathfrak{u}}{dy^2} \cdot dy_x + \frac{d_y d_z \mathfrak{u}}{dy \cdot dz} \cdot dz_x$$

$$d\left(\frac{d_z\mathfrak{u}}{dz}\right) = \frac{d_x d_z \mathfrak{u}}{dz} + \frac{d_y d_z \mathfrak{u}}{dy \cdot dz} \cdot dy_x + \frac{d^2_z\mathfrak{u}}{dz^2} \cdot dz_x$$

Daraus folgt nun der Reihe nach

$$\text{III)}\quad \frac{d\left(\frac{d_x\mathfrak{u}}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2_x\mathfrak{u}}{dx^2} + \frac{d_x d_y \mathfrak{u}}{dx \cdot dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_x d_z \mathfrak{u}}{dx \cdot dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\text{IV)}\quad \frac{d\left(\frac{d_y\mathfrak{u}}{dy}\right)}{dx} = \frac{d_x d_y \mathfrak{u}}{dx \cdot dy} + \frac{d^2_y\mathfrak{u}}{dy^2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_y d_z \mathfrak{u}}{dy \cdot dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\text{V)}\quad \frac{d\left(\frac{d_z\mathfrak{u}}{dz}\right)}{dx} = \frac{d_x d_z \mathfrak{u}}{dx \cdot dz} + \frac{d_y d_z \mathfrak{u}}{dy \cdot dz} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d^2_z\mathfrak{u}}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Differentiirt man Gleichung I zuerst nach y und dann nach z, so bekommt man bezüglich

$$\text{VI)}\quad \frac{d_y\left(\frac{d\mathfrak{u}}{dx}\right)}{dy} = \frac{d_x d_y \mathfrak{u}}{dx \cdot dy} + \frac{d^2_y\mathfrak{u}}{dy^2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_y d_z \mathfrak{u}}{dy \cdot dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\text{VII)}\quad \frac{d_z\left(\frac{d\mathfrak{u}}{dx}\right)}{dz} = \frac{d_x d_z \mathfrak{u}}{dx \cdot dz} + \frac{d_y d_z \mathfrak{u}}{dy \cdot dz} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d^2_z\mathfrak{u}}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Aus den vier letzten Gleichungen folgt, dass hier der in vorigem § ausgesprochene Satz auf doppelte Weise stattfindet, d. h., es ist

$$\text{VIII)}\quad \frac{d\left(\frac{d_y\mathfrak{u}}{dy}\right)}{dx} = \frac{d_y\left(\frac{d\mathfrak{u}}{dx}\right)}{dy}, \text{ und }\quad \text{IX)}\quad \frac{d\left(\frac{d_z\mathfrak{u}}{dz}\right)}{dx} = \frac{d_z\left(\frac{d\mathfrak{u}}{dx}\right)}{dz}$$

Diese wichtigen Sätze, welche später häufig Anwendung finden, lassen sich leicht auf höhere Differentialquotienten ausdehnen.

Beispiel. Aus $\upsilon = x^m \cdot y^n \cdot z^p$ folgt die Differentialgleichung

I) $d\upsilon = m \cdot x^{m-1} \cdot y^n \cdot z^p \cdot dx + n \cdot x^m \cdot y^{n-1} \cdot z^p \cdot dy + p \cdot x^m \cdot y^n \cdot z^{p-1} \cdot dz$

Es ist also

II) $\frac{d_x\upsilon}{dx} = m \cdot x^{m-1} \cdot y^n \cdot z^p$, III) $\frac{d_y\upsilon}{dy} = n \cdot x^m \cdot y^{n-1} \cdot z^p$,

IV) $\frac{d_z\upsilon}{dz} = p \cdot x^m \cdot y^n \cdot z^{p-1}$.

Wenn aber y und z auch Functionen von x sind, so folgt aus I jetzt der totale Differentialquotient

V) $\frac{d\upsilon}{dx} = m \cdot x^{m-1} \cdot y^n \cdot z^p + n \cdot x^m \cdot y^{n-1} \cdot z^p \cdot \frac{dy}{dx} + p \cdot x^m \cdot y^n \cdot z^{p-1} \cdot \frac{dz}{dx}$

Differentiirt man diese Gleichung zuerst nach y, und dann nach z; so gibt sich bezüglich

$$\text{VI)}\quad \frac{d_y\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)}{dy} = mn \cdot x^{m-1} \cdot y^{n-1} \cdot z^p + n(n-1) \cdot x^m \cdot y^{n-2} \cdot z^p \cdot \frac{dy}{dx} + pn \cdot x^m \cdot y^{n-1} \cdot z^{p-1} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\text{VII)}\quad \frac{d_z\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)}{dz} = mp \cdot x^{m-1} \cdot y^n \cdot z^{p-1} + pn \cdot x^m \cdot y^{n-1} \cdot z^{p-1} \cdot \frac{dy}{dx} + p \cdot (p-1) \cdot x^m \cdot y^n \cdot z^{p-2} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Aus III und IV folgen die Differentialgleichungen

$$\text{VIII)}\quad d\left(\frac{d_y\upsilon}{dy}\right) = mn \cdot x^{m-1} \cdot y^{n-1} \cdot z^p \cdot dx + n(n-1) \cdot x^m \cdot y^{n-2} \cdot z^p \cdot dy + np \cdot x^m \cdot y^{n-1} \cdot z^{p-1} \cdot dz$$

$$\text{IX)}\quad d\left(\frac{d_z\upsilon}{dz}\right) = mp \cdot x^{m-1} \cdot y^n \cdot z^{p-1} \cdot dx + np \cdot x^m \cdot y^{n-1} \cdot z^{p-1} \cdot dy + p(p-1) \cdot x^m \cdot y^n \cdot z^{p-2} \cdot dz$$

und daraus bekommt man die totalen Differentialquotienten

$$\text{X)}\quad \frac{d\left(\frac{d_y\upsilon}{dy}\right)}{dx} = mn \cdot x^{m-1} \cdot y^{n-1} \cdot z^p + n(n-1) \cdot x^m \cdot y^{n-2} \cdot z^p \cdot \frac{dy}{dx} + np \cdot x^m \cdot y^{n-1} \cdot z^{p-1} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\text{XI)}\quad \frac{d\left(\frac{d_z\upsilon}{dz}\right)}{dx} = mp \cdot x^{m-1} \cdot y^n \cdot z^{p-1} + np \cdot x^m \cdot y^{n-1} \cdot z^{p-1} \cdot \frac{dy}{dx} + p \cdot (p-1) \cdot x^m \cdot y^n \cdot z^{p-2} \cdot \frac{dz}{dx}$$

so dass die in VI und X, sowie auch die in VII und XI gewonnenen Resultate den durch die Gleichungen

$$\frac{d\left(\frac{d_y\upsilon}{dy}\right)}{dx} = \frac{d_y\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)}{dy}, \text{ und } \frac{d\left(\frac{d_z\upsilon}{dz}\right)}{dx} = \frac{d_z\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)}{dz}$$

ausgesprochenen Lehrsätzen vollkommen genügen.

§. 4. Ist $\upsilon = \psi(x, w, y)$ gegeben, während noch gleichzeitig besteht $y = \varphi(x, w)$; so ist υ nur von x und w abhängig, was dadurch erreicht wird, dass man y aus $\psi(x, w, y)$ eliminirt. Hat man aber die vollständigen partiellen Differentiale nach x und nach w zu nehmen, und will man y selbst aus $\psi(x, w, y)$ nicht eliminiren, so differentiirt man υ bekanntlich in der Weise, dass die Differentiale von y als veränderlich behandelt werden, und eliminirt dann nur die Differentiale des y.

Aus $\upsilon = \psi(x, w, y)$ folgt nun

I) $d\upsilon = d_x\upsilon + d_w\upsilon + \frac{d_y\upsilon}{dy} \cdot dy_{x,w}$

II) $d^2\mathfrak{v} = d_x^2\mathfrak{v} + 2 \cdot d_x d_w \mathfrak{v} + d_w^2\mathfrak{v} + 2 \cdot \frac{d_x d_y \mathfrak{v}}{dy} \cdot dy_{x,w} + 2 \cdot \frac{d_w d_y \mathfrak{v}}{dy} \cdot dy_{x,w}$

$+ \frac{d_y^2\mathfrak{v}}{dy^2} \cdot dy_{x,w}^2 + \frac{d_y\mathfrak{v}}{dy} \cdot d^2y_{x,w}$

etc., etc.

wo die Differentiale $dy_{x,w}$, $d^2y_{x,w}$ etc. anzeigen, dass sie von x und w zugleich abhängig sind. Aus $y = \varphi(x, w)$ folgt aber

III) $dy = dy_{x,w} = d_x y + d_w y$

IV) $d^2y = d^2y_{x,w} = d_x^2 y + 2 \cdot d_x d_w y + d_w^2 y$

etc., etc.

Führt man nun diese Ausdrücke in I und II ein, so gibt sich

V) $d\mathfrak{v} = d_x\mathfrak{v} + \frac{d_y\mathfrak{v}}{dy} \cdot d_x y + d_w\mathfrak{v} + \frac{d_y\mathfrak{v}}{dy} \cdot d_w y$

VI) $d^2\mathfrak{v} = d_x^2\mathfrak{v} + 2 \cdot \frac{d_x d_y \mathfrak{v}}{dy} \cdot d_x y + \frac{d_y^2\mathfrak{v}}{dy^2} \cdot (d_x y)^2 + \frac{d_y\mathfrak{v}}{dy} \cdot d_x^2 y + 2 \cdot \Big(d_x d_w \mathfrak{v} +$

$\frac{d_x d_y \mathfrak{v}}{dy} \cdot d_w y + \frac{d_w d_y \mathfrak{v}}{dy} \cdot d_x y + \frac{d_y^2\mathfrak{v}}{dy^2} \cdot d_x y \cdot d_w y\Big) + d_w^2\mathfrak{v} + 2 \cdot \frac{d_w d_y \mathfrak{v}}{dy} \cdot d_w y$

$+ \frac{d_y^2\mathfrak{v}}{dy^2} \cdot (d_w y)^2 + \frac{d_y\mathfrak{v}}{dy} \cdot d_w^2 y$

etc., etc.

Aus V folgt nun

VII) $$\frac{d_x\mathfrak{v}}{\overline{dx}} = \frac{d_x\mathfrak{v}}{dx} + \frac{d_y\mathfrak{v}}{dy} \cdot \frac{d_x y}{dx}$$

VIII) $$\frac{d_w\mathfrak{v}}{\overline{dw}} = \frac{d_w\mathfrak{v}}{dw} + \frac{d_y\mathfrak{v}}{dy} \cdot \frac{d_w y}{dw}$$

Ferner aus VI folgt

IX) $$\frac{d_x^2\mathfrak{v}}{\overline{dx^2}} = \frac{d_x^2\mathfrak{v}}{dx^2} + 2 \cdot \frac{d_x d_y \mathfrak{v}}{dx \cdot dy} \cdot \frac{d_x y}{dx} + \frac{d_y^2\mathfrak{v}}{dy^2} \cdot \left(\frac{d_x y}{dx}\right)^2 + \frac{d_y\mathfrak{v}}{dy} \cdot \frac{d_x^2 y}{dx^2}$$

X) $$\frac{d_x d_w \mathfrak{v}}{\overline{dx . dw}} = \frac{d_x d_w \mathfrak{v}}{dx \cdot dw} + \frac{d_x d_y \mathfrak{v}}{dx \cdot dy} \cdot \frac{d_w y}{dw} + \frac{d_w d_y \mathfrak{v}}{dw \cdot dy} \cdot \frac{d_x y}{dx} + \frac{d_y^2\mathfrak{v}}{dy^2} \cdot \frac{d_x y}{dx} \cdot \frac{d_w y}{dw}$$

XI) $$\frac{d_w^2\mathfrak{v}}{\overline{dw^2}} = \frac{d_w^2\mathfrak{v}}{dw^2} + 2 \cdot \frac{d_w d_y \mathfrak{v}}{dw \cdot dy} \cdot \frac{d_w y}{dw} + \frac{d_y^2\mathfrak{v}}{dy^2} \cdot \left(\frac{d_w y}{dw}\right)^2 + \frac{d_y\mathfrak{v}}{dy} \cdot \frac{d_w^2 y}{dw^2}$$

In den Gleichungen VII bis XI sind die doppelten Bruchstriche nicht mehr willkürlich, sondern wesentlich nothwendig; denn sowohl $\frac{d_x\mathfrak{v}}{dx}$ als auch $\frac{d_x\mathfrak{v}}{\overline{dx}}$ sind Zeichen für partielle Differentialquotienten; aber das erste ist der einfache, und das zweite ist der zusammengesetzte Begriff, so wie auch das zweite noch bemerkbar macht, dass relativ unabhängige Veränderliche dabei vorkommen, deren Differentiale eliminirt worden sind. Hat man einen ausgedehnten Ausdruck, so kann man auch schreiben:

$$\frac{1}{\overline{dx^m}} \cdot d_x^m (P, Q, R \ldots), \qquad \frac{1}{\overline{dx^m \cdot dw^n}} \cdot d_x^m d_w^n (P, Q, R \ldots), \text{ etc., etc.}$$

Aus $\frac{d_y\mathfrak{v}}{dy}$ folgt $d\left(\frac{d_y\mathfrak{v}}{dy}\right) = \frac{d_x d_y \mathfrak{v}}{dy} + \frac{d_w d_y \mathfrak{v}}{dy} + \frac{d_y^2\mathfrak{v}}{dy^2} \cdot dy_{x,w}$; und wenn man aus Gleichung III für $dy_{x,w}$ seinen Ausdruck einsetzt, so gibt sich

$$d\left(\frac{d_y\mathfrak{v}}{dy}\right) = \left(\frac{d_x d_y \mathfrak{v}}{dx \cdot dy} + \frac{d_y^2\mathfrak{v}}{dy^2} \cdot \frac{d_x y}{dx}\right) \cdot dx + \left(\frac{d_w d_y \mathfrak{v}}{dw \cdot dy} + \frac{d_y^2\mathfrak{v}}{dy^2} \cdot \frac{d_w y}{dw}\right) \cdot dw$$

Also ist

XII) $$\frac{d_x\left(\frac{d_y\mathfrak{v}}{dy}\right)}{\overline{dx}} = \frac{d_x d_y \mathfrak{v}}{dx \cdot dy} + \frac{d_y^2\mathfrak{v}}{dy^2} \cdot \frac{d_x y}{dx}$$

XIII) $\frac{d_w\left(\frac{d_y u}{dy}\right)}{dw} = \frac{d_w d_y u}{dw \,.\, dy} + \frac{d_y^2 u}{dy^2} \,.\, \frac{d_w y}{dw}$

Differentiirt man aber die Gleichungen VII und VIII nach y, so bekommt man bezüglich

XIV) $\frac{d_y\left(\frac{d_x u}{dx}\right)}{dy} = \frac{d_x d_y u}{dx \,.\, dy} + \frac{d_y^2 u}{dy^2} \,.\, \frac{d_x y}{dx}$

XV) $\frac{d_y\left(\frac{d_w u}{dw}\right)}{dy} = \frac{d_w d_y u}{dw \,.\, dy} + \frac{d_y^2 u}{dy^2} \,.\, \frac{d_w y}{dw}$

Aus den letzten vier Gleichungen folgt also

XVI) $\frac{d_x\left(\frac{d_y u}{dy}\right)}{dx} = \frac{d_y\left(\frac{d_x u}{dx}\right)}{dy}$, und XVII) $\frac{d_w\left(\frac{d_y u}{dy}\right)}{dw} = \frac{d_y\left(\frac{d_w u}{dw}\right)}{dy}$

Diese wichtigen Sätze, welche denen der beiden vorhergehenden §§ ganz analog sind, können leicht auf höhere Differentialquotienten ausgedehnt werden, so wie es leicht aber weitläufig ist, die bisherige Untersuchung auf zusammengesetztere Fälle auszudehnen. Auch bleibt, wie bekannt, Alles dasselbe, die gegebenen Functionen mögen in entwickelter oder unentwickelter Form gegeben sein. Die Rücksicht, welche Differentiale als unabhängig und welche als abhängig behandelt werden müssen, ist dabei der Hauptpunkt.

B e i s p i e l. Aus $u = x^m \,.\, w^n \,.\, y^p$ folgt die Differentialgleichung

I) $du = m \,.\, x^{m-1} \,.\, w^n \,.\, y^p \,.\, dx + n \,.\, x^m \,.\, w^{n-1} \,.\, y^p \,.\, dw + p \,.\, x^m \,.\, w^n \,.\, y^{p-1} \,.\, dy$

Nun soll y eine Function von x und w sein; es ist also

II) $dy = dy_{x,w} = d_x y + d_w y$

Führt man diesen Ausdruck in I ein, so bekommt man

III) $du = m \,.\, x^{m-1} \,.\, w^n \,.\, y^p \,.\, dx + p \,.\, x^m \,.\, w^n \,.\, y^{p-1} \,.\, d_x y + n \,.\, x^m \,.\, w^{n-1} \,.\, y^p \,.\, dw + p \,.\, x^m \,.\, w^n \,.\, y^{p-1} \,.\, d_w y$

und daraus folgt

IV) $\frac{d_x u}{dx} = m \,.\, x^{m-1} \,.\, w^n \,.\, y^p + p \,.\, x^m \,.\, w^n \,.\, y^{p-1} \,.\, \frac{d_x y}{dx}$

V) $\frac{d_w u}{dw} = n \,.\, x^m \,.\, w^{n-1} \,.\, y^p + p \,.\, x^m \,.\, w^n \,.\, y^{p-1} \,.\, \frac{d_w y}{dw}$

Differentiirt man diese beiden Gleichungen nach y, so bekommt man

VI) $\frac{d_y\left(\frac{d_x u}{dx}\right)}{dy} = mp \,.\, x^{m-1} \,.\, w^n \,.\, y^{p-1} + p(p-1) \,.\, x^m \,.\, w^n\, y^{p-2} \,.\, \frac{d_x y}{dx}$

VII) $\frac{d_y\left(\frac{d_w u}{dw}\right)}{dy} = np \,.\, x^m \,.\, w^{n-1} \,.\, y^{p-1} + p \,.\, (p-1) \,.\, x^m \,.\, w^n \,.\, y^{p-2} \,.\, \frac{d_w y}{dw}$

Aus der Gleichung $u = x^m \,.\, w^n \,.\, y^p$ folgt aber auch der partielle Differentialquotient $\frac{d_y u}{dy} = p \,.\, x^m \,.\, w^n \,.\, y^{p-1}$; und wenn man diesen Ausdruck nach allen Veränderlichen differentiirt, so bekommt man

VII) $d\left(\frac{d_y u}{dy}\right) = mp \,.\, x^{m-1} \,.\, w^n \,.\, y^{p-1} \,.\, dx + np \,.\, x^m \,.\, w^{n-1} \,.\, y^{p-1} \,.\, dw + p \,.\, (p-1) \,.\, x^m \,.\, w^n \,.\, y^{p-2} \,.\, dy$

Weil aber y eine Function von x und w ist, so hat man hier für dy den in Gleichung II aufgestellten Ausdruck einzuführen; und man bekommt

$d\left(\frac{d_y u}{dy}\right) = mp \,.\, x^{m-1} \,.\, w^n \,.\, y^{p-1} \,.\, dx + p \,.\, (p-1) \,.\, x^m \,.\, w^n \,.\, y^{p-2} \,.\, d_x y + np \,.\, x^m \,.\, w^{n-1} \,.\, y^{p-1} \,.\, dw + p \,.\, (p-1) \,.\, x^m \,.\, w^n \,.\, y^{p-2} \,.\, d_w y$

Daraus folgt nun

$$\text{IX)}\quad \frac{d_x\left(\frac{d_y u}{dy}\right)}{dx} = mp \, . \, x^{m-1} \, . \, w^n \, . \, y^{p-1} + p \, . \, (p-1) \, . \, x^m \, . \, w^n \, . \, y^{p-2} \, . \, \frac{d_x y}{dx}$$

$$\text{X)}\quad \frac{d_w\left(\frac{d_y u}{dy}\right)}{dw} = np \, . \, x^m \, . \, w^{n-1} \, . \, y^{p-1} + p \, . \, (p-1) \, . \, x^m \, . \, w^n \, . \, y^{p-2} \, . \, \frac{d_w y}{dw}$$

so dass die in VI und IX, sowie auch die in VII und X gewonnenen Resultate den durch die Gleichungen

$$\frac{d_x\left(\frac{d_y u}{dy}\right)}{dx} = \frac{d_y\left(\frac{d_x u}{dx}\right)}{dy}, \text{ und } \frac{d_w\left(\frac{d_y u}{dy}\right)}{dw} = \frac{d_y\left(\frac{d_w u}{dw}\right)}{dy}$$

ausgesprochenen Lehrsätzen vollkommen genügen.

II. Sätze, welche in den Integralcalcul gehören.

§. 5. Der für die ganze Analysis wichtige Satz „Wenn einmal in einem speciellen Falle Null in den Nenner kommt, so muss man für diesen speciellen Fall jedesmal eine eigenthümliche Untersuchung vornehmen“ findet vorzüglich in dem Integralcalcul sehr häufige Anwendung. Wenn nemlich in einem speciellen Falle einmal ein Integral Null in den Nenner bekommt, so ist dieses eine Anzeige, dass für diesen Fall ein anderes Integral gesucht werden müsse. Man hat also alle Integrationen noch einmal von Anfange an vorzunehmen, und beständig die Eigenthümlichkeiten dieses besondern Falles im Auge zu behalten. So ist z. B. im Allgemeinen giltig

$$\text{I)}\quad \int x^m \, . \, dx = c + \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

Für den Fall, dass $m = -1$, würde diese Gleichung übergehen in

$$\text{II)}\quad \int x^{-1} \, . \, dx = c + \frac{1}{0}$$

Leitet man aber das zu $\int x^{-1} \, . \, dx$ gehörige Integral nicht aus dem allgemeineren Falle I ab, sondern integrirt man hier besonders; so bekommt man

$$\text{III)}\quad \int x^{-1} \, . \, dx = \int \frac{dx}{x} = c + \text{lgnat } x$$

Beispiele dieser Art werden in diesem Buche sehr viele vorkommen (s. Aufgabe 163, 171, 172, 183, 194, 212, 225, und viele andere).

§. 6. Bei der Integration der totalen Differentialgleichungen gehen willkürliche Constanten ein. Man kann oft von einem und demselben Differential verschiedene Integrale erhalten; aber die Differenz je zweier solcher Integrale ist jedesmal ein constanter Ausdruck, d. h., wenn man durch irgend eine Integrationsweise aus $f(x) \, . \, dx$ das Integral $\varphi(x)$, und durch eine andere Integrationsweise aus demselben $f(x) \, . \, dx$ das Integral $\psi(x)$ bekommt; so ist immer $\varphi(x) - \psi(x) = c$

Diesen Satz kann man auch auf folgende Weise ausdrücken „wenn man von einerlei Differential die beiden allgemeinen Integrale $\varphi(x) + c'$ und $\psi(x) + c''$ bekommt, so ist immer

$$\varphi(x) + c' = \psi(x) + c''$$

wenn gleich nicht $\varphi(x) = \psi(x)$ ist.“ So beruht auf der Aenderung der Constanten der Beweis folgender beachtenswerther Sätze, die sehr häufige Anwendung finden:

1) $\lg(-\varphi(x)) + C' = \lg(+\varphi(x)) + C''$
2) $\lg\left(\sqrt{-\varphi(x)}\right) + C' = \lg\left(\sqrt{+\varphi(x)}\right) + C''$
3) $\arcsin\varphi(x) + C' = -\arccos\varphi(x) + C''$
4) $\arccos\varphi(x) + C' = -\arcsin\varphi(x) + C''$
5) $\operatorname{arc\,tg}\varphi(x) + C' = -\operatorname{arc\,cotg}\varphi(x) + C''$.

Diese Sätze kann man noch beliebig vermehren; es genügt aber, auf deren Vorhandensein aufmerksam gemacht zu haben. Später werden sie sehr oft angewendet werden.

Bei der Integration der partiellen Differentialgleichungen gehen willkürliche Functionen ein.

A) Wird eine partielle Differentialgleichung durch

1) $z = \varphi(x) + \psi(y)$

erfüllt, wo $\varphi(x)$ eine ganz willkürliche Function von x, und $\psi(y)$ eine ganz willkürliche Function von y ist; so wird dieselbe auch erfüllt

2) durch $z = C + \varphi(x) + \psi(y)$, wo C constant ist.
3) durch $z = \varphi(c \cdot x) + \psi(k \cdot y)$
4) durch $z = \varphi\left(\frac{x}{c}\right) + \psi\left(\frac{y}{k}\right)$
5) durch $z = \varphi\left(\frac{c}{x}\right) + \psi\left(\frac{k}{y}\right)$
6) durch $z = c + c' \cdot \varphi(x) + c'' \cdot f(x) + k' \cdot \psi(y) + k'' \cdot F(y)$
und so fort.

Der Beweis dazu liegt ganz nahe.

B) Wenn eine partielle Differentialgleichung durch

1) $z = x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

erfüllt wird, wo $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ eine ganz willkürliche Function des Quotienten $\frac{y}{x}$ darstellt; so wird dieselbe auch erfüllt

2) durch $z = y \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$
3) durch $z = x \cdot \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$
4) durch $z = x \cdot \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y \cdot \psi\left(\frac{y}{x}\right)$
und so fort.

Diese Sätze, deren Beweise ganz nahe liegen, lassen sich nach Belieben vermehren; es genügt aber, auf deren Vorhandensein aufmerksam gemacht zu haben. Später werden sie sehr oft angewendet werden.

§. 7. Um die Kürze des Ausdrucks zu befördern, und in das Calculiren mehr Sicherheit zu bringen, ist für die bestimmten Integrale eine eigene Bezeichnung nöthig. Die Vernachlässigung einer solchen hat schon so viele Irrthümer veranlasst, dass kaum Jemand sein dürfte, welcher nicht kennen gelernt hätte, wie nöthig eine solche eigenthümliche Bezeichnung ist. Die gebräuchlichste ist folgende:

1) Hat man das einfache Integral $\int_a^\alpha \varphi(x) \cdot dx$, so sagt dieses Zeichen, man solle integriren, und dann das Integral von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstrecken.

2) Hat man das doppelte Integral $\int_a^\alpha\int_b^\beta \varphi(x, y) \cdot dy \cdot dx$, so sagt dieses Zeichen, man solle zuerst nach y integriren, und das sich ergebende Integral von $y = b$ bis $y = \beta$ nehmen; hierauf solle man nach x integriren, und dieses Integral von $x = a$

bis $x = \alpha$ erstrecken. Dass man zuerst nach y und dann nach x integrire, ist durchaus nöthig, wenn b und β Functionen von x sind, oder wenn von den beiden Elementen b und β auch nur eines eine Function von x ist. Wenn aber die Integrationsgränzen a und α von y unabhängig sind, und wenn gleichfalls die Integrationsgränzen b und β von x unabhängig sind; wenn ferner die Function $\varphi(x, y)$ zwischen den Gränzwerthen von x und y ihre Stetigkeit nicht unterbricht; so kann man die Ordnung des Integrirens auch umkehren, welche Wahrheit durch folgende Gleichung

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \varphi(x, y) \cdot dy \cdot dx = \int_b^\beta \int_a^\alpha \varphi(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

ausgesprochen ist.

3) Hat man das dreifache Integral $\int_a^\alpha \int_b^\beta \int_c^\gamma \varphi(x, y, z) \cdot dz \cdot dy \cdot dx$, so sagt dieses Zeichen, man solle zuerst nach z integriren, und dann das Integral von $z = c$ bis $z = \gamma$ nehmen; hierauf solle man nach y integriren, und das jetzige Integral von $y = b$ bis $y = \beta$ nehmen; zuletzt solle man nach x integriren, und dieses Integral von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstrecken. Diese Ordnung des Integrirens ist durchaus nöthig, wenn von den Elementen c und γ entweder eines oder beide zugleich Functionen von x und y sind, und wenn von den Elementen b und β entweder eines oder beide zugleich Functionen von x sind. Wenn aber die beiden Integrationsgränzen c und γ von x und y unabhängig sind, wenn ebenso die beiden Integrationsgränzen b und β von x und z unabhängig sind, und wenn auch noch die beiden Integrationsgränzen a und α von y und z unabhängig sind; wenn ferner die Function $\varphi(x, y, z)$ zwischen den Gränzwerthen von x, y und z ihre Stetigkeit nicht unterbricht; so ist die Ordnung des Integrirens ganz gleichgiltig.

Und so fort.

1) Folgendes Zeichen $\overset{(n)}{\int} \varphi(x) \cdot dx^n$ stellt ein n-mal wiederholendes einfaches aber unbestimmtes Integral vor; d. h. man soll n-mal hintereinander nach x integriren, während bei jeder Integration ein willkürlicher Constanter, also im Ganzen n willkürliche Constante eingehen. Dagegen folgendes Zeichen $\overset{(n)}{\int_a^x} \varphi(x) \cdot dx^n$ stellt ein n-mal wiederholendes einfaches Integral vor, mit der bestimmten Anfangsgränze $x = a$; d. h., man solle n-mal hintereinander nach x integriren, und jedem der successiven Integrale die bestimmte Anfangsgränze $x = a$ geben, so dass der bei jeder Integration eingehende Constante sich auch jedesmal bestimmt.

2) Folgendes Zeichen $\overset{(n)}{\int} \overset{(p)}{\int} \varphi(x, y) \cdot dy^p \cdot dx^n$ stellt ein n-mal und p-mal wiederholendes zweifaches aber unbestimmtes Integral vor. Dagegen folgendes Zeichen $\overset{(n)}{\int_a^x} \overset{(p)}{\int_b^y} \varphi(x, y) \cdot dy^p \cdot dx^n$ stellt ein n-mal und p-mal wiederholendes zweifaches Integral vor, mit den bestimmten Anfangsgränzen $y = b$ und $x = a$.

Und so fort.

§. 8. Ist $\varphi(x, \varkappa)$ eine beliebige Function von x und $\varkappa$; sind ferner x und a ganz unabhängig von $\varkappa$, und ist wiederum $\varkappa$ ganz unabhängig von x und a; so ist

$$\frac{d_\varkappa^m \overset{(n)}{\int_a^x} \varphi(x, \varkappa) \cdot dx^n}{d\varkappa^m} = \overset{(n)}{\int_a^x} \frac{d_\varkappa^m \varphi(x, \varkappa)}{d\varkappa^m} \cdot dx^n$$

d. h. bei der hier gemachten Voraussetzung ist es gleichgiltig, ob man zuerst nach x integrirt und dann nach $\varkappa$ differentiirt, oder ob man zuerst nach $\varkappa$ differentiirt und dann nach x integrirt.

Beweis. Man setze $(\varkappa + h)$ statt $\varkappa$, so ergibt sich eine nach ganzen positiven Potenzen des h aufsteigende Reihe. Diese kann man erstlich auf folgende Weise entwickeln:

$$\text{I)}\quad \int_a^{x\,(n)} \varphi(x, \varkappa + h)\cdot dx^n = \int_a^{x\,(n)} \varphi(x, \varkappa)\cdot dx^n + h\cdot \frac{d_\varkappa \int_a^{x\,(n)} \varphi(x, \varkappa)\cdot dx^n}{d\varkappa} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{h^m}{1.2.3...m}\cdot \frac{d_\varkappa^m \int_a^{x\,(n)} \varphi(x, \varkappa)\, dx^n}{d\varkappa^m} + \ldots\ldots$$

Man kann aber auch die dadurch, dass man $(\varkappa + h)$ an die Stelle des $\varkappa$ setzt, sich ergebende Reihe auf folgende Weise entwickeln:

$$\text{II)}\quad \int_a^{x\,(n)} \varphi(x, \varkappa + h)\cdot dx^n = \int_a^{x\,(n)} \Big[\varphi(x, \varkappa) + h\cdot \frac{d_\varkappa \varphi(x, \varkappa)}{d\varkappa} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{h^m}{1.2.3...m}\cdot \frac{d_\varkappa^m \varphi(x, \varkappa)}{d\varkappa^m} + \ldots\Big]\cdot dx^n$$

Man hat aber nur nach x zu integriren; und thut man dieses theilweise, so geht letztere Gleichung über in

$$\text{III)}\quad \int_a^{x\,(n)} \varphi(x, \varkappa + h)\cdot dx^n = \int_a^{x\,(n)} \varphi(x, \varkappa)\cdot dx^n + h\cdot \int_a^{x\,(n)} \frac{d_\varkappa \varphi(x, \varkappa)}{d\varkappa}\cdot dx^n + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{h^m}{1.2.3...m}\cdot \int_a^{x\,(n)} \frac{d_\varkappa^m \varphi(x, \varkappa)}{d\varkappa^m}\cdot dx^n + \ldots\ldots$$

Da nun die Reihen I und III aus dem nemlichen erzeugenden Ausdrucke entstanden sind, so muss bei jedem beliebigen, also auch bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen, Werthe des h die Reihe III denselben Werth haben, wie die Reihe I. Desshalb müssen in beiden Reihen die zu den gleichen Potenzen gehörigen Coefficienten einander gleich sein; und somit ist unser Satz erwiesen.

Ist $\varphi(x, y, \varkappa)$ eine beliebige Function von x, y, $\varkappa$; sind ferner x und a von $\varkappa$ ganz unabhängig, und ist wiederum $\varkappa$ von x und a ganz unabhängig; so bekommt man, wie im vorigen Falle,

$$\frac{d_\varkappa^m \int_a^{x\,(n)} \int_b^{y\,(p)} \varphi(x, y, \varkappa)\cdot dy^p\cdot dx^n}{d\varkappa^m} = \int_a^{x\,(n)} \left(\frac{d_\varkappa^m \int_b^{y\,(p)} \varphi(x, y, \varkappa)\cdot dy^p}{d\varkappa^m}\right)\cdot dx^n$$

Sind nun auch y und b von $\varkappa$ unabhängig, und ist wiederum $\varkappa$ von y und b unabhängig; so ist gleichfalls

$$\int_a^{x\,(n)} \left(\frac{d_\varkappa^m \int_b^{y\,(p)} \varphi(x, y, \varkappa)\cdot dy^p}{d\varkappa^m}\right)\cdot dx^n = \int_a^{x\,(n)} \int_b^{y\,(p)} \frac{d_\varkappa^m \varphi(x, y, \varkappa)}{d\varkappa^m}\cdot dy^p\cdot dx^n$$

Sind also alle vier Elemente x, a, y, b von $\varkappa$ unabhängig, und ist wiederum $\varkappa$ von x, a, y, b unabhängig; so ist

$$\frac{d^m_{\varkappa}\overset{(n)}{\int_a^x}\overset{(p)}{\int_b^y}\varphi(x,\,y,\,\varkappa)\cdot dy^p\cdot dx^n}{d\varkappa^m}=\overset{(n)}{\int_a^x}\overset{(p)}{\int_b^y}\frac{d^m_{\varkappa}\varphi(x,\,y,\,\varkappa)}{d\varkappa^m}\cdot dy^p\cdot dx^n$$

d. h., es ist bei der hier gemachten Voraussetzung wieder einerlei, ob man zuerst alle Integrationen ausführt, und dann differentiirt, oder ob man zuerst differentiirt und dann integrirt.

Dieser Satz lässt sich auf beliebig vielfache Integrale ausdehnen. Seine Wichtigkeit wird sich später (s. §. 59) bewähren.

§. 9. Wenn $\alpha > a$, so ist $\int_a^\alpha \varphi(x)\cdot dx$ jedesmal positiv oder negativ, sobald $\varphi(x)$ selbst für jeden von a bis α möglichen Werth des x beständig positiv oder negativ ist.

Beweis. Denkt man sich h positiv und im Momente des Verschwindens befindlich, so dass durch die Reihe

$$a,\ (a+h),\ (a+2h),\ (a+3h),\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ (a+(n-1)h),\ \alpha$$

alle stetig nebeneinander liegenden Werthe des x von a bis α vorgestellt sind; dann, aber auch nur dann, ist

$$\int_a^\alpha \varphi(x)\cdot dx = h\cdot[\varphi(a)+\varphi(a+h)+\varphi(a+2h)+\ldots\ldots\ldots\ \varphi(a+(n-1)h)]$$

Dabei hat das n einen unendlichgrossen Zahlenwerth, für welchen die Gleichung $a+n\cdot h=\alpha$ stattfindet, d. h. es ist $n=\frac{\alpha-a}{h}$

Hiermit ist unser Satz bewiesen. Es leuchtet von selbst ein, dass er auch noch giltig ist, wenn einer oder mehrere der Theilsätze $\varphi(a)$, $\varphi(a+h)$, $\varphi(a+2h)$, $\varphi(a+3h)$, ..., $\varphi(a+(n-1)h)$ zu Null werden. Dagegen ist offenbar, dass er nicht mehr gelten kann, wenn einer oder mehrere dieser Theilsätze Null in den Nenner bekommen. Sollten aber nicht alle Theilsätze dasselbe Zeichen behalten, so kann man im Allgemeinen nichts über den Zeichenstand des bestimmten Integrals $\int_a^\alpha \varphi(x)\cdot dx$ behaupten, sondern muss jeden speziellen Fall nach seinen Eigenthümlichkeiten untersuchen.

§. 10. Wenn b und β keine Functionen von x, und wenn die beiden Differenzen $(\alpha-a)$ und $(\beta-b)$ positiv sind; so ist das bestimmte Integral $\int_a^\alpha\int_b^\beta \varphi(x,\,y)\cdot dy\cdot dx$ beständig positiv oder negativ, je nachdem $\varphi(x,\,y)$ selbst beständig positiv oder beständig negativ bleibt, wenn man dem y alle von b bis β stetig nebeneinander liegenden Werthe, und bei jedem einzelnen dieser Werthe des y auch zugleich dem x alle von a bis α stetig nebeneinander liegenden Werthe beilegt.

Beweis. Denkt man sich k positiv und im Momente des Verschwindens befindlich, so dass durch die Reihe

$$b,\ (b+k),\ (b+2k),\ (b+3k),\ \ldots\ldots,\ (b+(m-1)k),\ \beta$$

alle stetig nebeneinander liegenden Werthe des y von b bis β vorgestellt sind; denkt man sich ferner auch h positiv und im Momente des Verschwindens befindlich, so dass durch die Reihe

$$a,\ (a+h),\ (a+2h),\ (a+3h),\ \ldots\ldots,\ (a+(n-1)\cdot h),\ \alpha$$

alle stetig nebeneinander liegenden Werthe des x von a bis α vorgestellt sind; dann, aber auch nur dann, ist

$$\int_a^\alpha\int_b^\beta \varphi(x, y) \cdot dy \cdot dx =$$

$$\begin{aligned} h \cdot k \cdot \Big\{ & [\varphi(a, b) + \varphi(a + h, b) + \ldots + \varphi(a + (n-1)h, b)] \\ + & [\varphi(a, b + k) + \varphi(a + h, b + k) + \ldots + \varphi(a + (n-1)h, b + k)] \\ + & [\varphi(a, b + 2k) + \varphi(a + h, b + 2k) + \ldots + \varphi(a + (n-1)h, b + 2k)] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + & [\varphi(a, b + (m-1)k) + \varphi(a + h, b + (m-1)k) + \ldots + \varphi(a + (n-1)h, b + (m-1)k)] \Big\} \end{aligned}$$

Dabei haben n und m jene unendlichgrossen Zahlenwerthe, für welche die Gleichungen $a + n \cdot h = \alpha$ und $b + m \cdot k = \beta$ stattfinden, d. h. es ist $n = \frac{\alpha - a}{h}$ und $m = \frac{\beta - b}{k}$.

Hiermit ist unser Satz bewiesen. Es leuchtet von selbst ein, dass er seine Giltigkeit behält, wenn einer oder mehrere der Theilsätze $\varphi(a, b)$, $\varphi(a, b + k)$, $\varphi(a + h, b)$, etc. zu Null werden; dagegen ist offenbar, dass er nicht mehr gelten kann, wenn einer oder mehrere dieser Theilsätze Null in den Nenner bekommen. Sollten aber nicht alle diese Theilsätze dasselbe Zeichen haben, so kann man im Allgemeinen über den Zeichenstand des bestimmten Integrals $\int_a^\alpha\int_b^\beta \varphi(x, y) \cdot dy \cdot dx$ nichts behaupten, sondern muss jeden speciellen Fall nach seinen Eigenthümlichkeiten untersuchen.

Es ist nun klar, was die Bedingung ist, unter welcher ein dreifaches, vierfaches, etc. Integral positiv oder negativ wird; und desshalb ist es nicht nöthig, diese Untersuchung noch weiter auszudehnen.

III. Aufsuchung der Bedingungen, unter denen die homogenen Functionen, welche entweder rational und von grader Dimension sind, oder welche sich auf eine solche Form bringen lassen, ihr Zeichen nicht wechseln können.

A. *Erste Methode, gegründet auf die Theorie der unbestimmten Coefficienten.*

§. 11. Man soll die Bedingungen aufsuchen, wobei die Function

$$1) \quad \varphi(p, q) = A \cdot p^2 + 2B \cdot pq + C \cdot q^2$$

ihr Zeichen nicht wechseln kann, unter der Voraussetzung, dass A, B, C bestimmt und reell, aber nicht Null sind, dagegen p und q jeden reellen Werth annehmen oder auch Null sein können.

Man gebe dem vorgelegten Ausdrucke folgende Form:

$$2) \quad \varphi(p, q) = A \cdot (p + a \cdot q)^2 + b \cdot q^2$$

Dieser Ausdruck kann bei jedem reellen Werthe des p und q sein Zeichen nicht wechseln, wenn A und b einerlei Zeichen haben. Durch Vergleichung der beiden Gleichungen bekommt man

$$A \cdot p^2 + 2B \cdot pq + C \cdot q^2 = A \cdot p^2 + 2Aa \cdot pq + (A \cdot a^2 + b) \cdot q^2$$

Daraus folgt

$$A = A,\quad Aa = B,\quad A \cdot a^2 + b = C$$

also

$$a = \frac{B}{A} \text{ und } b = \frac{AC - B^2}{A}$$

Nun bleibt $\varphi(p, q)$ immer positiv, wenn A und b gleichzeitig positiv sind; und dieses ist der Fall, wenn A und $(AC - B^2)$ gleichzeitig positiv sind. Es bleibt $\varphi(p, q)$ immer negativ, wenn A und b gleichzeitig negativ sind; und dieses ist der Fall, wenn A negativ und $(AC - B^2)$ positiv ist.

Der Umstand, dass $(AC - B^2)$ in beiden Fällen positiv sein soll, bringt mit sich, dass A und C einerlei Zeichen haben müssen.

Wenn unter den Coefficienten A, B, C irgend eine willkürliche Relation stattfinden darf, so kann man $b = 0$, d. h. $AC - B^2 = 0$ setzen. Dann ist

$$3)\quad \varphi(p, q) = A \cdot (p + a \cdot q)^2$$

so dass in diesem Falle das Zeichen von $\varphi(p, q)$ ganz allein vom Zeichen des A und des C abhängig ist.

Ist aber $A = 0$, so kann $\varphi(p, q)$ nur dann sein Zeichen nicht wechseln, wenn auch $B = 0$ ist. Dann ist $\varphi(p, q) = C \cdot q^2$, und hat beständig mit C dasselbe Zeichen.

Kann der Ausdruck $A \cdot p^2 + 2B \cdot p \cdot q + C \cdot q^2$ sein Zeichen nicht wechseln, so kann es auch der Ausdruck $A + 2B \cdot q + C \cdot q^2$ nicht wechseln, weil man annehmen kann, es sei $p = 1$ gesetzt worden.

§. 12. **Man soll die Bedingungen aufsuchen, wobei die Function**

$$1)\quad \varphi(p, q, r) = A \cdot p^2 + 2B \cdot pq + C \cdot q^2 + 2D \cdot pr + 2E \cdot qr + F \cdot r^2$$

ihr Zeichen nicht wechselt, unter der Voraussetzung, dass A, B, C, D, E, F bestimmt und reell aber nicht Null sind, dagegen p, q, r jeden reellen Werth annehmen oder auch Null sein können.

Man gebe dem vorgelegten Ausdrucke folgende Form:

$$2)\quad \varphi(p, q, r) = A \cdot (p + a \cdot q + b \cdot r)^2 + c \cdot (q + e \cdot r)^2 + g \cdot r^2$$

Dieser Ausdruck kann offenbar sein Zeichen nicht wechseln, wenn A, c, g einerlei Zeichen haben. Vergleicht man daher die erste und zweite Gleichung, so bekommt man

$$a = \frac{B}{A},\quad c = \frac{AC - B^2}{A},\quad e = \frac{AE - BD}{AC - B^2}$$

und

$$g = \frac{ACF + 2BDE - A \cdot E^2 - C \cdot D^2 - F \cdot B^2}{AC - B^2}$$

Nun ist $\varphi(p, q, r)$ beständig positiv, wenn A, c, g gleichzeitig positiv sind; und dieses ist der Fall, wenn A, $(AC - B^2)$, $(ACF + 2BDE - A \cdot E^2 - C \cdot D^2 - F \cdot B^2)$ zugleich positiv sind.

Ebenso ist $\varphi(p, q, r)$ beständig negativ, wenn A, c, g gleichzeitig negativ sind; und dieses ist der Fall, wenn A negativ, $(AC - B^2)$ positiv, und $ACF + 2BDE - A \cdot E^2 - C \cdot D^2 - F \cdot B^2)$ negativ ist.

Diese Bedingungen sind hinreichend aber auch nöthig, wenn $\varphi(p, q, r)$ sein Zeichen nicht soll wechseln können. Andere Bedingungen, welche in den hier aufgestellten eigentlich schon enthalten sind, ergeben sich, wenn man von den Elementen p, q, r je eines verschwinden lässt. Man bekommt so nach und nach

$$\varphi(p, q, 0) = A \cdot p^2 + 2B \cdot pq + C \cdot q^2$$
$$\varphi(p, 0, r) = A \cdot p^2 + 2D \cdot pr + F \cdot r^2$$
$$\varphi(0, q, r) = C \cdot q^2 + 2E \cdot qr + F \cdot r^2$$

Nun kann $\varphi(p, q, 0)$ sein Zeichen nicht wechseln, wenn A und C einerlei Zeichen haben, und $(AC - B^2)$ positiv ist.

Es kann $\varphi(p, 0, r)$ sein Zeichen nicht wechseln, wenn A und F einerlei Zeichen haben, und $(AF - D^2)$ positiv ist.

Es kann $\varphi(0, q, r)$ sein Zeichen nicht wechseln, wenn C und F einerlei Zeichen haben, und $(CF - E^2)$ positiv ist.

Daraus folgt im Allgemeinen: Wenn $\varphi(p, q, r)$ sein Zeichen nicht wechseln kann, so haben A. C, F und $(ACF + 2BDE - A \cdot E^2 - C \cdot D^2 - F \cdot B^2)$ einerlei Zeichen, und $(AC - B^2)$, $(AF - D^2)$, $(CF - E^2)$ sind positiv.

Wenn unter den Coefficienten A, B, C, D, E, F irgend eine willkürliche Relation stattfinden kann; so kann man entweder gleichzeitig $c = 0$ und $g = 0$, oder man kann auch allein $g = 0$ setzen.

α) Will man gleichzeitig $c = 0$ und $g = 0$ setzen, so bekommt man für g die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. Man muss also diese Untersuchung direct vornehmen, und desshalb setzen

$$3)\quad \varphi(p, q, r) = A \cdot (p + a \cdot q + b \cdot r)^2$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der ursprünglichen, so ergibt sich $A \cdot a = B$, $A \cdot a^2 = C$, $A \cdot b = D$, $A \cdot a \cdot b = E$, $A \cdot b^2 = F$, woraus, wenn man a und b eliminirt, die drei Gleichungen

$$AC - B^2 = 0,\quad AF - D^2 = 0,\quad AE - BD = 0$$

hervorgehen, welche erfüllt sein müssen, wenn $\varphi(p, q, r)$ auf die in Nro. 3 gegebene Form gebracht werden soll.

β) Will man zwischen A, B, C, D, E, F eine solche Relation aufsuchen, dass nur $g = 0$ wird, dass man also die Form

$$4)\quad \varphi(p, q, r) = A \cdot (p + a \cdot q + b \cdot r)^2 + c \cdot (q + e \cdot r)^2$$

bekommt, so wird man auf die Bedingungsgleichung

$$ACF + 2BDE - A \cdot E^2 - C \cdot D^2 - F \cdot B^2 = 0$$

geführt.

Ist $A = 0$, so kann $\varphi(p, q, r)$ nicht bei jedem reellen Werthe des p, q, r sein Zeichen nicht wechseln, wenn nicht alle Coefficienten der mit p behafteten Theilsätze Null sind.

Kann der Ausdruck

$$A \cdot p^2 + 2B \cdot pq + C \cdot q^2 + 2D \cdot pr + 2E \cdot qr + F \cdot r^2$$

sein Zeichen nicht wechseln, so kann es auch der Ausdruck

$$A + 2B \cdot q + C \cdot q^2 + 2D \cdot r + 2E \cdot qr + F \cdot r^2$$

nicht wechseln, weil man annehmen kann, dass $p = 1$ gesetzt sei.

§. 13. Man soll die Bedingungen aufsuchen, wobei die Function

$$1)\quad \varphi(p, q, r, s) = A \cdot p^2 + 2B \cdot pq + C \cdot q^2 + 2D \cdot pr + 2E \cdot qr + F \cdot r^2 + 2G \cdot ps + 2H \cdot qs + 2K \cdot rs + L \cdot s^2$$

ihr Zeichen nicht wechseln kann, unter der Voraussetzung, dass A, B, C, D, E, F, G, H, K, L bestimmt und reell aber nicht Null sind, dagegen p, q, r, s jeden reellen Werth annehmen oder auch Null sein können.

Man gebe dem vorgelegten Ausdrucke folgende Form:

$$2)\quad \varphi(p, q, r, s) = A \cdot (p + a \cdot q + b \cdot r + c \cdot s)^2 + e \cdot (q + g \cdot r + h \cdot s)^2 + k \cdot (r + l \cdot s)^2 + m \cdot s^2$$

Dieser Ausdruck kann offenbar sein Zeichen nicht wechseln, wenn A, e, k, m alle einerlei Zeichen haben. Vergleicht man diese Gleichung mit der ursprünglichen, so bekommt man

$$a = \frac{B}{A},\ b = \frac{D}{A},\ c = \frac{G}{A},\ e = \frac{AC - B^2}{A},\ g = \frac{AE - BD}{AC - B^2},\ h = \frac{AH - BG}{AC - B^2}$$

$$k = \frac{ACF + 2BDE - A \cdot E^2 - C \cdot D^2 - F \cdot B^2}{AC - B^2}$$

$$l = \frac{ACK + BDH + BEG - AEH - CDG - B^2 \cdot K}{ACF + 2BDE - A \cdot E^2 - C \cdot D^2 - F \cdot B^2}$$

$$m = \frac{\left\{\begin{matrix} ACFL + B^2.K^2 + D^2.H^2 + E^2.G^2 + 2AEHK + 2CDGK + 2BFGH + 2BDEL - 2BDHK \\ -2BEGK - 2DEGH - AC \cdot K^2 - AF \cdot H^2 - AL \cdot E^2 - CF.G^2 - CL.D^2 - FL.B^2 \end{matrix}\right\}}{ACF + 2BDE - A \cdot E^2 - C \cdot D^2 - F \cdot B^2}$$

Nun ist $\varphi(p, q, r, s)$ beständig positiv, wenn A, e, k, m gleichzeitig positiv sind.

Ebenso ist $\varphi(p, q, r, s)$ beständig negativ, wenn A, e, k, m gleichzeitig negativ sind.

Diese Bedingungen sind hinreichend aber auch nöthig, wenn $\varphi(p, q, r, s)$ sein Zeichen nicht ändern soll. Andere Bedingungen, welche in den hier aufgestellten eigentlich schon enthalten sind, ergeben sich, wenn man von den Elementen p, q, r, s je zwei oder je eines verschwinden lässt. Man bekommt so, wenn man zuerst je zwei Elemente verschwinden lässt

$$\begin{aligned}
\varphi(p, q, 0, 0) &= A \cdot p^2 + 2B \cdot pq + C \cdot q^2 \\
\varphi(p, 0, r, 0) &= A \cdot p^2 + 2D \cdot pr + F \cdot r^2 \\
\varphi(p, 0, 0, s) &= A \cdot p^2 + 2G \cdot ps + L \cdot s^2 \\
\varphi(0, q, r, 0) &= C \cdot q^2 + 2E \cdot qr + F \cdot r^2 \\
\varphi(0, q, 0, s) &= C \cdot q^2 + 2H \cdot qs + L \cdot s^2 \\
\varphi(0, 0, r, s) &= F \cdot r^2 + 2K \cdot rs + L \cdot s^2
\end{aligned}$$

Daraus folgt im Allgemeinen: wenn diese Ausdrücke ihr Zeichen nicht wechseln können, so haben A, C, F, L einerlei Zeichen, und $(AC - B^2)$, $(AF - D^2)$, $(AL - G^2)$, $(CF - E^2)$, $(CL - H^2)$, $(FL - K^2)$ sind positiv.

Lässt man aber nur je eines der Elemente p, q, r, s verschwinden, so bekommt man

$$\begin{aligned}
\varphi(p, q, r, 0) &= A \cdot p^2 + 2B \cdot pq + C \cdot q^2 + 2D \cdot pr + 2E \cdot qr + F \cdot r^2 \\
\varphi(p, q, 0, s) &= A \cdot p^2 + 2B \cdot pq + C \cdot q^2 + 2G \cdot ps + 2H \cdot qs + L \cdot s^2 \\
\varphi(p, 0, r, s) &= A \cdot p^2 + 2D \cdot pr + F \cdot r^2 + 2G \cdot ps + 2K \cdot rs + L \cdot s^2 \\
\varphi(0, q, r, s) &= C \cdot q^2 + 2E \cdot qr + F \cdot r^2 + 2H \cdot qs + 2K \cdot rs + L \cdot s^2
\end{aligned}$$

Daraus folgt aufs Neue: wenn diese Ausdrücke ihr Zeichen nicht wechseln können, so haben die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
&ACF + 2BDE - A \cdot E^2 - C \cdot D^2 - F \cdot B^2 \\
&ACL + 2BGH - A \cdot H^2 - C \cdot G^2 - L \cdot B^2 \\
&AFL + 2DGK - A \cdot K^2 - F \cdot G^2 - L \cdot D^2 \\
&CFL + 2EHK - C \cdot K^2 - F \cdot H^2 - L \cdot E^2
\end{aligned}$$

immer einerlei Zeichen mit A, C, F, L.

Wenn unter den Coefficienten A, B, C, D, E, F, G, H, K, L irgend eine willkürliche Relation stattfinden kann, so kann man sie noch folgenden Bedingungen unterwerfen:

α) Man setze gleichzeitig $e = 0$, $k = 0$, $m = 0$;

β) Man setze gleichzeitig $k = 0$, $m = 0$;

γ) Man setze $m = 0$.

α) Setzt man gleichzeitig $e = 0$, $k = 0$, $m = 0$, so nehmen dabei k und m die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Man muss also diese Untersuchung direct vornehmen, und desshalb setzen

$$3) \quad \varphi(p, q, r, s) = A \cdot (p + a \cdot q + b \cdot r + c \cdot s)^2$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der ursprünglichen, so ergibt sich daraus folgendes System von Bedingungsgleichungen:

$$\begin{matrix}
AC - B^2 = 0 & AF - D^2 = 0 & AL - G^2 = 0 \\
AE - BD = 0 & AH - BG = 0 & AK - DG = 0
\end{matrix}$$

welche erfüllt sein müssen, wenn $\varphi(p, q, r, s)$ die in 3 angegebene Form soll annehmen können.

β) Setzt man gleichzeitig $k = 0$ und $m = 0$, so nimmt dabei m die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Man muss also diese Untersuchung direct vornehmen, und desshalb setzen

4) $\varphi(p, q, r, s) = A \cdot (p + a \cdot q + b \cdot r + c \cdot s)^2 + e \cdot (q + g \cdot r + h \cdot s)^2$

Vergleicht man diese Gleichung mit der ursprünglichen, so ergibt sich daraus folgendes System von Bedingungsgleichungen:

$$ACF + 2BDE - A \cdot E^2 - C \cdot D^2 - F \cdot B^2 = 0$$
$$ACL + 2BGH - A \cdot H^2 - C \cdot G^2 - L \cdot B^2 = 0$$
$$ACK + BDH + BEG - AEH - CDG - K \cdot B^2 = 0$$

welche erfüllt werden müssen, wenn $\varphi(p, q, r, s)$ die in 4 gegebene Form soll annehmen können.

γ) Setzt man aber $m = 0$, d. h. den Zähler des für m gefundenen Bruches; so nimmt wegen dieser Bedingung die gegebene Function folgende Form an:

5) $\varphi(p, q, r, s) = A \cdot (p + a \cdot q + b \cdot r + c \cdot s)^2 + e \cdot (q + g \cdot r + h \cdot s)^2 + k \cdot (r + l \cdot s)^2$

Ist $A = 0$, so kann $\varphi(p, q, r, s)$ nicht bei jedem reellen Werthe von p, q, r, s sein Zeichen nicht ändern, wenn nicht alle Coefficienten der mit p behafteten Theilsätze verschwinden.

Es ist nicht schwer, aber weitläufig, diese Untersuchung auf Functionen mit noch mehr Veränderlichen auszudehnen. Der Weg dazu ist hinlänglich gezeigt. Auf ganz gleiche Weise verfahrt man mit Functionen von noch höheren Dimensionen. Z. B.

§. 14. Man soll die Bedingungen aufsuchen, wobei die Function

1) $\varphi(p, q) = A \cdot p^4 + B \cdot p^3 \cdot q + C \cdot p^2 \cdot q^2 + D \cdot p \cdot q^3 + E \cdot q^4$

ihr Zeichen nicht wechseln kann unter der Voraussetzung, dass A, B, C, D, E bestimmt und reell aber nicht Null sind, dagegen p und q jeden reellen Werth annehmen oder auch Null sein können.

Man gebe dem vorgelegten Ausdrucke folgende Form:

2) $\varphi(p, q) = A \cdot (p^2 + a \cdot pq + b \cdot q^2)^2 + c \cdot q^2 \cdot (p + e \cdot q)^2$

Dieser Ausdruck kann offenbar sein Zeichen nicht wechseln, wenn A und c einerlei Zeichen haben. Vergleicht man den zweiten Ausdruck mit dem ersten, so ergeben sich eben so viele Bedingungen, als es unbestimmte Coefficienten sind, so dass sich die Coefficienten a, b, c, e bestimmen lassen.

Man soll die Bedingungen aufsuchen, wobei die Function

$\varphi(p, q) = A \cdot p^6 + B \cdot p^5 \cdot q + C \cdot p^4 \cdot q^2 + D \cdot p^3 \cdot q^3 + E \cdot p^2 \cdot q^4 + F \cdot p \cdot q^5 + G \cdot q^6$

ihr Zeichen nicht wechseln kann.

Man gebe dem vorgelegten Ausdrucke folgende Form:

$\varphi(p, q) = A \cdot (p^3 + a \cdot p^2 \cdot q + b \cdot p \cdot q^2 + c \cdot q^3)^2 + e \cdot q^2 \cdot (p^2 + g \cdot p \cdot q + h \cdot q^2)^2$

Dieser Ausdruck kann offenbar sein Zeichen nicht wechseln, so oft A und e einerlei Zeichen haben.

Und so fort bei noch zusammengesetzteren Fällen.

B. *Zweite Methode, gegründet auf die Theorie der Gleichungen.*

§. 15. Man soll die Bedingungen aufsuchen, wobei die Function

1) $\varphi(p, q) = A \cdot p^2 + 2B \cdot pq + C \cdot q^2$

ihr Zeichen nicht wechseln kann, unter der Voraussetzung, dass A,

B, C bestimmt und reell, aber nicht Null sind, dagegen p und q jeden reellen Werth annehmen oder auch Null sein können.

Man setze x statt $\frac{q}{p}$, so gibt sich

$$2)\quad \varphi(p, q) = p^2 \cdot (A + 2B \cdot x + C \cdot x^2)$$

Da p^2 sein Zeichen nicht ändern kann; so ändert $\varphi(p, q)$ sein Zeichen nicht, wenn $A + 2B \cdot x + C \cdot x^2$ sein Zeichen nicht ändert. Man weiss aber aus der Theorie der Gleichungen, dass $A + 2B \cdot x + C \cdot x^2$ für jeden reellen Werth des x sein Zeichen nicht ändert, sobald aus der Gleichung $A + 2B \cdot x + C \cdot x^2 = 0$ sich lauter imaginäre Wurzeln ergeben. Aus letzterer Gleichung folgt $x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C}$. Die Wurzeln der Gleichung sind aber imaginär, wenn $AC > B^2$; und soll dieses möglich sein, so müssen A und C gleiche Zeichen haben, und $(AC - B^2)$ muss positiv sein.

Es ist also Alles, wie in §. 11.

§. 16. Man soll die Bedingungen aufsuchen, wobei die Function

$$1)\quad \varphi(p, q, r) = A \cdot p^2 + 2B \cdot pq + C \cdot q^2 + 2D \cdot pr + 2E \cdot qr + F \cdot r^2$$

ihr Zeichen nicht wechseln kann, unter der Voraussetzung, dass A, B, C, D, E, F bestimmt und reell aber nicht Null sind, dagegen p, q, r jeden reellen Werth annehmen oder auch Null sein können.

Man setze x statt $\frac{q}{p}$, und y statt $\frac{r}{p}$; so gibt sich

$$2)\quad \varphi(p, q, r) = p^2 \cdot (A + 2B \cdot x + C \cdot x^2 + 2D \cdot y + 2E \cdot xy + F \cdot y^2)$$
$$= p^2 \cdot [(A + 2Bx + C \cdot x^2) + 2(D + E \cdot x) \cdot y + F \cdot y^2]$$

Da p^2 sein Zeichen nicht wechseln kann; so wechselt auch $\varphi(p, q, r)$ sein Zeichen nicht, wenn es der zweite, d. h. der in die eckigen Klammern geschlossene Factor nicht wechselt. Dieser zweite Factor hat aber für jeden reellen Werth von x und y einerlei Zeichen, und zwar das von F, wenn

$$F \cdot (A + 2B \cdot x + C \cdot x^2) > (D + Ex)^2$$

d. h. wenn

$$(AF - D^2) + 2(BF - DE) \cdot x + (CF - E^2) \cdot x^2$$

positiv ist; und dazu gehört, dass $(AF - D^2)$, $(CF - E^2)$, und $[(AF - D^2)(CF - E^2) - (BF - DE)^2]$ positiv sind.

Der letzte Ausdruck reducirt sich aber auf

$$F \cdot (ACF + 2BDE - A \cdot E^2 - C \cdot D^2 - F \cdot B^2)$$

ist also positiv, wenn sein zweiter Factor mit F einerlei Zeichen hat.

Man vergleiche §. 12.

§. 17. Man soll die Bedingungen aufsuchen, wobei die Function

$$1)\quad \varphi(p, q, r, s) = A \cdot p^2 + 2B \cdot pq + C \cdot q^2 + 2D \cdot pr + 2E \cdot qr + F \cdot r^2 + 2G \cdot ps$$
$$+ 2H \cdot qs + 2K \cdot rs + L \cdot s^2$$

ihr Zeichen nicht wechseln kann, unter der Voraussetzung, dass A, B, C, D, E, F, G, H, K, L bestimmt und reell aber nicht Null sind, dagegen p, q, r, s jeden reellen Werth annehmen oder auch Null sein können.

Man setze $\frac{q}{p} = x$, $\frac{r}{p} = y$, und $\frac{s}{p} = z$; so gibt sich

$$2)\quad \varphi(p, q, r, s) = p^2 \cdot [(A + 2B \cdot x + C \cdot x^2 + 2D \cdot y + 2E \cdot xy + F \cdot y^2)$$
$$+ 2(G + H \cdot x + K \cdot y) \cdot z + L \cdot z^2]$$

Da nun p^2 sein Zeichen nicht ändern kann; so ändert $\varphi(p, q, r, s)$ auch sein Zeichen nicht, wenn es der zweite, d. h. der in die eckigen Klammern geschlossene Factor nicht ändert. Dieser zweite Factor hat aber für jeden reellen Werth von x, y, z einerlei Zeichen, und zwar das von L, wenn

$$L(A + 2B \cdot x + C \cdot x^2 + 2D \cdot y + 2E \cdot xy + F \cdot y^2) > (G + H \cdot x + K \cdot y)^2$$

d. h. wenn

$$(AL - G^2) + 2(BL - GH) \cdot x + (CL - H^2) \cdot x^2 + 2 \cdot (DL - GK) \cdot y$$
$$+ 2 \cdot (EL - HK) \cdot xy + (FL - K^2) \cdot y^2$$

positiv ist; und dazu gehört, dass $(FL - K^2)$ positiv ist, und zugleich für jeden reellen Werth des x auch noch stattfindet

$$(FL - K^2) . [(AL - G^2) + 2(BL - GH) . x + (CL - H^2) . x^2] > [(DL - GK) + (EL - HK) . x]^2$$

d. h. es muss noch

$$[(FL - K^2)(AL - G^2) - (DL - GK)^2] + 2 \cdot [(FL - K^2)(BL - GH) - (DL - GK)(EL - HK)] \cdot x$$
$$+ [(FL - K^2)(CL - H^2) - (EL - HK)^2] \cdot x^2$$

positiv sein, welches (nach §. 15) wiederum der Fall ist, wenn der erste und dritte Coefficient positiv, und zugleich das Product dieser beiden grösser ist, als das Quadrat des halben zweiten Coefficienten dieses letztern (nur noch x enthaltenden) Ausdruckes.

Es ist leicht, jeden ausgedehnteren Fall auf den nächst vorhergehenden zurückzuführen.

§. 18. Man soll die Bedingungen aufsuchen, wobei die Function

$$1) \quad \varphi(p, q) = A \cdot p^4 + B \cdot p^3 \cdot q + C \cdot p^2 \cdot q^2 + D \cdot p \cdot q^3 + E \cdot q^4$$

ihr Zeichen nicht wechseln kann, unter der Voraussetzung, dass A, B, C, D, E bestimmt und reell aber nicht Null sind, dagegen p und q jeden reellen Werth annehmen oder auch Null sein können.

Man setze $\frac{q}{p} = x$, so ist

$$2) \quad \varphi(p, q) = p^4 \cdot (A + Bx + C \cdot x^2 + D \cdot x^3 + E \cdot x^4)$$

Da p^4 sein Zeichen nicht ändern kann; so ändert auch $\varphi(p, q)$ das Zeichen nicht, wenn es der zweite Factor nicht ändert. Man weiss aber aus der Theorie der Gleichungen, dass $A + B \cdot x + C \cdot x^2 + D \cdot x^3 + E \cdot x^4$ für jeden reellen Werth des x das Zeichen nicht ändert, sobald aus der Gleichung $A + B \cdot x + C \cdot x^2 + D \cdot x^3 + E \cdot x^4 = 0$ sich lauter imaginäre Wurzeln ergeben.

Sucht man nun die Bedingungen auf, unter welchen alle Wurzeln dieser Gleichung imaginär werden; so erhält man die Merkmale, bei denen $\varphi(p, q)$ sein Zeichen nicht ändert. Dazu ist namentlich erforderlich, dass A und E einerlei Zeichen haben.

Man soll die Bedingungen aufsuchen, wobei die Function

$$\varphi(p, q) = A \cdot p^6 + B \cdot p^5 \cdot q + C \cdot p^4 \cdot q^2 + D \cdot p^3 \cdot q^3 + E \cdot p^2 \cdot q^4 + F \cdot p \cdot q^5 + G \cdot q^6$$

ihr Zeichen nicht wechseln kann.

Man setze wieder $\frac{q}{p} = x$, so bekommt man

$$\varphi(p, q) = p^6 \cdot (A + B \cdot x + C \cdot x^2 + D \cdot x^3 + E \cdot x^4 + F \cdot x^5 + G \cdot x^6)$$

Sucht man nun die Bedingungen auf, unter denen die Gleichung

$$A + B \cdot x + C \cdot x^2 + D \cdot x^3 + E \cdot x^4 + F \cdot x^5 + G \cdot x^6 = 0$$

lauter imaginäre Wurzeln hat; so ergeben sich die Merkmale, bei welchen $\varphi(p, q)$ das Zeichen nicht wechseln kann. Dazu gehört namentlich, dass A und G einerlei Zeichen haben.

Und so fort.

C. *Schluss.*

§. 19. Beide (in den §§. 11—18 mitgetheilten) Methoden finden geradezu Anwendung auf alle homogenen Functionen, welche, wenn sie auch gebrochene Exponenten haben, sich durch Substitution auf eine der bisher betrachteten Formen bringen lassen.

So z. B. ist

$$\psi(p, q) = A \cdot p^{\frac{2}{3}} + 2B \cdot p^{\frac{1}{3}} \cdot q^{\frac{1}{3}} + C \cdot q^{\frac{2}{3}}$$

$$= A \cdot \left(p^{\frac{1}{3}}\right)^2 + 2B \cdot p^{\frac{1}{3}} \cdot q^{\frac{1}{3}} + C \cdot \left(q^{\frac{1}{3}}\right)^2$$

$$= A \cdot p^2 + 2B \cdot p \cdot q + C \cdot q^2$$

wo man p anstatt $p^{\frac{1}{3}}$, und q anstatt $q^{\frac{1}{3}}$ gesetzt hat. Ebenso ist

$$\psi(p, q) = A \cdot p^{\frac{4}{5}} + 2B \cdot p^{\frac{2}{5}} \cdot q^{\frac{2}{5}} + C \cdot q^{\frac{4}{5}}$$

$$= A \cdot \left(p^{\frac{1}{5}}\right)^4 + 2B \cdot \left(p^{\frac{1}{5}}\right)^2 \cdot \left(q^{\frac{1}{5}}\right)^2 + C \cdot \left(q^{\frac{1}{5}}\right)^4$$

$$= A \cdot p^4 + 2B \cdot p^2 \cdot q^2 + C \cdot q^4$$

wo man p anstatt $p^{\frac{1}{5}}$, und q anstatt $q^{\frac{1}{5}}$ gesetzt hat.

Und so fort.

Es ist überflüssig, noch zu bemerken, dass hier, wo der Zeichenstand eines Ausdruckes untersucht wird, die imaginären Formen der Radicale unberücksichtigt bleiben müssen.

IV. Entwickelung ungesonderter Functionen in Reihen.

§. 20. Eine Reihe ist eine Folge von Ausdrücken (Glieder genannt), welche alle nach einem gemeinschaftlichen Gesetze gebildet sind.

Das Bildungsgesetz der Reihen ist entweder recurrent oder independent.

Das Bildungsgesetz ist recurrent, wenn nur bestimmt ist, wie jedes folgende Glied aus einem, oder aus einigen, oder aus allen der vorhergehenden Glieder gebildet wird.

Das Bildungsgesetz ist independent, wenn ein Ausdruck (allgemeines Glied genannt) hergestellt ist, welcher ein noch allgemeines Element in der Weise enthält, dass er das erste, zweite, dritte, etc. Glied geradezu liefert, sobald man an die Stelle dieses allgemeinen Elementes bezüglich die besondern Zahlen 1, 2, 3, etc. setzt.

Bei jeder Reihenbildung muss man sich von dem recurrenten Bildungsgesetze zu dem independenten zu erheben suchen.

Bei jeder Reihe muss man die syntaktischen und numerischen Eigenschaften unterscheiden.

Hinsichtlich der syntaktischen Eigenschaften berücksichtigt man nur die Operationen, welche zur Herstelluug einer Reihe angewendet werden. Die Elemente, aus welchen die Glieder gebildet werden, können entweder schon eine specielle Bedeutung haben, oder sie können noch ganz allgemein sein, d. h. weder als positiv, noch als negativ, weder als reell noch als imaginär gelten, so dass man sogar von der Form $p + q \cdot \sqrt{-1}$ nicht eher behaupten darf, sie bestehe aus einem reellen und einem imaginären Theile, bis p und q schon soweit specialisirt sind, dass beide nur reelle Bedeutung haben. Es gibt Reihen, welche nach steigenden oder nach fallenden Dimensionen eines oder mehrerer Fortschreitungselemente fortlaufen (steigende, fallende Reihen); und es gibt Reihen, welche kein Fortschreitungselement enthalten. Beiderlei Reihen können dann eine bestimmte Anzahl von Gliedern haben, oder die Anzahl der Glieder kann niemals geschlossen werden (geschlossene, unaufhörliche Reihen).

Hinsichtlich der numerischen Eigenschaften berücksichtigt man den Werth sowohl jedes einzelnen Gliedes als aller Glieder zusammen. Wenn aber die Glieder einer Reihe einmal numerische Bedeutung angenommen haben; so kann es öfters der Fall sein, dass das Bildungsgesetz spurlos verschwunden ist. Es gibt Reihen, wo von irgend einem Gliede ab der Werth jedes einzelnen der folgenden Glieder sich immer mehr der Null nähert, je weiter man die Reihe fortsetzt (abnehmende Reihen); es gibt Reihen, wo von irgend einem Gliede ab der Werth jedes einzelnen der folgenden Glieder sich immer mehr von Null entfernt, je weiter man die Reihe fortsetzt (zunehmende Reihen); es gibt Reihen, wo von irgend einem Gliede ab der Werth jedes einzelnen der auf einander folgenden Glieder bald sich der Null nähert, bald sich von Null entfernt (schwankende Reihen). Die Glieder einer Reihe können entweder alle das nemliche Vorzeichen, oder sie können theils das positive theils das negative Vorzeichen haben; und hierbei ist namentlich der Fall zu beachten, wo die Vorzeichen der Glieder periodisch wechseln. Es gibt Reihen, wo alle Glieder reell, und Reihen, wo alle Glieder imaginär sind; auch gibt es Reihen, wo reelle und imaginäre Glieder beisammen vorkommen.

Es ist also ein Unterschied zu machen zwischen dem Begriffe einer steigenden und dem einer zunehmenden Reihe, da die erste Benennung auf die syntaktischen, und die zweite auf die numerischen Eigenschaften hindeutet; und es kann (wenn die allgemeinen Elemente, aus denen die Glieder der Reihe gebildet sind, numerische Werthe annehmen) die steigende Reihe eine abnehmende, zunehmende, schwankende oder periodische, und die einzelnen Glieder können positiv, negativ, reell oder imaginär werden.

Ebenso ist ein Unterschied zu machen zwischen dem Begriffe einer fallenden und dem einer abnehmenden Reihe, da auch hier die erste Benennung auf die syntaktischen, und die zweite auf die numerischen Eigenschaften hindeutet; und es kann (wenn die allgemeinen Elemente, aus denen die Glieder der Reihe gebildet sind, numerische Werthe annehmen) die fallende Reihe eine abnehmende, zunehmende, etc. etc. werden, und die einzelnen Glieder können positiv, negativ, reell oder imaginär werden.

Eine unaufhörliche Reihe, wo alle Glieder numerische Werthe angenommen haben, und die Summe aller unendlichvielen Glieder eine feste angebbare Gränze nicht überschreiten kann, sondern sich dieser Gränze immer mehr nähern muss, je mehr Glieder man zusammen nimmt; eine solche Reihe heisst annähernd (convergent).

Eine unaufhörliche Reihe, wo alle Glieder numerische Werthe angenommen haben, und die Summe aller unendlichvielen Glieder zwar nicht unendlichgross wird, aber, während man immer mehr und mehr Glieder zusammennimmt, ohne Ende fort abwechselnd sich bald einer gewissen Gränze nähert, bald sich davon entfernt, oder, was das nemliche ist, abwechselnd bald eine gewisse Gränze übersteigt, bald wieder dahinter zurückbleibt; eine solche Reihe heisst eine annäherungsunfähige. Von ihr kann man sagen: „Sie hat keine Summe" oder „Sie hat keine numerische Bedeutung."

Eine unaufhörliche Reihe, wo alle Glieder numerische Werthe angenommen haben, und die Summe der Glieder sich desto mehr von jeder angebbaren Gränze entfernt, je mehr Glieder man zusammennimmt, also die Summe von unendlichvielen Gliedern auch unendlichgross wird; eine solche Reihe heisst divergent. Auch von ihr kann man sagen: „Sie hat keine numerische Bedeutung." Es gibt Reihen, wo die Glieder sich immer mehr und mehr der Null nähern und zuletzt sogar unendlichklein werden, die Summe aber doch unendlichgross ist, d. h. es gibt auch abnehmende Reihen, welche divergiren. Und so verwechsle man nicht den Begriff einer abnehmenden und den einer convergenten Reihe.

Um von der Convergenz einer unaufhörlichen Reihe überzeugt zu werden, muss man die beiden Gränzen angeben, zwischen welchen die Summe aller unendlichvielen Glieder liegt.

Wenn man bei einer unaufhörlichen Reihe nachweisen kann, dass von irgend einem Gliede ab sie noch schneller convergirt, als eine andere Reihe, deren Convergenz schon feststeht; so muss nothwendig auch erstere Reihe convergent sein. Wenn also eine Reihe vorliegt, wo gegen irgend ein Glied die Summe aller nachfolgenden im

Momente des Verschwindens ist, so ist man von der Convergenz einer solchen Reihe geradezu überzeugt.

Eine unaufhörliche Reihe, wo die Vorzeichen der Glieder nach festen Perioden wechseln, kann als convergent gelten, wenn, sobald man jede Periode in ein einziges Glied zusammenzieht, sich eine neue Reihe ergibt, welche den Bedingungen der Convergenz genügt. Eine unaufhörliche Reihe, wo die Vorzeichen der Glieder periodisch abwechseln, kann also oft convergent sein, während sie, wenn alle Glieder einerlei Vorzeichen hätten, divergent wäre. (Man erinnere sich, dass die Differenz $\infty - \infty$ oft einen bestimmten angebbaren Werth haben kann.)

Reihen, welche langsam convergiren, können in solche verwandelt werden, welche schnell convergiren. Dieses ist ein Hauptpunkt in der Lehre der Reihen.

§. 21. Die unaufhörlichen Reihen sind der allgemeine, und die geschlossenen sind der besondere Begriff; denn jede geschlossene Reihe kann zugleich als solche unaufhörliche gelten, wo alle die noch fehlenden unendlichvielen Glieder zu Null geworden sind, während keine unaufhörliche Reihe als geschlossene angesehen werden kann. Der besondere Begriff enthält alle Merkmale des allgemeinen, aber nicht umgekehrt. Daher gilt Alles, was von allen unaufhörlichen Reihen überhaupt gilt, auch von allen geschlossenen; aber nicht Alles, was von allen geschlossenen Reihen überhaupt gilt, gilt auch von allen unaufhörlichen.

Von allen geschlossenen Reihen überhaupt gilt, dass sie syntaktische Bedeutung haben, d. h. nach einem bestimmten Bildungsgesetze gebildet sein müssen; dieses gilt auch von allen unaufhörlichen Reihen überhaupt.

Ferner gilt von allen geschlossenen Reihen überhaupt, dass sie einer numerischen Bedeutung fähig sind; dieses gilt von allen unaufhörlichen Reihen überhaupt nicht, sondern nur von denen, welche convergent sind.

Reihen, deren Glieder schon soweit specialisirt sind, dass man weiss, dass reelle und imaginäre Ausdrücke dabei vorkommen, muss man in zwei Theile zerlegen, wovon der eine die reellen, der andere die imaginären Ausdrücke enthält, was jedesmal angeht, da jeder imaginäre Ausdruck auf die Form $a + b \cdot \sqrt{-1}$ gebracht werden kann, wo a und b reell sind. Eine solche Reihe wird dann aus zwei Theilen von folgender Form

$$(A' + A'' + A''' + \ldots) + (B' + B'' + B''' + \ldots) \cdot \sqrt{-1}$$

bestehen, wo die Ausdrücke $A', A'', A''', \ldots\, B', B'', B''' \ldots$ alle reell sind. Da das Reelle und Imaginäre nicht zusammen summirt werden können, so wird man die von $\sqrt{-1}$ freien Theilsätze für sich allein, und ebenso die zu $\sqrt{-1}$ gehörigen reellen Coefficienten für sich allein summiren. Bestehen dann beide Theile $(A' + A'' + A''' \ldots)$ und $(B' + B'' + B''' \ldots)$ aus unaufhörlichen Reihen, so muss jeder für sich convergent sein; denn ist entweder einer oder sind gar beide zugleich divergent, so hat die Reihe

$$(A' + A'' + A''' + \ldots) + (B' + B'' + B''' + \ldots) \cdot \sqrt{-1}$$

keine numerische Bedeutung.

Es gibt Reihen, welche lauter reelle Glieder bekommen und behalten, man mag den Elementen, aus denen die Glieder gebildet sind, reelle Werthe beilegen, welche man will (ganzreelle Reihen); es gibt aber auch Reihen, welche imaginäre Glieder bekommen und behalten, man mag den Elementen, aus denen die Glieder gebildet sind, reelle Werthe beilegen, welche man will (ganzimaginäre Reihen). Ferner gibt es auch Reihen, wo einige oder alle Glieder vom Reellen ins Imaginäre oder umgekehrt übergehen, wenn man die Elemente, woraus die Glieder gebildet sind, bald so bald so specialisirt, z. B. wenn man irgend ein Element vom Positiven ins Negative oder umgekehrt übergehen lässt. Solche Reihen, welche nur unter gewissen Umständen lauter reelle Glieder haben, findet man zuweilen mit dem Namen „halbreelle Reihen“ belegt.

Wenn in einer (steigenden oder fallenden) unaufhörlichen Reihe von irgend einem Gliede ab jedes folgende gegen das ihm vorhergehende im Momente des Verschwindens ist, d. h. von diesem Gliede ab kein Glied durch die Summe aller nachfolgenden um etwas Angebbares vermehrt oder vermindert werden kann; so muss man dennoch aus dem Bildungsgesetze wissen, welche Bewandtniss es mit der Realität aller Glieder hat; denn sowie das Reelle und das Imaginäre nicht zusammen summirt werden können, ebenso darf das eine nicht gegen das andere in den Moment des Verschwindens gesetzt werden, und eine Reihe hat keinen reellen Werth, sobald eines ihrer wenn auch noch so späten Glieder imaginär wird. Diese Bemerkung verdient aber alle Aufmerksamkeit; und es ist nicht nöthig, Fälle aufzuzählen, wo Analytiker, die mit verschwindendkleinen Ausdrücken operirten, dadurch dass sie sich um die Realität der späteren (aber jedesmal vernachlässigten) Glieder nicht bekümmerten, Fehlschlüsse begingen, und sich, wenn sie nachher auf irgend einem Wege die Falschheit ihres Resultates entdeckten, nicht zu helfen wussten (s. z. B. die Aufgaben 11, 12, 15).

Die geschlossenen Reihen kann man immer ohneweiters zu jedem Zwecke benützen; bei den unaufhörlichen Reihen muss man aber sorgfältig beachten, was für einen Gebrauch man davon machen will. Wenn man nemlich eine unaufhörliche Reihe nur rein nach ihrer syntaktischen Bedeutung zu benützen und anzuwenden hat, so braucht man sich um ihre Convergenz oder Divergenz nicht zu bekümmern; und wenn die Elemente, aus denen die Glieder gebildet werden, noch ganz allgemein sind, so kann man sich oft nicht darum bekümmern, ob die Reihe divergent oder convergent sei, da sie in diesem Falle oft weder als convergent noch als divergent gelten kann. Wenn man aber eine unaufhörliche Reihe nach ihrer numerischen Bedeutung benützen, z. B. damit rechnen soll; so muss sie auch eine numerische Bedeutung haben, d. h. convergent sein. Vergisst man daher bei einer nach der numerischen Bedeutung zu benützenden Reihe, sich vor Allem von deren Convergenz zu überzeugen; so läuft man Gefahr, sich in endlose Irrthümer und Widersprüche zu verwirren.

So oft im Calcul, in der Geometrie, in der Physik, etc. Zahlenwerthe oder Grössen durch unaufhörliche Reihen dargestellt werden, müssen diese allerdings convergent sein; und wenn die Elemente, aus denen die Glieder gebildet werden, noch ganz allgemein sind, so müssen dergleichen Reihen doch in der Idee als convergent gedacht werden.

Aeltere Analytiker haben allerdings den Fehler begangen, nichtconvergente Reihen in solchen Fällen zu gebrauchen, wo sie convergent sein müssen.

§. 22. Die Entstehungsart der Reihen, sowohl der mit recurrentem als auch der mit independentem Bildungsgesetze, ist zweierlei; die Reihen können nemlich entweder

1) gradezu durch Definition gegeben sein; oder sie können
2) sich dadurch ergeben, dass man einen vorgelegten Ausdruck in eine Reihe verwandelt.

Bei Reihen, welche durch Definition gegeben sind, steht das Bildungsgesetz und somit auch ihre syntaktische Bedeutung fest; bei ihnen hat man daher nur zu untersuchen, wie der Ausdruck beschaffen ist, welcher der Summe aller (wenn auch unendlichvieler) Glieder gleichkommt. Die Definition muss dann auch angeben, ob die Reihe eine geschlossene oder unaufhörliche sein soll.

Bei Reihen, welche durch Entwickelung eines vorgelegten Ausdruckes sich ergeben, besteht die Hauptaufgabe darin, das Bildungsgesetz der einzelnen Glieder aufzusuchen; und wenn irgend ein Ausdruck sowohl in eine steigende als auch in eine fallende Reihe verwandelt werden kann, so kann es der Fall sein, dass dann unter gewissen Bedingungen die steigende Reihe convergirt und die fallende divergirt, während unter andern Bedingungen die steigende Reihe divergirt und die fallende convergirt. Diese Bedingungen muss man bei jeder Reihe eigens aufsuchen.

Wenn man einen Ausdruck in eine Reihe verwandelt, und eine geschlossene Reihe sich ergibt; so repräsentirt diese Reihe den vorgegebenen Ausdruck vollständig. Wenn aber die Reihe keine geschlossene sein kann, und man sie doch bei irgend einem Gliede abbricht; so repräsentirt diese bestimmte Gliedermenge den vorgegebenen Ausdruck nicht,

sondern man muss noch einen Theilsatz (Ergänzung genannt) hinzufügen, der so beschaffen ist, dass er und die grade genommene Gliedermenge den vorgegebenen Ausdruck vollständig repräsentiren. Die Ergänzung wird aber bei einer und derselben Reihe verschieden ausfallen, je nachdem man die Reihe bei einem früheren oder späteren Gliede abbricht. Will man aber eine bei Entwickelung eines Ausdruckes sich ergebende unaufhörliche Reihe ohne Aufhören fort und fort verfolgen, was freilich nicht ausführbar sondern nur in der Idee gedenkbar ist; so gelangt man an keine Stelle, wo man abbrechen darf, also auch an keine Stelle, wo man die Ergänzung hinsetzen kann, sondern muss diese ohne Aufhören in immer weitere und weitere Ferne hinausdrängen.

Wenn man einen Ausdruck nur in eine unaufhörliche Reihe verwandeln kann, und eine gewisse Gliedermenge nebst der Ergänzung hergestellt hat; so muss diese hergestellte Gliedermenge und die Ergänzung zusammen dem vorgegebenen Ausdrucke gleich sein. Daraus folgt

1) Wenn eine aus einem vorgegebenen Ausdrucke sich ergebende unaufhörliche Reihe convergent ist, und, je mehr Glieder man nimmt, der Werth der jedesmaligen Ergänzung sich auch desto mehr der Null nähert; wenn also die nach unendlichvielen Gliedern noch hinzuzudenkende Ergänzung um nichts Angebbares mehr von Null verschieden ist; so ist auch der Werth der unendlichvielen Glieder um nichts Angebbares mehr von dem Werthe des vorgegebenen Ausdruckes verschieden. Unter diesen Umständen ist der Werth einer unendlichgrossen Gliedermenge dem Werthe des vorgegebenen Ausdruckes vollkommen gleich, d. h. Alles was von dem Werthe der unendlichgrossen Gliedermenge gilt, gilt auch von dem Werthe des vorgegebenen Ausdruckes selbst. Will man aber versichert sein, dass man durch eine bestimmte Gliedermenge den Werth eines Ausdruckes annäherungsweise berechnen kann; so muss man im Stande sein, den Werth der Ergänzung oder doch wenigstens die beiden Gränzen, zwischen welchen dieser Werth liegt, angeben zu können.

2) Wenn eine aus einem vorgegebenen Ausdrucke sich ergebende unaufhörliche Reihe annäherungsunfähig ist, so nähert sich der Werth der Ergänzung nicht fort und fort der Null, je mehr Glieder man nimmt. Eine solche Reihe ist also, auch wenn man unendlichviele Glieder nimmt, niemals geeignet, den Werth des vorgegebenen Ausdruckes auch nur annäherungsweise zu bestimmen, sondern es muss jedesmal die Ergänzung dazu kommen.

3) Wenn eine aus einem vorgegebenen Ausdrucke sich ergebende unaufhörliche Reihe divergent ist, so übersteigt die Reihe den Werth des vorgegebenen Ausdruckes immer mehr und mehr, je mehr Glieder man nimmt; die Ergänzung muss sich also auch immer mehr von Null entfernen, um den dadurch, dass man immer mehr Glieder zusammennimmt, sich auch immer mehr vergrössernden Fehler wieder gut zu machen.

Es ist von selbst klar, dass eine aus einem vorgegebenen Ausdrucke hergestellte unaufhörliche Reihe, welche nicht convergirt, und nicht mit der gehörigen Ergänzung versehen ist, auch niemals uns berechtigen kann, einen Schluss auf den Werth des vorgegebenen Ausdruckes zu machen. Hat z. B. eine solche unaufhörliche Reihe lauter reelle Glieder, so kann der Werth des vorgegebenen Ausdruckes eben so gut reell als imaginär sein; und umgekehrt, wenn eine solche Reihe lauter imaginäre Glieder hat, so kann der Werth des vorgegebenen Ausdruckes eben so gut reell als imaginär sein.

Bei unaufhörlichen Reihen, welche durch Definition gegeben sind, kann, wie sich von selbst versteht, von einer Ergänzung keine Rede sein.

Die im ganzen Calcul so wichtigen Regeln:

1) „Jede Entwickelung ist falsch, wenn dereinst ein wenn auch noch so spätes „Glied Null in den Nenner bekommt"; und

2) „Wenn man aufsuchen will, in welchen Fällen die grade ausgeführte Entwickelung ihre Giltigkeit verliert, so untersuche man, ob man bei einem, oder bei einigen, „oder bei allen Gliedern die Nenner so specialisiren kann, dass diese Nenner zu Null

„werden; dabei wird man erkennen, ob in allen Fällen die ausgeführte Entwickelung „giltig ist, oder in welchen Fällen sie nicht giltig ist, d. h. welche Fälle man als Aus- „nahmsfälle besonders behandeln muss"
sind schon einmal (§. 5.) berührt, und werden später noch sehr oft benützt werden.

Diese äusserst wichtigen Regeln sind vielen Analytikern unbekannt geblieben; diese haben dann, wenn sie einmal auf so einen Ausnahmsfall stiessen, sich auf die possierlichste Weise zu helfen gesucht, und nicht selten ausgesprochen: „Die Analysis verlässt uns hier." Kennt man aber obige zwei Regeln, so erkennt man auch, dass die Analysis, fort und fort die zuverlässigste Führerin, auch an den Stellen, wo ein Seitenweg eingeschlagen werden muss, uns zuruft, inne zu halten. Somit erscheint das, was solche Analytiker für ein Gebrechen halten, geradezu als Vortheil, der nicht genug zu schätzen ist.

Nach Aufzählung dieser (in den drei letzten §§. mitgetheilten) Thatsachen, welche in der Elementaranalysis ihre Begründung gefunden haben, soll das vorgelegte Problem auch wirklich vorgenommen werden.

§. 23. Ist die ungesonderte Function $\varphi(u, v) = 0$ gegeben, und soll für u eine nach (steigenden oder fallenden) Potenzen des v fortlaufende Reihe entwickelt werden; so wird man, um bequem operiren zu können, die gegebene Function zuerst auf die einfachste Form bringen. Dahin gehört namentlich, dass man ihre transcendenten Bestandtheile in eine algebraische Form umsetzt, und dass man dann alle einzelnen Theilsätze in eine gewisse Ordnung bringt. Ist ausserdem $\varphi(u, v) = 0$ eine Gleichung mit einer bestimmten Anzahl von Theilsätzen; so ist es gewiss bequem, wenn man alle negativen Potenzen des u und des v wegmultiplicirt, und hierauf noch so viele Dimensionen des u und des v wegdividirt, als möglich. Dieses wird sich aber nicht immer als vortheilhaft erweisen, wenn $\varphi(u, v) = 0$ eine Gleichung mit einer unendlichen Anzahl von Theilsätzen ist; sondern in diesem Falle ist es besser, vor Allem irgend ein Gesetz in die gegebene Gleichung zu bringen.

Man suche zuerst eine steigende Reihe, und gebe ihr die Form

$$\text{I)}\quad u = A_1 . v^a + A_2 . v^{a+b} + A_3 . v^{a+b+c} + A_4 . v^{a+b+c+d} + \ldots\ldots$$

wo a eine (ganze oder gebrochene) positive oder negative Zahl oder auch Null sein kann, dagegen, eben weil die Reihe eine steigende sein muss, durch die Buchstaben b, c, d ... nur positive (ganze oder gebrochene) Zahlen vorgestellt sein dürfen. Die gegebene Gleichung, aus welcher die Reihe entwickelt werden soll, sei nun folgende:

$$\text{II)}\quad \left\{\begin{array}{l} P \cdot v^p + Q \cdot v^{p+q} + S \cdot v^{p+q+s} + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + N \cdot u^n \cdot v^{n'} + M \cdot u^m \cdot v^{m'} + K \cdot u^k \cdot v^{k'} + H \cdot u^h \cdot v^{h'} \\ + G \cdot u^g \cdot v^{g'} + F \cdot u^f \cdot v^{f'} + E \cdot u^e \cdot v^{e'} + \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0$$

Diese Gleichung ist in zwei Theile getheilt, welche geschlossene oder unaufhörliche Reihen sein können. Der erste Theil enthält das u nicht, und ist nach steigenden Potenzen des v geordnet, wo, wenn auch p negativ ist, doch q, s, ... positiv sein müssen, weil $p < (p+q)$, $(p+q) < (p+q+s)$, etc. ist. Der zweite Theil enthält die mit u versehenen Theilsätze, und ist nach steigenden Potenzen des u geordnet, so dass also $n < m$, $m < k$, $k < h$, $h < g$, etc. etc. ist. Sollte aber irgend eine Dimension des u mehrmals vorkommen, so muss die Anordnung von der Art sein, dass jedesmal die niedrigere Dimension des v der höheren vorangeht. Dabei bemerke man aber, dass ein negativer Exponent für desto kleiner gilt, je grösser sein absoluter Werth ist.

Führt man nun die Reihe I in die Gleichung II ein, so bekommt man

$$\text{III)}\quad P \cdot v^{p} + Q \cdot v^{p+q} + S \cdot v^{p+q+s} + \ldots\ldots$$

$$+\left\{\begin{array}{l} N . A_1^{n} \cdot v^{n'+na} + n \cdot N \cdot A_1^{n-1} \cdot (A_2 \cdot v^{b} + A_3 \cdot v^{b+c} + \ldots.) \cdot v^{n'+na} \\ + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} \cdot N \cdot A_1^{n-2} \cdot (A_2 \cdot v^{b} + A_3 \cdot v^{b+c} + \ldots.)^2 \cdot v^{n'+na} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l} M \cdot A_1^{m} \cdot v^{m'+ma} + m \cdot M \cdot A_1^{m-1} \cdot (A_2 \cdot v^{b} + A_3 \cdot v^{b+c} + \ldots.) \cdot v^{m'+ma} \\ + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} . M . A_1^{m-2} \cdot (A_2 \cdot v^{b} + A_3 \cdot v^{b+c} + \ldots.)^2 \cdot v^{m'+ma} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l} K \cdot A_1^{k} \cdot v^{k'+ka} + k \cdot K \cdot A_1^{k-1} \cdot (A_2 \cdot v^{b} + A_3 \cdot v^{b+c} + \ldots.) \cdot v^{k'+ka} \\ + \frac{k(k-1)}{1\,.\,2} . K . A_1^{k-2} \cdot (A_2 \cdot v^{b} + A_3 \cdot v^{b+c} + \ldots.)^2 \cdot v^{k'+ka} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l} H . A_1^{h} \cdot v^{h'+ha} + h \cdot H \cdot A_1^{h-1} \cdot (A_2 \cdot v^{b} + A_3 \cdot v^{b+c} + \ldots.) \cdot v^{h'+ha} \\ + \frac{h(h-1)}{1\,.\,2} . H . A_1^{h-2} \cdot (A_2 \cdot v^{b} + A_3 \cdot v^{b+c} + \ldots.)^2 \cdot v^{h'+ha} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l} G . A_1^{g} \cdot v^{g'+ga} + g \cdot G \cdot A_1^{g-1} \cdot (A_2 \cdot v^{b} + A_3 \cdot v^{b+c} + \ldots.) \cdot v^{g'+ga} \\ + \frac{g(g-1)}{1\,.\,2} . G . A_1^{g-2} \cdot (A_2 \cdot v^{b} + A_3 \cdot v^{b+c} + \ldots.)^2 \cdot v^{g'+ga} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 0$$

Zunächst weiss man von dieser Gleichung, dass sie eine identische ist, d. h. für jeden Werth des v gilt; und daraus folgt, dass jedesmal die Summe aller Theilsätze, welche das v in einerlei Dimension enthalten, für sich verschwindet, dass also diese Gleichung in so viele einzelne Gleichungen zerfällt, als das v in verschiedenen Dimensionen vorkommt.

In den Lehrbüchern der Elementaranalysis ist diese Wahrheit auf mancherlei Weise bewiesen worden; und es ist nicht nöthig, auch hier einen solchen Beweis noch einmal aufzustellen.

§. 24. Es kommt nun darauf an, auszumitteln, welche Theilsätze in Gleichung III die niedrigste Dimension des v enthalten; diese Theilsätze können sich aber offenbar nur unter folgenden

$$P \cdot v^{p},\ N \cdot A_1^{n} \cdot v^{n'+na},\ M \cdot A_1^{m} \cdot v^{m'+ma},\ K \cdot A_1^{k} \cdot v^{k'+ka},\ H \cdot A_1^{h} \cdot v^{h'+ha},$$

$$G \cdot A_1^{g} \cdot v^{g'+ga},\ F \cdot A_1^{f} \cdot v^{f'+fa},\ E \cdot A_1^{e} \cdot v^{e'+ea},\ \text{etc., etc.}$$

befinden, und es handelt sich zunächst darum, für a einen solchen Werth aufzufinden, dass von den Zahlen

$$p,\ (n'+na),\ (m'+ma),\ (k'+ka),\ (h'+ha),\ (g'+ga),\ (f'+fa),\ (e'+ea),\ \text{etc., etc.}$$

zwei oder mehrere einander gleich und dabei kleiner als alle übrigen werden. Zunächst ist klar, dass nicht jeder der unbestimmten Exponenten $(n'+na)$, $(m'+ma)$, $(k'+ka)$, etc. grösser werden darf, als der bestimmte Exponent p; denn dabei würde der Theilsatz $P \cdot v^{p}$ für sich allein dastehen mit seiner niedrigsten Dimension des v. Man vergleiche nun alle unbestimmten Exponenten zunächst mit p, und stelle zu dem Ende folgende Gleichungen auf:

$$\begin{aligned} p &= p \\ n' + na &= p + n \cdot \left(a - \frac{p - n'}{n}\right) \\ m' + ma &= p + m \cdot \left(a - \frac{p - m'}{m}\right) \\ k' + ka &= p + k \cdot \left(a - \frac{p - k'}{k}\right) \\ h' + ha &= p + h \cdot \left(a - \frac{p - h'}{h}\right) \\ g' + ga &= p + g \cdot \left(a - \frac{p - g'}{g}\right) \\ f' + fa &= p + f \cdot \left(a - \frac{p - f'}{f}\right) \\ e' + ea &= p + e \cdot \left(a - \frac{p - e'}{e}\right) \end{aligned} \qquad \odot$$

.

Erstens. Sucht man nun unter den Quotienten $\frac{p - n'}{n}$, $\frac{p - m'}{m}$, $\frac{p - k'}{k}$, $\frac{p - h'}{h}$, $\frac{p - g'}{g}$, $\frac{p - f'}{f}$, $\frac{p - e'}{e}$, etc. den grössten auf; und findet man, dass nur einer dieser Quotienten der grösste werden kann, und dass z. B. $\frac{p - k'}{k}$ dieser grösste ist; so setze man $a = \frac{p - k'}{k}$, und es wird $k' + ka = p$, dagegen alle andern Exponenten $(n' + na)$, $(m' + ma)$, $(h' + ha)$, $(g' + ga)$, $(f' + fa)$, $(e' + ea)$, etc. werden grösser als p. **Somit ist** $a = \frac{p - k'}{k}$ **ein brauchbarer Werth des a.**

Betrachtet man nochmals die obigen Gleichungen, so erkennt man, dass nicht $a > \frac{p - k'}{k}$ werden darf, weil dabei jeder der Exponenten $(n' + na)$, $(m' + ma)$, $(k' + ka)$, $(h' + ha)$, etc. grösser werden würde, als p; dagegen kann es möglich sein, dass mancher brauchbare Werth des a kleiner ist als $\frac{p - k'}{k}$. Sobald aber $a < \frac{p - k'}{k}$ so ist $(k' + ka) < p$, $(k' + ka) < (n' + na)$, und $(k' + ka) < (m' + ma)$. Diese Ungleichungen ergeben sich durch einfache Betrachtung der Gleichungen $\odot$, und die zwei letzten dieser Ungleichungen finden namentlich desshalb statt, weil $k > n$, und $k > m$. Unter der Voraussetzung also, dass man $a < \frac{p - k'}{k}$ nehmen will, kann man den Exponent $(k' + ka)$ nur mit den nachfolgenden vergleichen. Zu diesem Ende stelle man sich folgende Gleichungen auf:

$$\begin{aligned} k' + ka &= k' + ka \\ h' + ha &= k' + ka + (h - k) \cdot \left(a - \frac{k' - h'}{h - k}\right) \\ g' + ga &= k' + ka + (g - k) \cdot \left(a - \frac{k' - g'}{g - k}\right) \\ f' + fa &= k' + ka + (f - k) \cdot \left(a - \frac{k' - f'}{f - k}\right) \\ e' + ea &= k' + ka + (e - k) \cdot \left(a - \frac{k' - e'}{e - k}\right) \end{aligned} \qquad \supset$$

. .

Alle die Differenzen $(h - k)$, $(g - k)$, $(f - k)$, $(e - k)$, etc. sind positiv; ferner ist

jeder der Quotienten $\frac{k'-h'}{h-k}$, $\frac{k'-g'}{g-k}$, $\frac{k'-f'}{f-k}$, $\frac{k'-e'}{e-k}$, etc. kleiner, als $\frac{p-k'}{k}$, wie auf folgende Weise bewiesen werden mag:

Weil $\frac{p-k'}{k} > \frac{p-h'}{h}$ gefunden worden ist, so ist auch $h(p-k') > k\cdot(p-h')$, also auch $p\cdot(h-k) > (h\cdot k'-h'k)$, oder $p > \frac{h\cdot k'-h'\cdot k}{h-k}$. Subtrahirt man k' auf beiden Seiten dieser Ungleichung, so hat man $(p-k') > \frac{k\cdot(k'-h')}{h-k}$, und daraus folgt $\frac{p-k'}{k} > \frac{k'-h'}{h-k}$.

Ebenso wird bewiesen, dass $\frac{p-k'}{k} > \frac{k'-g'}{g-k}$, etc., etc.

Sucht man jetzt unter den Quotienten $\frac{k'-h'}{h-k}$, $\frac{k'-g'}{g-k}$, $\frac{k'-f'}{f-k}$, $\frac{k'-e'}{e-k}$, etc. den grössten, und findet man, dass nur einer dieser Quotiente der grösste werden kann, und dass z. B. $\frac{k'-g'}{g-k}$ dieser grösste Quotient ist; so setze man $a = \frac{k'-g'}{g-k}$, und es wird $k'+ka = g'+ga$, dagegen alle andern Exponenten werden grösser; somit ist auch $a = \frac{k'-g'}{g-k}$ ein brauchbarer Werth des a.

Es kann aber auch noch mancher brauchbare Werth des a kleiner sein, als $\frac{k'-g'}{g-k}$. Sobald aber $a < \frac{k'-g'}{g-k}$, so ist $(g'+ga) < (k'+ka)$, und $(g'+ga) < (h'+ha)$; diese Ungleichungen ergeben sich durch einfache Betrachtung der Gleichungen ↄ, und die letzte dieser Ungleichungen findet namentlich desshalb statt, weil $h < g$. Unter der Voraussetzung also, dass man $a < \frac{k'-g'}{k-g}$ nehmen will, kann man den Exponenten $(g'+ga)$ nur mit den nachfolgenden vergleichen. Zu diesem Ende stelle man sich folgende Gleichungen auf:

$$g'+ga = g'+ga$$
$$f'+fa = g'+ga+(f-g)\cdot\left(a-\frac{g'-f'}{f-g}\right)$$
ȝ $$e'+ea = g'+ga+(e-g)\cdot\left(a-\frac{g'-e'}{e-g}\right)$$
. .

Alle die Differenzen $(f-g)$, $(e-g)$, etc. sind positiv; ferner ist jeder der Quotienten $\frac{g'-f'}{f-g}$, $\frac{g'-e'}{e-g}$, etc. kleiner als $\frac{k'-g'}{g-k}$, wie auf folgende Weise bewiesen werden mag:

Weil $\frac{k'-g'}{g-k} > \frac{k'-f'}{f-k}$ gefunden worden ist, so ist auch

$$[k'\cdot(f-k)-g'\cdot(f-k)] > [k'\cdot(g-k)-f'\cdot(g-k)]$$

also auch

$$k'\cdot(f-g) > [g'\cdot(f-k)-f'\cdot(g-k)]$$

oder

$$k' > \frac{g'\cdot(f-k)-f'\cdot(g-k)}{f-g}$$

Subtrahirt man jetzt g' auf beiden Seiten dieser Ungleichung; so hat man

$$(k'-g') > \frac{(g-k)\cdot(g'-f')}{f-g}$$

und daraus folgt

$$\frac{k'-g'}{g-k} > \frac{g'-f'}{f-g}$$

Ebenso wird bewiesen, dass $\frac{k'-g'}{g-k} > \frac{g'-e'}{e-g}$, etc., etc. Sucht man jetzt unter den Quotienten $\frac{g'-f'}{f-g}$, $\frac{g'-e'}{e-g}$ etc. den grössten, und findet man, dass nur einer dieser Quotienten der grösste werden kann, und dass z. B. $\frac{g'-f'}{f-g}$ dieser grösste Quotient ist; so setze man $a = \frac{g'-f'}{f-g}$, und es wird $g' + ga = f' + fa$, dagegen alle andern Exponenten werden grösser; somit ist auch $a = \frac{g'-f'}{f-g}$ ein brauchbarer Werth des a.

Es kann aber noch mancher brauchbare Werth des a kleiner sein, als $\frac{g'-f'}{f-g}$. Sobald aber $a < \frac{g'-f'}{f-g}$, so ist $(f' + fa) < (g' + ga)$. Diese Ungleichung ergibt sich durch einfache Betrachtung der Gleichungen ♄. Unter der Voraussetzung also, dass man $a < \frac{g'-f'}{f-g}$ nehmen will, kann man den Exponenten $(f' + fa)$ nur mit den nachfolgenden vergleichen. Zu diesem Ende stelle man sich folgende Gleichungen auf

$$f' + fa = f' + fa$$

$$♀ \qquad e' + ea = f' + fa + (e-f) \cdot \left(a - \frac{f'-e'}{e-f}\right)$$

. .

Alle Differenzen $(e - f)$, etc. sind positiv; ferner ist jeder der Quotienten $\frac{f'-e'}{e-f}$, etc. kleiner als $\frac{g'-f'}{f-g}$, worüber der Beweis geführt wird, wie bei den vorigen Fällen. Nun suche man unter den Quotienten $\frac{f'-e'}{e-f}$, etc. den grössten, und setze a diesem grössten Quotienten gleich, etc.

Sollte $(e' + ea)$ der letzte unter den unbestimmten Exponenten sein, so ist $\frac{f'-e'}{e-f}$ nothwendig ein brauchbarer Werth des a, und zugleich der kleinste unter allen brauchbaren Werthen des a.

Aus allem Vorhergehenden ist nun ersichtlich, dass der grösste unter den brauchbaren Werthen des a sich nur aus einer Gleichung ergibt, in welcher der erste der bestimmten Fxponenten (hier p) vorkommt, und dass der kleinste unter den brauchbaren Werthen des a sich nur aus einer Gleichung ergibt, in welcher der letzte der unbestimmten Exponenten (hier $e' + ea$) vorkommt.

Zweitens. Geht man wieder zu den Gleichungen ☉ zurück, und sucht man unter den Quotienten $\frac{p-n'}{n}$, $\frac{p-m'}{m}$, $\frac{p-k'}{k}$, $\frac{p-h'}{h}$, $\frac{p-g'}{g}$, $\frac{p-f'}{f}$, $\frac{p-e'}{e}$, etc. den grössten auf, und findet man, dass zwei dieser Quotienten die grössten also auch einander gleich werden, und z. B. $\frac{p-m'}{m}$ und $\frac{p-h'}{h}$ diese grössten sind; so setze man $a = \frac{p-m'}{m} = \frac{p-h'}{h}$, und es wird $m' + ma = h' + ha = p$, dagegen alle andern Exponenten $(n' + na)$, $(k' + ka)$, $(g' + ga)$, $(f' + fa)$, $(e' + ea)$, etc. werden grösser als p. Somit ist $a = \frac{p-m'}{m} = \frac{p-h'}{h}$ ein brauchbarer Werth des a.

Sobald $a < \frac{p - m'}{m}$ oder $a < \frac{p - h'}{h}$; so ist $(h' + ha) < p$, $(h' + ha) < (n' + na)$, $(h' + ha) < (m' + ma)$, $(h' + ha) < (k' + ka)$. Diese Ungleichungen ergeben sich durch einfache Betrachtung der Gleichungen ⊙, und die drei letzten dieser Ungleichungen finden namentlich desshalb statt, weil $h > n$, $h > m$ und $h > k$. Unter der Voraussetzung also, dass man $a < \frac{p - m'}{m}$ oder $a < \frac{p - h'}{h}$ nehmen will, kann $(h' + ha)$ nur unter den nachfolgenden Exponenten einen gleichen finden. Zu diesem Ende stelle man sich folgende Gleichungen auf:

$$h' + ha = h' + ha$$

$$g' + ga = h' + ha + (g - h) \cdot \left(a - \frac{h' - g'}{g - h}\right)$$

$$f' + fa = h' + ha + (f - h) \cdot \left(a - \frac{h' - f'}{f - h}\right)$$

$$e' + ea = h' + ha + (e - h) \cdot \left(a - \frac{h' - e'}{e - h}\right)$$

. .

Alle die Differenzen $(g - h)$, $(f - h)$, $(e - h)$, etc. sind positiv; ferner ist jeder der Quotienten $\frac{h' - g'}{g - h}$, $\frac{h' - f'}{f - h}$, $\frac{h' - e'}{e - h}$, etc. kleiner als $\frac{p - h'}{h}$, worüber der Beweis ebenso geführt wird, wie schon früher geschehen ist. Unter diesen Quotienten sucht man jetzt wieder den grössten oder die grössten auf, etc.

Ueberhaupt wird man, sobald von den Exponenten p, $(m' + ma)$, $(n' + na)$, $(k' + ka)$, $(h' + ha)$, $(g' + ga)$, $(f' + fa)$, $(e' + ea)$, etc. mehrere **zugleich** einen für a brauchbaren Werth liefern, und dadurch einander gleich werden, bei Aufsuchung eines **neuen** für a brauchbaren Werthes jedesmal von demjenigen der gleichgewordenen Exponenten weiter gehen, welcher von dem ersten am weitesten absteht; und dieses Verfahren wird man so lange fortsetzen, bis man den kleinsten für a brauchbaren Werth gefunden hat. Dieser kleinste für a brauchbare Werth ergibt sich aber aus einer solchen Gleichung, in welcher der letzte der unbestimmten Exponenten (hier $e' + ea$) vorkommt, sowie sich der grösste für a brauchbare Werth aus einer solchen Gleichung ergeben hat, in welcher der erste der bestimmten Exponenten (hier p) vorkommt.

Wenn also in $\varphi(u, v) = o$ das u in einer unendlichen Anzahl verschiedener Dimensionen vorkommt, so kann es Fälle geben, wo man für a eine unendliche Menge aber immer kleiner werdender brauchbarer Werthe auffindet, und es kann Fälle geben, wo man für a nur eine bestimmte Anzahl brauchbarer Werthe auffindet (s. die Aufgaben in §. 38, 39, 40, 41).

§. 25. Um nun die Coefficienten und Exponenten aller **steigenden** Reihen, welche sich aus $\varphi(u, v) = o$ entwickeln lassen, mit der grössten Bequemlichkeit aufzufinden, gebe man den zu suchenden Reihen die einfachere Form

$$u = A \cdot v^{\alpha} + B \cdot v^{\beta} + C \cdot v^{\gamma} + D \cdot v^{\delta} + E \cdot v^{\varepsilon} + \ldots\ldots$$

wo, eben weil die Reihen steigende sein sollen, $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, $\gamma < \delta$, $\delta < \varepsilon$, etc. sein muss. Zunächst setze man bloss $(A \cdot v^{\alpha} + R_1)$ an die Stelle des u in $\varphi(u, v) = o$ überall ein, so geht $\varphi(u, v) = o$ über in $\varphi[(A \cdot v^{\alpha} + R_1), v] = o$. Hier bedeutet R_1 die zuzufügende Ergänzung, wenn man die Reihe nach dem ersten Gliede abbrechen will. Hat man nun den grössten für α brauchbaren Werth gefunden, wobei von den Exponenten p, $(n' + n\alpha)$, ..., $(e' + e\alpha)$, etc. zwei oder mehrere einander gleich und kleiner als alle übrigen werden; so muss sich bekanntlich p unter diesen kleinsten Exponenten befinden. Sind z. B. p, $(h' + h\alpha)$ und $(g' + g\alpha)$ diese einander gleichen und kleinsten Exponenten, so muss (s. Gleichung II in §. 23) folgende Gleichung stattfinden:

$$P \cdot v^{p} + H \cdot A^{h} \cdot v^{h' + h\alpha} + G \cdot A^{g} \cdot v^{g' + g\alpha} = 0$$

daraus folgt

$$p = h' + h\alpha = g' + g\alpha,$$

und

$$P + H \cdot A^{h} + G \cdot A^{g} = 0$$

aus welcher Gleichung A bestimmt wird. Man führe nun die für α und A erhaltenen Resultate in $\varphi[(A \cdot v^{\alpha} + R_1), v] = 0$ ein, und reducire so viel als möglich, so geht letztere Gleichung in eine andere über, welche durch $\varphi'(R_1, v) = 0$ dargestellt sein mag. Diese Gleichung ordne man wieder nach demselben Prinzipe, nach welchem man Gleichung II in §. 23 geordnet hatte. Hierauf setze man $(B \cdot v^{\beta} + R_2)$ an die Stelle des R_1 in Gleichung $\varphi'(R_1, v) = 0$ überall ein, so dass man $\varphi'[(B \cdot v^{\beta} + R_2), v] = 0$ bekommt. R_2 bedeutet hier die noch zuzufügende Ergänzung, wenn man die Reihe nach dem zweiten Gliede abbrechen will. Man suche nun die verschiedenen Werthe von β auf, wie man zuvor die von α aufgesucht hat; unter diesen verschiedenen Werthen von β können aber natürlich nur diejenigen beibehalten werden, welche grösser sind, als der jedesmal für α genommene Werth. Wenn aber zu einem und demselben Werthe des α mehrere brauchbare Werthe des β zugleich existiren, die grösser sind als α; so ist dieses in so ferne recht gut möglich, als mehrere verschiedene für u sich ergebende Reihen mit einerlei erstem Gliede $A \cdot v^{\alpha}$ anfangen können, während die Verschiedenheit erst im zweiten, ja erst in einem noch spätern Gliede sichtbar werden kann.

Hat man nun B und β bestimmt, so führe man die Resultate in $\varphi'[(B \cdot v^{\beta} + R_2), v] = 0$ überall ein, und reducire soviel als möglich; letztere Gleichung geht dabei in eine andere über, welche durch $\varphi''(R_2, v) = 0$ bezeichnet sein mag. Nun setze man $(C \cdot v^{\gamma} + R_3)$ statt R_2 in $\varphi''(R_2, v) = 0$ überall ein, so dass man $\varphi''[(C \cdot v^{\gamma} + R_3), v] = 0$ bekommt. R_3 bedeutet die zuzufügende Ergänzung, wenn man die Reihe nach dem dritten Gliede abbrechen will. Man bestimme nun γ, wie man zuvor β bestimmt hat, jedoch mit steter Rücksicht, dass $\gamma > \beta$ sein muss. Und so fort.

Hat man nun die mit dem ersten Werthe des α anfangende Reihe soweit fortgesetzt, als man zu dem grade vorliegenden Zwecke für nöthig erachtet; dann hat man noch diejenigen Reihen zu entwickeln, welche mit den anderen für α brauchbaren Werthen anfangen. Das dabei zu beachtende Verfahren ist dem schon beschriebenen ganz gleich.

Hat man eine Reihe schon so weit fortgesetzt, dass man nachweisen kann, dass von irgend einem Gliede ab alle Exponenten nach einem gewissen Gesetze auf einander folgen, und dass, wenn irgend einer dieser Exponenten fehlen sollte, es nur dadurch möglich ist, dass der zugehörige Coefficient Null wird; so kann man die Form der Reihe gradezu voraussetzen, und sich dadurch die Reihenentwickelung oft sehr erleichtern. Findet man z. B., dass vom dritten Exponenten γ ab alle folgenden aus den in der arithmetischen Progression

$$\gamma, (\gamma + n), (\gamma + 2n), (\gamma + 3n), (\gamma + 4n), \ldots$$

fortschreitenden b e s t i m m t e n (ganzen oder gebrochenen) Zahlen genommen werden müssen, so setze man gradezu folgende Reihenform voraus

$$u = A \cdot v^{\alpha} + B \cdot v^{\beta} + C_1 . v^{\gamma} + C_2 . v^{\gamma + n} + C_3 . v^{\gamma + 2n} + \ldots$$

Da aber die Exponenten α und β sowie die zugehörigen Coefficienten A und B schon bestimmt sind; so setze man lieber

$$R_2 = C_1 . v^{\gamma} + C_2 . v^{\gamma + n} + C_3 . v^{\gamma + 2n} + \ldots$$

in Gleichung $\varphi''(R_2, v) = o$ überall ein, und die Gleichungen, durch welche die Coefficienten bestimmt werden, müssen dann ein jedesmal leicht aufzufindendes Discerptionsgesetz beobachten. Aber eben um dieses Discerptionsgesetz zu entdecken, desshalb hat man die Coefficienten nur durch die daran befindlichen Localzeichen von einander unterschieden.

§. 26. Will man aber aus $\varphi(u, v) = 0$ die nach fallenden Potenzen des v fortschreitenden Reihen entwickeln, so setze man nur $\frac{1}{\omega}$ statt v in $\varphi(u, v) = 0$ überall ein, und entwickle die nach steigenden Potenzen des ω fortschreitenden Reihen. Hierauf führe man $\frac{1}{v}$ statt ω zurück, und man hat die nach fallenden Potenzen des v fortschreitenden Reihen.

Sonach ist es nicht nöthig, noch eine besondere Methode für die Entwickelung der nach fallenden Potenzen des v fortschreitenden Reihen aufzustellen (s. die Aufgaben in § 29, 31, 33, 35, 39, 41).

§. 27. I) Ist $\varphi(u, v \ldots. w) = 0$, d. h. eine ungesonderte Function mit mehreren unabhängigen Veränderlichen gegeben; so setze man $\varkappa \cdot r$ statt v, etc. und zuletzt $\varkappa \cdot s$ statt w, betrachte u als Function von nur $\varkappa$, und entwickle u in nach steigenden oder fallenden Potenzen des $\varkappa$ fortlaufende Reihen. Dadurch ist der Fall mit mehreren Unabhängigen auf den mit einem einzigen Unabhängigen zurückgeführt (Man sehe die Beispiele in Aufgabe 21 und 23, und besonders in Aufgabe 34). Nach vollendeten Reihenentwickelungen kann man dann wieder v an die Stelle das Productes $\varkappa \cdot r$, etc., und zuletzt w an die Stelle des Productes $\varkappa \cdot s$ zurückführen. Soll aber eine solche Reihe zu dem Zwecke entwickelt werden, um u für den Fall, wo die unabhängigen Veränderlichen unendlichgross oder unendlichklein gesetzt werden, beurtheilen zu können; so bleiben die Elemente $r \ldots. s$ endlich, und jedes für sich willkürlich, bald positiv bald negativ; und nur $\varkappa$, welches auch nach Belieben bald positiv bald negativ genommen werden kann, darf unendlichgross oder unendlichklein gesetzt werden.

II) Es seien die zwei ungesonderten Functionen $\varphi(u, v, w) = 0$ und $f(v, w) = 0$ gegeben, wo w der absolute Unabhängige, v der relative Unabhängige, und u der Abhängige ist; und man soll für u die nach steigenden oder fallenden Potenzen des absoluten Unabhängigen w fortschreitenden Reihen entwickeln. Hierzu hat man nun zwei Wege:

A) Man eliminire v aus $\varphi(u, v, w) = 0$ vor den Reihenentwickelungen, so dass man $F(u, w) = 0$ bekommt; und dann kann man aus dieser letzteren Gleichung die verlangten Reihen entwickeln.

B) Will man aber aus irgend einem Grunde diese den Reihenentwickelungen vorangehende Elimination nicht vornehmen; so kann man aus $f(v, w) = 0$ zuerst für v die nach steigenden oder fallenden Potenzen des w fortschreitenden Reihen entwickeln. Hierauf setze man von diesen Reihen eine nach der andern an die Stelle des v in $\varphi(u, v, w) = 0$ ein, und entwickle jedesmal die für u sich ergebenden (nach steigenden oder fallenden Potenzen des w fortschreitenden) Reihen.

III) Es seien die zwei ungesonderten Functionen $\varphi(u, v, w) = 0$ und $\psi(u, v, w) = 0$ gegeben, wo w der absolute Unabhängige, v der relative Unabhängige, und u der Abhängige ist. Man soll für u die nach steigenden und fallenden Potenzen des w fortschreitenden Reihen entwickeln. Man eliminire zuerst den Abhängigen u aus den beiden gegebenen Gleichungen, so dass man $f(v, w) = 0$ bekommt. Mittelst dieser letzten Gleichung eliminire man hierauf den relativen Unabhängigen v aus $\varphi(u, v, w) = 0$ und $\psi(u, v, w) = 0$, so bekommt man zwei neue Gleichungen $F'(u, w) = 0$ und $F''(u, w) = 0$. Zwischen diesen zwei Gleichungen suche man den gemeinschaftlichen Theiler, welcher $\pi(u, w) = 0$ sein mag; und aus dieser letztern Gleichuug hat man für u alle nach steigenden oder fallenden Potenzen des w fortschreitenden Reihen zu entwickeln.

Es hat keinen Anstand, diese Untersuchung auf zusammengesetztere Fälle auszudehnen.

Anhang. Ehe die bisherige Theorie auf Aufgaben angewendet wird, soll hier noch bemerkt werden, dass man bei dergleichen Reihenentwickelungen sehr oft vielförmige Potenzen bekommt, welche, wenn Bequemlichkeit und Sicherheit in das Calculiren kommen soll, eine eigenthümliche Bezeichnung nöthig machen.

I) Das Radical $\sqrt[n]{\!\sqrt{a}}$ zeigt an, dass es seine n verschiedenen Formen zugleich repräsentirt; dagegen das Radical $\sqrt[n]{a}$ zeigt an, dass es nur eine einzige und zwar seine einfachste Form repräsentirt. So ist z. B. $\sqrt[n]{\!\sqrt{1}} = \pm 1$; dagegen ist $\sqrt{1} = + 1$ und $- \sqrt{1} = - 1$. Ebenso ist $\sqrt[n]{\!\sqrt{-1}} = \pm \sqrt{-1}$; dagegen darf $\sqrt{-1}$ nur mit dem Vorzeichen genommen werden, welches grade davor steht. Oft ist es bequemer, statt $\sqrt[n]{\!\sqrt{a}}$ folgenden Ausdruck $(\sqrt[n]{\!\sqrt{+1}}) \cdot \sqrt[n]{+a}$, statt $\sqrt[n]{\!\sqrt{-a}}$ folgenden Ausdruck $(\sqrt[n]{\!\sqrt{-1}}) \cdot \sqrt[n]{+a}$, statt $\sqrt[n]{\!\sqrt{\pm(a^m)}}$ folgenden Ausdruck $(\sqrt[n]{\!\sqrt{\pm 1}}) \cdot \sqrt[n]{+ a^m}$, und statt $(\sqrt[n]{\!\sqrt{\pm a}})^m$ folgenden Ausdruck $(\sqrt[n]{\!\sqrt{\pm 1}})^m \cdot \sqrt[n]{+ a^m}$ zu setzen, wo man den Radicalen $\sqrt[n]{+ a}$ und $\sqrt[n]{+ a^m}$ nur eine einzige und zwar ihre reelle positive Form beizulegen hat.

II) Der Ausdruck $a^{\overset{m}{\underset{n}{=}}}$, wo der Exponent einen doppelten Bruchstrich hat, zeigt an, dass er seine n verschiedenen Formen zugleich repräsentirt; dagegen der Ausdruck $a^{\frac{m}{n}}$, wo der Exponent einen einfachen Bruchstrich hat, zeigt an, dass er nur eine einzige und zwar seine einfachste Form repräsentirt. So ist z. B. $(a^2)^{\overset{1}{\underset{2}{=}}} = \pm a$; dagegen ist $(a^2)^{\frac{1}{2}} = + a$ und $- (a^2)^{\frac{1}{2}} = - a$. Ebenso ist $(-a)^{\overset{1}{\underset{2}{=}}} = \pm (- a)^{\frac{1}{2}}$; dagegen darf $(- a)^{\frac{1}{2}}$ nur mit dem Vorzeichen genommen werden, welches grade davor steht. Oft ist es bequem, statt $(+ a)^{\overset{m}{\underset{n}{=}}}$ folgenden Ausdruck $(+ 1)^{\overset{m}{\underset{n}{=}}} \cdot (+a)^{\frac{m}{n}}$, und statt $(- a)^{\overset{m}{\underset{n}{=}}}$ folgenden Ausdruck $(- 1)^{\overset{m}{\underset{n}{=}}} \cdot (+ a)^{\frac{m}{n}}$ zu setzen, wo man der Potenz $(+a)^{\frac{m}{n}}$ nur eine einzige und zwar ihre reelle positive Form beizulegen hat.

§. 28. Man soll aus der unentwickelten Gleichung

$$\text{I)}\quad u^2 - 2muv - 2nv + v^2 = 0$$

die nach Potenzen des v aufsteigenden Reihen entwickeln.

Zu diesem Zwecke ordne man die gegebene Gleichung auf folgende Weise:

$$\text{II)}\quad 2nv - v^2 + 2muv - u^2 = 0$$

Man nehme der Bequemlichkeit wegen für die zu suchende Reihe die einfache Form

$$u = A \cdot v^\alpha + B \cdot v^\beta + C \cdot v^\gamma + D \cdot v^\delta + \ldots .$$

wo $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, $\gamma < \delta$, etc. sein muss. Um nun den Coefficienten und Exponenten des ersten Gliedes zu bestimmen, setze man zur weitern Bequemlichkoit vorerst nur $(A \cdot v^\alpha + R_1)$ an die Stelle des u in Gleichung II überall ein. R_1 bedeutet die zuzufügende Ergänzung, wenn man die Reihe nach dem ersten Gliede abbrechen will. Gleichung II geht nun über in

$$\text{III)}\quad 2nv - v^2 + 2m \cdot A \cdot v^{\alpha + 1} - A^2 \cdot v^{2\alpha} + 2mv \cdot R_1 - 2A \cdot v^\alpha \cdot R_1 - R_1^2 = 0$$

Die zu vergleichenden Exponenten sind folgende:

$$1,\ (\alpha + 1),\ 2\alpha$$

und man bekommt desshalb folgende Gleichungen:

$$1 = 1$$
$$\alpha + 1 = 1 + (\alpha - 0)$$
$$2\alpha = 1 + 2 \cdot \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$$

Der grösste Werth, welchen hier α bekommen kann, ist $\alpha = \frac{1}{2}$; und weil dabei der erste und letzte der zu vergleichenden Exponenten einander gleich werden, so gibt es keinen

5

ferneren für α brauchbaren Werth mehr. Man hat nun zunächst die Gleichung

$$2nv - A^2 \cdot v^{2\alpha} = 0$$

Daraus folgt $\alpha = \frac{1}{2}$ und $A = \sqrt{2n}$. Man führe nun $\frac{1}{2}$ für α, und $\sqrt{2n}$ für A in Gleichung III ein, und reducire soviel als möglich; so bekommt man

$$2m \cdot A \cdot v^{\frac{3}{2}} - v^2 - 2A \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot R_1 + 2mv \cdot R_1 - R_1^2 = 0$$

Aus dieser Gleichung kann man die Ergänzung R_1 bestimmen, wenn man die Reihe schon nach dem ersten Gliede abbrechen will. Will man sie aber weiter fortsetzen, so setze man $(B \cdot v^\beta + R_2)$ an die Stelle des R_1 in letztere Gleichung überall ein. R_2 bedeutet die Ergänzung nach dem zweiten Gliede der zu suchenden Reihe. Dadurch bekommt man

$$\text{IV)}\ 2m \cdot (\sqrt{2n}) \cdot v^{\frac{3}{2}} - v^2 - 2(\sqrt{2n}) \cdot B \cdot v^{\beta + \frac{1}{2}} + 2mB \cdot v^{\beta + 1} - B^2 \cdot v^{2\beta}$$
$$- 2(\sqrt{2n}) \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot R_2 + 2mv \cdot R_2 - 2B \cdot v^\beta \cdot R_2 - R_2^2 = 0$$

Die jetzt zu vergleichenden Exponenten sind folgende:

$$\tfrac{3}{2},\ \left(\beta + \tfrac{1}{2}\right),\ (\beta + 1),\ 2\beta$$

und man hat folgende Gleichungen:

$$\tfrac{3}{2} = \tfrac{3}{2}$$
$$\beta + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} + (\beta - 1)$$
$$\beta + 1 = \tfrac{3}{2} + \left(\beta - \tfrac{1}{2}\right)$$
$$2\beta = \tfrac{3}{2} + 2 \cdot \left(\beta - \tfrac{3}{4}\right)$$

Der grösste Werth, welchen hier β bekommen kann, ist $\beta = 1$; und man hat jetzt noch den Exponenten $\left(\beta + \frac{1}{2}\right)$ mit allen folgenden zu vergleichen, so dass man folgende Gleichungen bekommt:

$$\beta + \tfrac{1}{2} = \beta + \tfrac{1}{2}$$
$$\beta + 1 = \beta + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}$$
$$2\beta = \beta + \tfrac{1}{2} + \left(\beta - \tfrac{1}{2}\right)$$

Der grösste Werth, welchen hier β bekommen kann, ist $\beta = \frac{1}{2}$; da aber schon $\alpha = \frac{1}{2}$ ist, und $\beta > \alpha$ sein muss, so darf $\beta = \frac{1}{2}$ nicht weiter berücksichtigt werden. Setzt man nun $\beta = 1$, so bekommt man die Gleichung

$$2m \cdot (\sqrt{2n}) \cdot v^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot (\sqrt{2n}) \cdot B \cdot v^{\beta + \frac{1}{2}} = 0$$

Daraus folgt $\beta = 1$ und $B = m$. Gleichung IV reducirt sich nun auf

$$\text{V)}\ (m^2 - 1) \cdot v^2 - 2 \cdot (\sqrt{2n}) \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot R_2 - R_2^2 = 0$$

Aus dieser Gleichung kann man R_2 bestimmen, wenn man die Reihe schon nach dem zweiten Gliede abbrechen will. Will man sie aber weiter fortsetzen, so setze man $(C \cdot v^\gamma + R_3)$ an die Stelle des R_2 in letztere Gleichung überall ein. R_3 bedeutet die Ergänzung nach dem dritten Gliede der zu suchenden Reihe. Dabei geht Gleichung V über in

$$\text{VI)}\ (m^2 - 1) \cdot v^2 - 2 \cdot (\sqrt{2n}) \cdot C \cdot v^{\gamma + \frac{1}{2}} - C^2 \cdot v^{2\gamma} - 2 \cdot (\sqrt{2n}) \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot R_3$$
$$- 2C \cdot v^\gamma \cdot R_3 - R_3^2 = 0$$

Da nun $\gamma > 1$ sein muss, so ist offenbar, dass dabei $2\gamma > \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)$; und $\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)$ ist

der kleinste unter den noch unbestimmten Exponenten. Man hat also folgende Gleichung

$$(m^2-1)\cdot v^2 - 2\cdot\left(\sqrt{2n}\right)\cdot C\cdot v^{\gamma+\frac{1}{2}} = 0$$

Daraus folgt $\gamma = \frac{3}{2}$ und $C = +\frac{m^2-1}{2\cdot\sqrt{2n}}$. Man führe nun diese Resultate in Gleichung VI ein, reducire soviel als möglich, und setze dann $(D\cdot v^{\delta} + R_4)$ an die Stelle des R_3. Hier bedeutet R_4 die Ergänzung nach dem vierten Gliede der zu suchenden Reihe. Gleichung VI geht dann über in

$$\text{VII)}\quad -C^2\cdot v^3 - 2\cdot\left(\sqrt{2n}\right)\cdot D\cdot v^{\delta+\frac{1}{2}} - 2C\cdot D\cdot v^{\delta+\frac{3}{2}} - D^2\cdot v^{2\delta} - 2\cdot\left(\sqrt{2n}\right)\cdot v^{\frac{1}{2}}\cdot R_4$$
$$-2C\cdot v^{\frac{3}{2}}\cdot R_4 - 2D\cdot v^{\delta}\cdot R_4 - R_4^2 = 0$$

Die nun zu vergleichenden Exponenten sind folgende:

$$\text{VIII)}\quad \begin{cases} 3 \\ \left(\delta+\frac{1}{2}\right),\ \left(\delta+\frac{3}{2}\right) \\ 2\delta \end{cases}$$

Da aber $\delta > \frac{3}{2}$ sein muss, so ist offenbar, dass $\left(\delta+\frac{1}{2}\right)$ der kleinste unter den unbestimmten Exponenten ist. Man kann also nur $\delta + \frac{1}{2} = 3$ setzen, und daraus folgt $\delta = \frac{5}{2}$ und $D = -\frac{C^2}{2\cdot\sqrt{2n}}$. Die in VIII aufgestellten unbestimmten Exponenten gehen nun in folgende bestimmte Zahlen über:

$$3,\ 4,\ 5$$

Indem man aber für δ und D die Resultate einführt, soviel als möglich reducirt, und dann $(E\cdot v^{\varepsilon} + R_5)$ an die Stelle des R_4 einsetzt, wobei R_5 die Ergänzung nach dem fünften Gliede der zu suchenden Reihe bedeutet; so bekommt man

$$\text{IX)}\quad -2C\cdot D\cdot v^4 - D^2\cdot v^5 - 2\cdot\left(\sqrt{2n}\right)\cdot E\cdot v^{\varepsilon+\frac{1}{2}} - 2C\cdot E\cdot v^{\varepsilon+\frac{3}{2}} - 2DE\cdot v^{\varepsilon+\frac{5}{2}}$$
$$-E^2\cdot v^{2\varepsilon} - 2\cdot\left(\sqrt{2n}\right)\cdot v^{\frac{1}{2}}\cdot R_5 - 2C\cdot v^{\frac{3}{2}}\cdot R_5 - 2D\cdot v^{\frac{5}{2}}\cdot R_5 - 2E\cdot v^{\varepsilon}\cdot R_5 - R_5^2 = 0$$

Die nun zu vergleichenden Exponenten sind folgende:

$$\text{X)}\quad \begin{cases} 4 \\ \left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right),\ \left(\varepsilon+\frac{3}{2}\right),\ \left(\varepsilon+\frac{5}{2}\right) \\ 2\varepsilon \end{cases}$$

Es ist offenbar, dass nur $\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right)$ der kleinste unter den unbestimmten Exponenten sein kann, weil $\varepsilon > \frac{5}{2}$ sein muss somit bekommt man $\varepsilon = \frac{7}{2}$ und $E = -\frac{2CD}{2\cdot\sqrt{2n}}$. Die in X aufgestellten unbestimmten Exponenten gehen nun in folgende bestimmte Zahlen über:

$$4,\ 5,\ 6,\ 7.$$

Indem man aber für ε und E die Resultate einführt, soviel als möglich reducirt, und dann $(F\cdot v^{\zeta} + R_6)$ an die Stelle des R_5 überall einsetzt; so sind die sich nun ergebenden unbestimmten Exponenten folgende

$$\text{XI)}\quad \begin{cases} \left(\zeta+\frac{1}{2}\right),\ \left(\zeta+\frac{3}{2}\right),\ \left(\zeta+\frac{5}{2}\right),\ \left(\zeta+\frac{7}{2}\right) \\ 2\zeta \end{cases}$$

Es ist also $\zeta + \frac{1}{2} = 5$, d. h. $\zeta = \frac{9}{2}$. Man erkennt nun schon mit Bestimmtheit, dass die Exponenten der einzigen möglichen Reihe nur aus folgenden Zahlen

$$\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{9}{2},\ \frac{11}{2},\ \ldots\ldots$$

genommen werden können. Alle Exponenten vom dritten Gliede an steigen in arith-

metischer Progression auf; und wenn irgend einer dieser Exponenten nicht vorkommen kann, so muss der Coefficient des fraglichen Gliedes Null sein. Man ist also auf dem Punkte, die Form der Reihe zu haben, und man kann geradezu

$$\text{XII)}\quad u = \left(\sqrt{2n}\right) \cdot v^{\frac{1}{2}} + m \cdot v + A_1 \,.\, v^{\frac{3}{2}} + A_2 \,.\, v^{\frac{5}{2}} + A_3 \,.\, v^{\frac{7}{2}} + \ldots .$$

setzen. Betrachtet man jedoch noch einmal Gleichung V; so sieht man, dass man leichter zum Ziele gelangt, wenn man

$$R_2 = A_1 \,.\, v^{\frac{3}{2}} + A_2 \,.\, v^{\frac{5}{2}} + A_3 \,.\, v^{\frac{7}{2}} + A_4 \,.\, v^{\frac{9}{2}} + \ldots .$$

in Gleichung V einsetzt. Die Coefficienten bestimmen sich dadurch, dass man dann alle mit einerlei Dimension des v behafteten Theilsätze für sich verschwinden lässt. Die Coefficientengleichungen beobachten aber folgendes Discerptionsgesetz:

$$1)\quad (m^2 - 1) - 2 \cdot \left(\sqrt{2n}\right) \cdot A_1 = 0$$

$$2)\quad 2 \cdot \left(\sqrt{2n}\right) \cdot A_2 + A_1 A_1 = 0$$

$$3)\quad 2 \cdot \left(\sqrt{2n}\right) \cdot A_3 + 2A_1 A_2 = 0$$

$$4)\quad 2 \cdot \left(\sqrt{2n}\right) \cdot A_4 + 2A_1 A_3 + A_2 A_2 = 0$$

$$5)\quad 2 \cdot \left(\sqrt{2n}\right) \cdot A_5 + 2A_1 A_4 + 2A_2 A_3 = 0$$

$$6)\quad 2 \cdot \left(\sqrt{2n}\right) \cdot A_6 + 2A_1 A_5 + 2A_2 A_4 + A_3 A_3 = 0$$

und so fort.

Hieraus folgt $A_1 = + \dfrac{m^2 - 1}{2 \cdot \sqrt{2n}}$, d. h. A_1 ist zweiförmig, je nachdem man dem Radical seine positive oder negative Bedeutung beilegt; und da in jeder dieser Coefficientengleichungen der jedesmal zu bestimmende Coefficient nur in der ersten Potenz vorkommt, so kann ein jeder derselben durch eine rationale Function von A_1 ausgedrückt werden; und somit ist dargethan, dass diese Reihe nicht mehr und nicht weniger, als die zwei Formen des u zugleich repräsentirt. Bestimmt man diese successiven Coefficienten, so geht die Reihe XII über in

$$\text{XIII)}\quad u = \left(\sqrt{2n}\right) \cdot v^{\frac{1}{2}} + m \cdot v + \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 - 1}{\sqrt{2n}} \cdot v^{\frac{3}{2}} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{(m^2 - 1)^2}{\left(\sqrt{2n}\right)^3} \cdot v^{\frac{5}{2}}$$
$$+ \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{(m^2 - 1)^3}{\left(\sqrt{2n}\right)^5} \cdot v^{\frac{7}{2}} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{(m^2 - 1)^4}{\left(\sqrt{2n}\right)^7} \cdot v^{\frac{9}{2}} + - \ldots .$$

Hätte man aber die gegebene Gleichung schon anfangs umgeformt in $(u - mv)^2 = 2nv + (m^2 - 1) \cdot v^2$, so hätte sich daraus $u = mv + \sqrt{2nv + (m^2 - 1) \cdot v^2}$ ergeben, so dass man mittelst des binomischen Lehrsatzes die Reihe XIII wieder bekommt.

Die hier gefundene Reihe ist aber eine von denen, wo die Vielförmigkeit schon bei dem ersten Gliede beginnt; und man kann sie, wenn man will, in zwei eindeutige Reihenformen zerlegen, dadurch dass man einmal den beiden Radicalen $\sqrt{2n}$ und $v^{\frac{1}{2}}$ durchweg einerlei und hierauf durchweg entgegengesetzte Bedeutung beilegt.

§. 29. Man soll aus der unentwickelten Gleichung

$$\text{I)}\quad u^2 - 2muv - 2nv + v^2 = 0$$

die nach fallenden Potenzen des v fortschreitenden Reihen entwickeln.

Man setze $\frac{1}{\omega}$ an die Stelle des v, und Gleichung I geht über in

$$\text{II)}\quad u^2 - \frac{2m}{\omega} \cdot u - \frac{2n}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = 0$$

oder

$$\text{III)}\quad 1 - 2n \cdot \omega - 2m \cdot \omega \cdot u + \omega^2 \cdot u^2 = 0$$

Aus dieser Gleichung entwickle man die nach Potenzen des ω aufsteigenden Reihen, und setze zunächst die unbestimmte Form

$$u = A \cdot \omega^{\alpha} + B \cdot \omega^{\beta} + C \cdot \omega^{\gamma} + D \cdot \omega^{\delta} + \ldots.$$

wo $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, γ, $< \delta$, etc. sein muss. Zur Bequemlichkeit setze man vorerst nur $(A \cdot \omega^{\alpha} + R_1)$ an die Stelle des u in Gleichung III überall ein. R_1 bedeutet hier die Ergänzung nach dem ersten Gliede der zu entwickelnden Reihe. Gleichung III geht nun über in

$$\text{IV)}\quad 1 - 2n \cdot \omega - 2m \cdot A \cdot \omega^{\alpha+1} + A^2 \cdot \omega^{2\alpha+2} - 2m\omega \cdot R_1 + 2A \cdot \omega^{\alpha+2} \cdot R_1 + \omega^2 \cdot R_1^2 = 0$$

Da die Zahl 1, welche den ersten Theilsatz in dieser Gleichung ausmacht, soviel ist, als ω^0; so hat man folgende Exponenten mit einander zu vergleichen

$$0,\quad \alpha + 1,\quad 2\alpha + 2$$

und man bekommt folgende Gleichungen

$$0 = 0$$
$$\alpha + 1 = 0 + (\alpha - (-1))$$
$$2\alpha + 2 = 0 + 2 \cdot (\alpha - (-1))$$

Hier kann man nur $\alpha = -1$ setzen; und da dabei alle drei Exponenten einander gleich werden, so hat α nur diesen einzigen brauchbaren Werth. Man hat nun zunächst die Gleichung

$$1 - 2m \cdot A \cdot \omega^{\alpha+1} + A^2 \cdot \omega^{2\alpha+2} = 0$$

Daraus folgt $\alpha = -1$ und $A = m + \sqrt{m^2 - 1}$. Man hat also

$$u = \left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right) \cdot \omega^{-1} + R_1 = \left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right) \cdot v + R_1$$

Gleichung IV geht nun über in

$$\text{V)}\quad -2n \cdot \omega - 2m\omega \cdot R_1 + 2 \cdot \left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right) \cdot \omega \cdot R_1 + \omega^2 \cdot R_1^2 = 0$$

oder, wenn man $\frac{1}{v}$ statt ω zurückführt, in

$$-2nv - 2mv \cdot R_1 + 2 \cdot \left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right) \cdot v \cdot R_1 + R_1^2 = 0$$

Aus dieser letzten Gleichung kann man R_1 bestimmen, wenn man die Reihe schon nach dem ersten Gliede abbrechen will. Will man aber die Reihe weiter fortsetzen, so setze man $(B \cdot \omega^{\beta} + R_2)$ an die Stelle des R_1 in Gleichung V überall ein. R_2 bedeutet hier die Ergänzung nach dem zweiten Gliede der zu entwickelnden Reihe. Gleichung V geht nun über in

$$\text{VI)}\quad -2n\omega + 2B \cdot \left(\sqrt{m^2 - 1}\right) \cdot \omega^{\beta+1} + B^2 \cdot \omega^{2\beta+2} + 2 \cdot \left(\sqrt{m^2 - 1}\right) \cdot \omega \cdot R_2 + 2B \cdot \omega^{\beta+2} \cdot R_2 + \omega^2 \cdot R_2^2 = 0$$

Die jetzt zu vergleichenden Exponenten sind folgende:

$$1,\quad (\beta + 1),\quad (2\beta + 2)$$

und man bekommt folgende Gleichungen:

$$1 = 1$$
$$\beta + 1 = 1 + (\beta - 0)$$
$$2\beta + 2 = 1 + 2 \cdot \left(\beta - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right)$$

Der grösste Werth, welchen hier β bekommen kann, ist $\beta = 0$; und man hat noch $(\beta + 1)$ mit $(2\beta + 2)$ zu vergleichen, bekommt also folgende Gleichungen:

$$\beta + 1 = \beta + 1$$
$$2\beta + 2 = \beta + 1 + (\beta - (-1))$$

Der einzige Werth, welchen hier β bekommen kann, ist $\beta = -1$; da aber schon $\alpha = -1$ gefunden ist, so darf $\beta = -1$ nicht weiter berücksichtigt werden, und man darf nur $\beta = 0$ setzen. Man bekommt also die Gleichung

$$- 2n\omega + 2B \cdot \left(\sqrt{m^2 - 1}\right) \cdot \omega^{\beta + 1} = 0$$

Daraus folgt $B = \frac{n}{\sqrt{m^2 - 1}}$. Man hat also

$$u = \left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right) \cdot \omega^{-1} + \frac{n}{\sqrt{m^2 - 1}} + R_2$$

$$= \left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right) \cdot v + \frac{n}{\sqrt{m^2 - 1}} + R_2$$

Gleichung VI reducirt sich nun auf

$$\text{VII)}\quad B^2 \cdot \omega^2 + 2 \cdot \left(\sqrt{m^2 - 1}\right) \cdot \omega \cdot R_2 + 2B \cdot \omega^2 \cdot R_2 + \omega^2 \cdot R_2^2 = 0$$

Führt man wieder $\frac{1}{v}$ statt ω zurück, so geht VII über in

$$B^2 + 2 \cdot \left(\sqrt{m^2 - 1}\right) \cdot v \cdot R_2 + 2B \cdot R_2 + R_2^2 = 0$$

Aus dieser Gleichung kann man R_2 bestimmen, wenn man die Reihe schon nach dem zweiten Gliede abbrechen will. Will man aber die Reihe weiter fortsetzen, so setze man $(C \cdot \omega^{\gamma} + R_3)$ an die Stelle des R_2 in Gleichung VII überall ein. R_3 bedeutet die Ergänzung nach dem dritten Gliede der zu entwickelnden Reihe. Gleichung VII geht nun über in

$$\text{VIII)}\quad B^2 \cdot \omega^2 + 2C \cdot \left(\sqrt{m^2 - 1}\right) \cdot \omega^{\gamma + 1} + 2BC \cdot \omega^{\gamma + 2} + C^2 \cdot \omega^{2\gamma + 2}$$
$$+ 2 \cdot \left(\sqrt{m^2 - 1}\right) \cdot \omega \cdot R_3 + 2B \cdot \omega^2 \cdot R_3 + 2C \cdot \omega^{\gamma + 2} \cdot R_3 + \omega^2 \cdot R_3^2 = 0$$

Da nun γ positiv sein muss, so ist offenbar, dass $(\gamma + 1)$ der kleinste unter den jetzigen unbestimmten Exponenten ist. Man hat also $\gamma + 1 = 2$ zu setzen, und daraus folgt $\gamma = 1$. Die jetzigen unbestimmten Exponenten gehen nun über in die bestimmten Zahlen

2, 3, 4

Indem man aber für γ und C die Resultate einführt, soviel als möglich reducirt, und dann $(D \cdot \omega^{\delta} + R_4)$ an die Stelle des R_3 einsetzt, bekommt man folgende Exponenten miteinander zu vergleichen:

$$\begin{cases} 3 \\ (\delta + 1),\ (\delta + 2),\ (\delta + 3) \\ (2\delta + 2) \end{cases}$$

Da aber $\delta > 1$ sein muss; so kann nur $(\delta + 1)$ der kleinste unter den noch unbestimmten Exponenten sein; und man kann nur $\delta + 1 = 3$ setzen, woraus $\delta = 2$ folgt. Die zuletzt aufgestellten unbestimmten Exponenten gehen nun in folgende bestimmte Zahlen über

3, 4, 5, 6

Die ferneren unbestimmten Exponenten sind

$$\begin{cases} (\varepsilon + 1),\ (\varepsilon + 2),\ (\varepsilon + 3),\ (\varepsilon + 4) \\ (2\varepsilon + 2) \end{cases}$$

Man erkennt nun schon mit Bestimmtheit, dass die Exponenten der einzigen hier möglichen Reihe nur aus folgenden Zahlen

$-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots$

genommen werden können, und man ist auf dem Punkte, die Form der Reihe zu haben, und kann geradezu

$$\text{IX)}\quad u = A_1 \cdot \omega^{-1} + A_2 + A_3 \cdot \omega + A_4 \cdot \omega^2 + A_5 \cdot \omega^3 + \cdots\cdots$$

in Gleichung III einsetzen, und alle mit einerlei Dimension des ω behafteten Theilsätze für sich verschwinden lassen. Die Gleichungen, aus welchen die Coefficienten bestimmt werden, beobachten dann folgendes Discerptionsgesetz:

$$1)\quad 1 - 2m \cdot A_1 + A_1A_1 = 0$$
$$2)\quad -2n - 2m \cdot A_2 + 2A_1A_2 = 0$$
$$3)\quad -2m A_3 + (2A_1A_3 + A_2A_2) = 0$$
$$4)\quad -2m \cdot A_4 + (2A_1A_4 + 2A_2A_3) = 0$$
$$5)\quad -2m \cdot A_5 + (2A_1A_5 + 2A_2A_4 + A_3A_3) = 0$$

und so fort.

Hieraus folgt $A_1 = m + \sqrt{m^2 - 1}$, d. h. A_1 ist zweiförmig, je nachdem man dem Radical seine positive oder negative Bedeutung beilegt; und da in jeder dieser Coefficientengleichungen von der zweiten an der jedesmal zu bestimmende Coefficient nur in der ersten Potenz vorkommt, so kann auch ein jeder Coefficient, vom zweiten an, durch eine rationale Function von A_1 ausgedrückt werden; und somit ist dargethan, dass diese Reihe nicht mehr und nicht weniger, als die zwei Formen des u zugleich repräsentirt. Bestimmt man diese successiven Coefficienten, und setzt man wieder $\frac{1}{v}$ statt ω zurück; so geht die Reihe IX über in

$$\text{X)}\quad u = (m + \sqrt{m^2 - 1}) \cdot v + \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{\sqrt{m^2 - 1}} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{(2n)^2}{(\sqrt{m^2 - 1})^3} \cdot v^{-1}$$
$$+ \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{(2n)^3}{(\sqrt{m^2 - 1})^5} \cdot v^{-2} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{(2n)^4}{(\sqrt{m^2 - 1})^7} \cdot v^{-3} + - \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Hätte man aber die gegebene Gleichung I schon anfangs umgeformt in

$$(u - mv)^2 = (m^2 - 1) \cdot v^2 + 2nv$$

so hätte man

$$u = v \cdot \left[m + \sqrt{(m^2 - 1) + \frac{2n}{v}} \right]$$

bekommen, woraus sich mittelst des binomischen Lehrsatzes die Reihe X gradezu ergibt.

Die hier gefundene Reihe ist aber eine von denen, wo die Vielförmigkeit schon bei dem ersten Gliede beginnt; und man kann sie, wenn man will, in zwei verschiedene eindeutige Reihenformen zerlegen, dadurch dass man bei der einen Reihenform dem Radical $\sqrt{m^2 - 1}$ durchweg seine positive Bedeutung, bei der andern Reihenform aber durchweg seine negative Bedeutung beilegt.

§. 30. Man soll aus der unentwickelten Gleichung

$$\text{I)}\quad u^3 - 6u^2 \cdot v + 12u \cdot v^2 - 27 \cdot v^2 - 8v^3 = 0$$

die nach Potenzen des v aufsteigenden Reihen entwickeln.

Zu diesem Zwecke ordne man die gegebene Gleichung auf folgende Weise:

$$\text{II)}\quad 27 \cdot v^2 + 8 \cdot v^3 - 12v^2 \cdot u + 6v \cdot u^2 - u^3 = 0$$

Man hat also die Reihe $u = A \cdot v^{\alpha} + B \cdot v^{\beta} + C \cdot v^{\gamma} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$ mit der Rücksicht zu entwickeln, dass $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, etc., etc. sein muss. Man setze an die Stelle des u vorerst nur $(A \cdot v^{\alpha} + R_1)$, wo R_1 die Ergänzung nach dem ersten Gliede bedeutet. Gleichung II geht nun über in

$$\text{III)}\quad 27 \cdot v^2 + 8 \cdot v^3 - 12A \cdot v^{\alpha + 2} + 6 \cdot A^2 \cdot v^{2\alpha + 1} - A^3 \cdot v^{3\alpha} - 12 \cdot v^2 \cdot R_1$$
$$+ 12A \cdot v^{\alpha + 1} \cdot R_1 - 3A^2 \cdot v^{2\alpha} \cdot R_1 + 6v \cdot R_1^2 - 3A \cdot v^{\alpha} \cdot R_1^2 - R_1^3 = 0$$

Die hier zu vergleichenden Exponenten sind

$$2,\ (\alpha + 2),\ (2\alpha + 1),\ 3\alpha$$

und man hat folgende Gleichungen:

$$2 = 2$$
$$\alpha + 2 = 2 + (\alpha - 0)$$

$$2\alpha + 1 = 2 + 2\cdot\left(\alpha - \tfrac{1}{2}\right)$$
$$3\alpha = 2 + 3\cdot\left(\alpha - \tfrac{2}{3}\right)$$

Der grösste Werth, welchen hier α annehmen kann, ist $\alpha = \frac{2}{3}$; und da dabei der erste und letzte der zu vergleichenden Exponenten einander gleich werden, so kann α keinen andern brauchbaren Werth mehr annehmen. Man hat daher zunächst die Gleichung

$$\text{IV)}\quad 27\cdot v^2 - A^3\cdot v^{3\alpha} = 0$$

Daraus folgt $\alpha = \frac{2}{3}$ und $A = 3\cdot\sqrt[3]{1}$. Führt man nun für A und α die Resultate ein, so reducirt sich Gleichung III auf

$$\text{V)}\quad 6A^2\cdot v^{\frac{7}{3}} - 12A\cdot v^{\frac{8}{3}} + 8v^3 - 3A^2\cdot v^{\frac{4}{3}}\cdot R_1 + 12A\cdot v^{\frac{5}{3}}\cdot R_1 - 12v^2\cdot R_1$$
$$- 3A\cdot v^{\frac{2}{3}}\cdot R_1^2 + 6v\cdot R_1^2 - R_1^3 = 0$$

An die Stelle von R_1 setze man nun $(B\cdot v^\beta + R_2)$, wo R_2 die Ergänzung nach dem zweiten Gliede bedeutet. Dadurch bekommt man

$$\text{VI)}\quad 6A^2\cdot v^{\frac{7}{3}} - 12A\cdot v^{\frac{8}{3}} + 8\cdot v^3 - 3A^2\cdot B\cdot v^{\beta+\frac{4}{3}} + 12AB\cdot v^{\beta+\frac{5}{3}} - 12B\cdot v^{\beta+2}$$
$$- 3A\cdot B^2\cdot v^{2\beta+\frac{2}{3}} + 6B^2\cdot v^{2\beta+1} - B^3\cdot v^{3\beta} - 3A^2\cdot v^{\frac{4}{3}}\cdot R_2 + 12A\cdot v^{\frac{5}{3}}\cdot R_2$$
$$- 12v^2\cdot R_2 - 6AB\cdot v^{\beta+\frac{2}{3}}\cdot R_2 + 12B\cdot v^{\beta+1}\cdot R_2 - 3B^2\cdot v^{2\beta}\cdot R_2$$
$$- 3A\cdot v^{\frac{2}{3}}\cdot R_2^2 + 6v\cdot R_2^2 - 3B\cdot v^\beta\cdot R_2^2 - R_2^3 = 0$$

Die jetzt zu vergleichenden Exponenten sind

$$\tfrac{7}{3},\ \left(\beta + \tfrac{4}{3}\right),\ \left(\beta + \tfrac{5}{3}\right),\ (\beta + 2),\ \left(2\beta + \tfrac{2}{3}\right),\ (2\beta + 1),\ 3\beta$$

und man hat folgende Gleichungen:

$$\tfrac{7}{3} = \tfrac{7}{3}$$
$$\beta + \tfrac{4}{3} = \tfrac{7}{3} + (\beta - 1)$$
$$\beta + \tfrac{5}{3} = \tfrac{7}{3} + \left(\beta - \tfrac{2}{3}\right)$$
$$\beta + 2 = \tfrac{7}{3} + \left(\beta - \tfrac{1}{3}\right)$$
$$2\beta + \tfrac{2}{3} = \tfrac{7}{3} + 2\cdot\left(\beta - \tfrac{5}{6}\right)$$
$$2\beta + 1 = \tfrac{7}{3} + 2\cdot\left(\beta - \tfrac{2}{3}\right)$$
$$3\beta = \tfrac{7}{3} + 3\cdot\left(\beta - \tfrac{7}{9}\right)$$

Der grösste Werth, welchen hier β bekommen kann, ist $\beta = 1$; man hat also den Exponenten $\beta + \frac{4}{3}$ noch mit allen folgenden zu vergleichen, und bekommt daher folgende Gleichungen:

$$\beta + \tfrac{4}{3} = \beta + \tfrac{4}{3}$$
$$\beta + \tfrac{5}{3} = \beta + \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{3}$$
$$\beta + 2 = \beta + \tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3}$$
$$2\beta + \tfrac{2}{3} = \beta + \tfrac{4}{3} + \left(\beta - \tfrac{2}{3}\right)$$
$$2\beta + 1 = \beta + \tfrac{4}{3} + \left(\beta - \tfrac{1}{3}\right)$$
$$3\beta = \beta + \tfrac{4}{3} + 2\cdot\left(\beta - \tfrac{2}{3}\right)$$

Der grösste Werth, welchen hier β bekommen kann, ist $\beta = \frac{2}{3}$; da aber schon $\alpha = \frac{2}{3}$ ist, und $\beta > \alpha$ sein muss, so kann $\beta = \frac{2}{3}$ nicht weiter berücksichtigt werden. Man darf also nur $\beta = 1$ nehmen, und dabei bekommt man die Gleichung

$$6A^2 \cdot v^{\frac{7}{3}} - 3A^2 \cdot B \cdot v^{\beta + \frac{4}{3}} = 0$$

Daraus folgt $B = 2$ und $\beta = 1$. Führt man diese Resultate in Gleichung VI ein, so reducirt sie sich auf

$$-3A^2 \cdot v^{\frac{4}{3}} \cdot R_2 - 3A \cdot v^{\frac{2}{3}} \cdot R_2^2 - R_2^3 = 0$$

oder

$$\text{VII)} \quad \left(3A^2 \cdot v^{\frac{4}{3}} + 3A \cdot v^{\frac{2}{3}} \cdot R_2 + R_2^2\right) \cdot R_2 = 0$$

Die hier zu suchende Reihe ist nun bis zum zweiten Gliede einschliesslich entwickelt, d. h. man hat

$$\text{VIII)} \quad u = 3 \cdot \left(\sqrt[3]{1}\right) \cdot v^{\frac{2}{3}} + 2v + R_2$$

Das erste Glied ist dreiförmig, und somit sind durch diese steigende Reihe die drei Formen des u zugleich repräsentirt.

Aus Gleichung VII folgt:

entweder

$$\text{IX)} \quad R_2 = 0$$

oder

$$\text{X)} \quad 3A^2 \cdot v^{\frac{4}{3}} + 3A \cdot v^{\frac{2}{3}} \cdot R_2 + R_2^2 = 0$$

Erstens. Nimmt man $R_2 = 0$, so reducirt sich VIII auf

$$\text{XI)} \quad u = 3 \cdot \left(\sqrt[3]{1}\right) \cdot v^{\frac{2}{3}} + 2v$$

Nun hat sowohl $\sqrt[3]{1}$ als auch $v^{\frac{2}{3}}$ drei Formen, so dass es den Anschein hat, als hätte das erste Glied neun Formen, allein es hat nur drei Formen, wie auf folgende Weise nachgewiesen werden soll:

Es stelle $v^{\frac{2}{3}}$ die reelle und eindeutige Form des $v^{\frac{2}{3}}$ vor, so sind die drei Formen des $v^{\frac{2}{3}}$ dargestellt durch

$$v^{\frac{2}{3}} = v^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\cos \frac{4h}{3} \cdot \pi \pm \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{4h}{3} \cdot \pi\right)$$

Ebenso sind die drei Formen des $\sqrt[3]{1}$ dargestellt durch

$$\sqrt[3]{1} = \cos \frac{2k}{3} \cdot \pi \pm \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{2k}{3} \cdot \pi$$

Man bekommt die drei Formen von $v^{\frac{2}{3}}$, wenn man zuerst $h = o$ und dann $h = 1$ setzt; ebenso bekommt man die drei Formen von $\sqrt[3]{1}$, wenn man zuerst $k = 0$ und dann $k = 1$ setzt. Die Reihe XI nimmt also folgende Form an

$$\text{XII)} \quad u = 3 \cdot v^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\cos \frac{4h}{3} \cdot \pi \pm \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{4h}{3} \cdot \pi\right) \cdot \left(\cos \frac{2k}{3} \cdot \pi \pm \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{2k}{3} \cdot \pi\right) + 2v$$

oder

$$\text{XIII)} \quad u = 3 \cdot v^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\cos \frac{2 \cdot (k+2h)}{3} \cdot \pi \pm \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{2 \cdot (k+2h)}{3} \cdot \pi\right) + 2v$$

Hier muss man nach und nach $h = 0$ mit $k = 0$, $h = 0$ mit $k = 1$, $h = 1$ mit $k = 0$, und $h = 1$ mit $k = 1$ verbinden, und man bekommt dieselben drei Formen für das erste Glied der Reihe, wie wenn man zuerst $(k + 2h) = 0$, und dann $(k + 2h) = 1$ setzt, d. h. man bekommt unter allen Umständen zwei Resultate, nemlich

$$\text{XIV)}\quad u = 3v^{\frac{2}{3}} + 2v$$

und hierauf

$$\text{XV)}\quad u = \frac{3}{2}\cdot(-1 \pm \sqrt{-3})\cdot v^{\frac{2}{3}} + 2v$$

Zweitens. Lässt man aber Gleichung X gelten, so setze man $(C\cdot v^{\gamma} + R_3)$ an die Stelle des R_2 in X überall ein; und es ergeben sich bei Vergleichung der Exponenten folgende Gleichungen:

$$\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$
$$\gamma + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} + \left(\gamma - \frac{2}{3}\right)$$
$$2\gamma = \frac{4}{3} + 2\cdot\left(\gamma - \frac{2}{3}\right)$$

Es ist also $\gamma = \frac{2}{3}$, und einen andern für γ brauchbaren Werth gibt es nicht. Da aber schon $\alpha = \frac{2}{3}$ ist, so erkennt man, dass die Reihe kein drittes, kein viertes, etc. Glied haben kann, d. h. dass die Reihe nur aus zwei Gliedern besteht.

Die Reihe XI ist also die gesuchte Reihe. Wollte man aber dessenungeachtet aus Gleichung X das R_2 entwickeln, so würde man

$$\text{XVI)}\quad R_2 = \frac{1}{2}\cdot(-3 \pm \sqrt{-3})\cdot\left(\sqrt[3]{1}\right)\cdot v^{\frac{2}{3}}$$

bekommen, und Gleichung VIII würde übergehen in

$$\text{XVII)}\quad u = \left[3\cdot\left(\sqrt[3]{1}\right) + \frac{3}{2}\cdot(-3 \pm \sqrt{-3})\cdot\left(\sqrt[3]{1}\right)\right]\cdot v^{\frac{2}{3}} + 2v$$

Diese Reihe reducirt sich zunächst auf

$$u = \frac{3}{2}\cdot(-1 \pm \sqrt{-3})\cdot\left(\sqrt[3]{1}\right)\cdot v^{\frac{2}{3}} + 2v$$

Indem man aber auch hier für das Product $\left(\sqrt[3]{1}\right)\cdot v^{\frac{2}{3}}$ den gleichbedeutenden Ausdruck setzt, geht letztere Reihe über in

$$\text{XVIII)}\quad u = \frac{3}{2}\cdot(-1 \pm \sqrt{-3})\cdot\left(\cos\frac{2\cdot(k+2h)}{3}\cdot\pi \pm \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{2\cdot(k+2h)}{3}\cdot\pi\right)$$
$$\cdot v^{\frac{2}{3}} + 2v$$

Setzt man $k + 2h = 0$, so bekommt man

$$\text{XIX)}\quad u = \frac{3}{2}\cdot(-1 \pm \sqrt{-3})\cdot v^{\frac{2}{3}} + 2v$$

Also ganz dieselben zwei Formen, wie in XV. Setzt man aber $k + 2h = 1$, so bekommt man zunächst

$$\text{XX)}\quad u = \frac{3}{2}\cdot(-1 \pm \sqrt{-3})\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1 \pm \sqrt{-3})\cdot v^{\frac{2}{3}} + 2v$$

Lässt man bei den Doppelzeichen entweder durchweg die oberen oder durchweg die unteren gelten, so bekommt man

$$\text{XXI)}\quad u = \frac{3}{2}\cdot(-1 \mp \sqrt{-3})\cdot v^{\frac{2}{3}} + 2v$$

Diese Reihe repräsentirt (aber in umgekehrter Ordnung) dieselben zwei Formen, welche schon durch XV und XIX repräsentirt sind.

Lässt man aber in XX bei den Doppelzeichen jedesmal die entgegengesetzten gelten, so bekommt man

$$\text{XXII)}\quad u = 3\cdot v^{\frac{2}{3}} + 2v$$

und diese Reihe repräsentirt dieselbe eindeutige und reelle Form, welche schon durch XIV repräsentirt ist.

Man vergleiche noch §. 37, wo eine steigende Reihe vorkommt, die ebenfalls eine geschlossene ist. Hinsichtlich der Behandlung vielförmiger Ausdrücke sehe man noch §. 41.

§. 31. **Man soll aus der unentwickelten Gleichung**

$$\text{I)}\quad u^3 - 6u^2 \cdot v + 12u \cdot v^2 - 27 \cdot v^2 - 8 \cdot v^3 = 0$$

die nach fallenden Potenzen des v fortschreitenden Reihen entwickeln.

Man setze $\frac{1}{\omega}$ an die Stelle des v in Gleichung I ein, so bekommt man

$$\text{II)}\quad 8 + 27 \cdot \omega - 12\omega \cdot u + 6\omega^2 \cdot u^2 - \omega^3 \cdot u^3 = 0$$

Man hat nun die Reihe $u = A \cdot \omega^{\alpha} + B \cdot \omega^{\beta} + C \cdot \omega^{\gamma} + \cdot \cdot \cdot \cdot$ mit der Rücksicht zu entwickeln, dass $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, etc. Man setze an die Stelle des u vorerst nur $(A \cdot \omega^{\alpha} + R_1)$, wo R_1 die Ergänzung nach dem ersten Gliede der zu suchenden Reihe bedeutet. Gleichung II geht dann über in

$$\text{III)}\quad 8 + 27 \cdot \omega - 12A \cdot \omega^{\alpha+1} + 6A^2 \cdot \omega^{2\alpha+2} - A^3 \cdot \omega^{3\alpha+3} - 12\omega \cdot R_1$$
$$+ 12A \cdot \omega^{\alpha+2} \cdot R_1 - 3A^2 \cdot \omega^{2\alpha+3} \cdot R_1 + 6\omega^2 \cdot R_1^2 - 3A \cdot \omega^{\alpha+3} \cdot R_1^2$$
$$- \omega^3 \cdot R_1^3 = 0$$

Da die Zahl 8 soviel ist, als $8 \cdot \omega^0$, so sind die hier zu vergleichenden Exponenten folgende:

$$0,\ (\alpha + 1),\ (2\alpha + 2),\ (3\alpha + 3)$$

und man hat folgende Gleichungen

$$0 = 0$$
$$\alpha + 1 = 0 + (\alpha - (-1))$$
$$2\alpha + 2 = 0 + 2 \cdot (\alpha - (-1))$$
$$3\alpha + 3 = 0 + 3 \cdot (\alpha - (-1))$$

Der einzige Werth, welchen hier α bekommen kann, ist $\alpha = -1$; und da dabei alle zu vergleichenden Exponenten einander gleich werden, so kann α keinen andern brauchbaren Werth mehr bekommen. Man hat nun zunächst die Gleichung

$$8 - 12 \cdot A \cdot \omega^{\alpha+1} + 6 \cdot A^2 \cdot \omega^{2\alpha+2} - A^3 \cdot \omega^{3\alpha+3} = 0$$

oder

$$(2 - A \cdot \omega^{\alpha+1})^3 = 0$$

Daraus folgt $A = 2$ und $\alpha = -1$. Gleichung III reducirt sich nun auf

$$\text{IV)}\quad 27 \cdot \omega - \omega^3 \cdot R_1^3 = 0$$

Daraus folgt $R_1^3 = 27 \cdot \omega^{-2}$, und $R_1 = 3 \cdot \left(\sqrt[3]{1}\right) \cdot \omega^{-\frac{2}{3}}$. Da man für R_1 einen geschlossenen Ausdruck bekommen hat, so ist die gesuchte Reihe selbst eine geschlossene, nemlich

$$u = 2 \cdot \omega^{-1} + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{1}\right) \cdot \omega^{-\frac{2}{3}}$$

und wenn man $\frac{1}{v}$ statt ω zurückführt, so bekommt man

$$u = 2v + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{1}\right) \cdot v^{\frac{2}{3}}$$

Diese fallende Reihe ist aber die umgekehrte von der vorhin gefundenen steigenden,

wie sein muss, weil die Reihen geschlossene sind. Auch diese Reihe repräsentirt nicht mehr und nicht weniger als die drei Formen des u zugleich; und man kann, wenn man will, sie in drei verschiedene eindeutige Formen zerlegen.

Diese Reihe ist aber eine von denen, wo die Vielförmigkeit nicht gleich bei dem ersten Gliede anfängt.

§. 32. Man soll aus der unentwickelten Gleichung

$$\text{I)}\quad u^3 - 3n \cdot u \cdot v + v^3 = 0$$

die nach Potenzen des v aufsteigenden Reihen entwickeln.

Man ordne die gegebene Gleichung auf folgende Weise:

$$\text{II)}\quad v^3 - 3n \cdot u \cdot v + u^3 = 0$$

Nun führe man vorerst $(A \cdot v^{\alpha} + R_1)$ statt u überall ein, und man bekommt

$$\text{III)}\quad v^3 - 3A \cdot n \cdot v^{\alpha + 1} + A^3 \cdot v^{3\alpha} - 3nv \cdot R_1 + 3A^2 \cdot v^{2\alpha} \cdot R_1 + 3A \cdot v^{\alpha} \cdot R_1^2 + R_1^3 = 0$$

Die zu vergleichenden Exponenten sind 3, $(\alpha + 1)$ und 3α, und man bekommt folgende Gleichungen:

$$3 = 3$$
$$\alpha + 1 = 3 + (\alpha - 2)$$
$$3\alpha = 3 + 3 \cdot (\alpha - 1)$$

Der grösste Werth, welchen hier α bekommen kann, ist $\alpha = 2$; und man hat jetzt den Exponenten $(\alpha + 1)$ mit allen folgenden zu vergleichen, so dass man folgende Gleichungen bekommt:

$$\alpha + 1 = \alpha + 1$$
$$3\alpha = \alpha + 1 + 2 \cdot \left(\alpha - \tfrac{1}{2}\right)$$

Der grösste Werth, welchen hier α bekommen kann, ist $\alpha = \frac{1}{2}$; und da sich jetzt unter den kleinsten Exponenten auch der letzte befindet, so hat α keinen weiteren brauchbaren Werth mehr.

Erstens, es sei $\alpha = 2$. Dabei gibt sich aus Gleichung III noch folgende:

$$v^3 - 3n \cdot A \cdot v^{\alpha + 1} = 0$$

also ist $\alpha = 2$, und $A = \frac{1}{3n}$. Man führe diese Resultate in III ein, und reducire soviel als möglich. Hierauf setze man $(B \cdot v^{\beta} + R_2)$ an die Stelle des R_1, wo R_2 die Ergänzung nach dem zweiten Gliede der zu suchenden Reihe bedeutet. Dadurch bekommt man dann

$$\text{IV)}\quad \frac{v^6}{27n^3} - 3nB \cdot v^{\beta + 1} + \frac{B}{3n^2} \cdot v^{\beta + 4} + \frac{B^2}{n} \cdot v^{2\beta + 2} + B^3 \cdot v^{3\beta} - 3nv \cdot R_2 + \frac{v^4}{3n^2} \cdot R_2 + \frac{2B}{n} \cdot v^{\beta + 2} \cdot R_2 + 3B^2 \cdot v^{2\beta} \cdot R_2 + \frac{v^2}{n} \cdot R_2^2 + 3B \cdot v^{\beta} \cdot R_2^2 + R_2^3 = 0$$

Die hier zu vergleichenden Exponenten sind 6, $(\beta + 1)$, $(\beta + 4)$, $(2\beta + 2)$, 3β. Da aber $\alpha = 2$ ist, so muss $\beta > 2$ sein; und unter diesen Umständen kann nur $(\beta + 1)$ der kleinste unter den unbestimmten Exponenten sein. Man hat also die Gleichung

$$\frac{v^6}{27n^3} - 3nB \cdot v^{\beta + 1} = 0$$

Daraus folgt $\beta = 5$ und $B = \left(\frac{1}{3n}\right)^4$. Man führe nun diese Resultate in Gleichung IV ein, und reducire so viel, als möglich; dadurch bekommt man

$$\text{V)}\quad \frac{1}{3n^2}\cdot\left(\frac{1}{3n}\right)^4\cdot v^9 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{3n}\right)^8\cdot v^{12} + \left(\frac{1}{3n}\right)^{12}\cdot v^{15} - 3nv\cdot R_2 + \frac{v^4}{3n^2}\cdot R_2$$
$$+ \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{1}{3n}\right)^4\cdot v^7\cdot R_2 + 3\cdot\left(\frac{1}{3n}\right)^8\cdot v^{10}\cdot R_2 + \frac{v^2}{n}\cdot R_2^2 + 3\cdot\left(\frac{1}{3n}\right)^4\cdot v^5\cdot R_2^2 + R_2^3 = 0$$

An die Stelle des R_2 setze man jetzt $(C\cdot v^\gamma + R_3)$, und die nun zu vergleichenden Exponenten sind

$$\text{VI)}\quad \begin{cases} 9 \\ (\gamma+1),\ (\gamma+4),\ (\gamma+7),\ (\gamma+10) \\ (2\gamma+2),\ (2\gamma+5) \\ 3\gamma \end{cases}$$

Da nun $\gamma > 5$ werden muss, so kann nur $(\gamma+1)$ der kleinste unter den noch unbestimmten Exponenten sein. Man bekommt also $\gamma + 1 = 9$, d. h. $\gamma = 8$ und $C = 3\cdot\left(\frac{1}{3n}\right)^7$. Die in VI aufgestellten unbestimmten Exponenten gehen nun in folgende ganze Zahlen über:

9, 12, 15, 18, 21, 24

Indem man aber die für γ und C gefundenen Resultate einsetzt, soviel als möglich reducirt, und dann $(D\cdot v^\delta + R_4)$ an die Stelle des R_3 setzt; so sind die sich nun ergebenden unbestimmten Exponenten folgende:

$$\text{VII)}\quad \begin{cases} (\delta+1),\ (\delta+4),\ (\delta+7),\ (\delta+10),\ (\delta+13),\ (\delta+16) \\ (2\delta+2),\ (2\delta+5),\ (2\delta+8) \\ 3\delta \end{cases}$$

Man erkennt nun schon mit Bestimmtheit, dass die Exponenten der zu suchenden Reihe nur aus folgenden Zahlen

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, etc.

genommen werden können; und wenn irgend einer dieser Exponenten nicht vorkommen darf, so muss der Coefficient des fraglichen Gliedes Null sein. Man ist also auf dem Punkte, die Form der Reihe zu haben, und man kann geradezu

$$\text{VIII)}\quad u = A_1 . v^2 + A_2 . v^5 + A_3 . v^8 + A_4 . v^{11} + A_5 . v^{14} + \ldots\ldots$$

in Gleichung I einsetzen, und alle mit einerlei Dimension des v behafteten Theilsätze für sich verschwinden lassen. Die Gleichungen, aus welchen die Coefficienten bestimmt werden, beobachten dann folgendes Discerptionsgesetz:

1) $1 - 3n\cdot A_1 = 0$

2) $-3n\cdot A_2 + A_1A_1A_1 = 0$

3) $-3n\cdot A_3 + (3A_1A_1A_2) = 0$

4) $-3n\cdot A_4 + (3A_1A_1A_3 + 3A_1A_2A_2) = 0$

5) $-3n\cdot A_5 + (3A_1A_1A_4 + 6A_1A_2A_3 + A_2A_2A_2) = 0$

und so fort.

Da der erste Coefficient A_1 reell und eindeutig ist, und alle folgenden Coefficientengleichungen den jedesmal zu bestimmenden Coefficienten nur in der ersten Potenz enthalten; so sind alle Coefficienten dieser Reihe eindeutig und reell. Diese Reihe repräsentirt also nur eine Form des u. Hinsichtlich der zu dieser Reihe hinzuzufügenden Ergänzung sehe man die Anmerkung am Schlusse dieses §.

Zweitens. Es sei $\alpha = \frac{1}{2}$. Dabei gibt sich aus Gleichung III noch folgende:

$$A^3\cdot v^{3\alpha} - 3nA\cdot v^{\alpha+1} = 0$$

Daraus folgt $\alpha = \frac{1}{2}$ und $A = \sqrt[3]{3n}$. Man führe diese Resultate in III ein, und reducire soviel als möglich. Hierauf setze man $(B \cdot v^{\beta} + R_2)$ an die Stelle des R_1 überall ein, und es ergibt sich

$$\text{IX)}\quad v^3 + 6nB \cdot v^{\beta+1} + 3A \cdot B^2 \cdot v^{2\beta+\frac{1}{2}} + B^3 \cdot v^{3\beta} + 6n \cdot v \cdot R_2$$
$$+ 6AB \cdot v^{\beta+\frac{1}{2}} \cdot R_2 + 3B^2 \cdot v^{2\beta} \cdot R_2 + 3A \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot R_2^2 + 3B \cdot v^{\beta} \cdot R_2^2 + R_2^3 = 0$$

Die hier zu vergleichenden Exponenten sind nun

$$3,\ (\beta+1),\ (2\beta+\tfrac{1}{2}),\ 3\beta$$

und man bekommt folgende Gleichungen

$$3 = 3$$
$$\beta + 1 = 3 + (\beta - 2)$$
$$2\beta + \tfrac{1}{2} = 3 + 2 \cdot (\beta - \tfrac{5}{4})$$
$$3\beta = 3 + 3 \cdot (\beta - 1)$$

Der grösste Werth, welchen hier β bekommen kann, ist $\beta = 2$; und man hat jetzt den Exponenten $(\beta + 1)$ mit allen folgenden zu vergleichen, so dass man folgende Gleichungen bekommt:

$$\beta + 1 = \beta + 1$$
$$2\beta + \tfrac{1}{2} = \beta + 1 + (\beta - \tfrac{1}{2})$$
$$3\beta = \beta + 1 + 2 \cdot (\beta - \tfrac{1}{2})$$

Hier kann nur $\beta = \frac{1}{2}$ werden; und da schon $\alpha = \frac{1}{2}$ ist, so kann $\beta = \frac{1}{2}$ nicht weiter berücksichtigt werden. Man hat nun folgende Gleichung

$$v^3 + 6n \cdot B \cdot v^{\beta+1} = 0$$

Daraus folgt $\beta = 2$ und $B = -\frac{1}{6n}$. Man führe diese Resultate in Gleichung IX überall ein, reducire soviel als möglich, und es ergibt sich

$$\text{X)}\quad 3A \cdot \left(\frac{1}{6n}\right)^2 \cdot v^{\frac{9}{2}} - \left(\frac{1}{6n}\right)^3 \cdot v^6 + 6nv \cdot R_2 - \frac{A}{n} \cdot v^{\frac{5}{2}} \cdot R_2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{6n}\right)^2 \cdot v^4 \cdot R_2$$
$$+ 3A \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot R_2^2 - \frac{v^2}{2n} \cdot R_2^2 + R_2^3 = 0$$

Indem man nun $(C \cdot v^{\gamma} + R_3)$ an die Stelle des R_2 überall einsetzt, bekommt man folgende Exponenten mit einander zu vergleichen:

$$\text{XI)}\quad \begin{cases} \frac{9}{2} \\ (\gamma+1),\ (\gamma+\frac{5}{2}),\ (\gamma+4) \\ (2\gamma+\frac{1}{2}),\ (2\gamma+2) \\ 3\gamma \end{cases}$$

Da nun $\gamma > 2$ werden muss, so kann nur $(\gamma + 1)$ der kleinste unter den noch unbestimmten Exponenten sein. Man bekommt also $(\gamma + 1) = \frac{9}{2}$, d. h. $\gamma = \frac{7}{2}$, und $C = -\frac{1}{24 \cdot n^2 \cdot \sqrt[3]{3n}}$. Die in XI aufgestellten unbestimmten Exponenten gehen nun in folgende bestimmte Zahlen über,

$$\frac{9}{2},\ 6,\ \frac{15}{2},\ 9,\ \frac{21}{2}$$

Indem man aber für γ und C die Resultate einführt, soviel als möglich reducirt, und

dann $(D \cdot v^{\delta} + R_4)$ an die Stelle des R_3 überall einsetzt; so sind die sich nun ergebenden unbestimmten Exponenten folgende:

$$\text{XII)}\left\{\begin{array}{l}(\delta+1),\ (\delta+\frac{5}{2}),\ (\delta+4),\ (\delta+\frac{11}{2}),\ (\delta+7)\\ (2\delta+\frac{1}{2}),\ (2\delta+2),\ (2\delta+\frac{7}{2})\\ 3\delta\end{array}\right.$$

Man erkennt nun schon mit Bestimmtheit, dass die Exponenten der zu suchenden Reihe nur aus folgenden Zahlen

$$\frac{1}{2},\ 2,\ \frac{7}{2},\ 5,\ \frac{13}{2},\ 8,\ \frac{19}{2},\ \text{etc.}$$

genommen werden können; und wenn irgend einer dieser Exponenten nicht vorkommen darf, so muss der Coefficient des fraglichen Gliedes Null sein. Man ist also auf dem Punkte, die Form der Reihe zu haben, und man kann gradezu

$$\text{XIII)}\quad u = A_1 \cdot v^{\frac{1}{2}} + A_2 \cdot v^2 + A_3 \cdot v^{\frac{7}{2}} + A_4 \cdot v^5 \ldots.$$

in Gleichung I einsetzen, und alle mit einerlei Dimension des v behafteten Theilsätze für sich verschwinden lassen. Die Gleichungen, aus welchen die Coefficienten bestimmt werden, beobachten folgendes Discerptionsgesetz:

1) $-3n \cdot A_1 + A_1A_1A_1 = 0$

2) $1 - 3n \cdot A_2 + (3A_1A_1A_2) = 0$

3) $-3n \cdot A_3 + (3A_1A_1A_3 + 3A_1A_2A_2) = 0$

4) $-3n \cdot A_4 + (3A_1A_1A_4 + 6A_1A_2A_3 + A_2A_2A_2) = 0$

5) $-3n \cdot A_5 + (3A_1A_1A_5 + 6A_1A_2A_4 + 3A_1A_3A_3 + 3A_2A_2A_3) = 0$

und so fort.

Der erste dieser Coefficienten hat zwei Formen. Da in jeder dieser Gleichungen von der zweiten an der jedesmal zu bestimmende Coefficient nur in der ersten Potenz vorkommt, so kann auch jeder Coefficient vom zweiten an durch eine rationale Function von A_1 ausgedrückt werden. Und somit ist dargethan, dass diese Reihe nicht mehr und nicht weniger als zwei verschiedene Formen des u zugleich repräsentirt. Diese Reihe hat die Eigenschaft, dass schon das erste Glied zweiförmig ist.

Durch diese und die vorige Reihe sind nun die drei Formen des u in steigenden Reihen vollständig hergestellt; und man kann sich, wenn man will, drei verschiedene eindeutige Reihenformen bilden.

Bemerkung hinsichtlich der zuzufügenden Ergänzung.

Hätte man die Reihe VIII z. B. nach dem zweiten Gliede abbrechen wollen, so hätte man die entsprechende Ergänzung aus Gleichung V entnehmen müssen. Aus dieser Gleichung ergeben sich aber für R_2 zwei Ausdrücke, nemlich ein einförmiger und ein zweiförmiger. Der einförmige ist derjenige, welcher hinter das zweite Glied der Reihe VIII gesetzt werden muss, aber der zweiförmige ist zu verwerfen; denn er würde, wenn man ihn hinter das zweite Glied der Reihe VIII setzt, die bereits hergestellten zwei Glieder zerstören, und hierauf geradezu in Reihe XIII übergehen (einige solche Fälle kann man in Aufgabe 53 finden).

Hätte man ebenso die Reihe XIII nach dem zweiten Gliede abbrechen wollen, so hätte man die entsprechende Ergänzung aus der Gleichung X entnehmen müssen. Man hätte aber auch jetzt zwei verschiedene Ausdrücke für R_2 bekommen. Der eine würde, wenn man ihn hinter das zweite Glied der Reihe XIII setzt, die bereits hergestellten zwei Glieder zerstören, und dann gradezu in die Reihe VIII übergehen; dieser Ausdruck ist aber nicht die zu XIII gehörige Ergänzung, muss also verworfen werden. Dagegen der andere für R_2 sich aus X ergebende Ausdruck ist die hinter das zweite Glied der Reihe XIII hinzuzufügende Ergänzung.

§. 33. Man soll aus der unentwickelten Gleichung

$$\text{I)}\quad u^3 - 3n \cdot u \cdot v + v^3 = 0$$

die nach fallenden Potenzen des v fortschreitenden Reihen entwickeln.

Man setze $\frac{1}{\omega}$ an die Stelle des v, und Gleichung I geht über in

$$\text{II)}\quad 1 - 3nu \cdot \omega^2 + \omega^3 \cdot u^3 = 0$$

Man setze $(A \cdot \omega^{\alpha} + R_1)$ an die Stelle des u ein, so gibt sich

$$\text{III)}\quad 1 - 3nA \cdot \omega^{\alpha+2} + A^3 \cdot \omega^{3\alpha+3} - 3n\omega^2 \cdot R_1 + 3A^2 \cdot \omega^{2\alpha+3} \cdot R_1$$
$$+ 3A \cdot \omega^{\alpha+3} \cdot R_1^2 + \omega^3 \cdot R_1^3 = 0$$

Da die Zahl 1, welche den ersten Theilsatz in dieser Gleichung ausmacht, soviel ist, als ω^0; so hat man folgende Exponenten

$$0,\ (\alpha+2),\ (3\alpha+3)$$

miteinander zu vergleichen, so dass man folgende Gleichungen bekommt

$$0 = 0$$
$$\alpha + 2 = 0 + (\alpha - (-2))$$
$$3\alpha + 3 = 0 + 3 \cdot (\alpha - (-1))$$

Der grösste Werth, welchen hier α bekommen kann, ist $\alpha = -1$; und da dabei der erste und letzte Exponent einander gleich werden, so kann α keinen weiteren brauchbaren Werth mehr annehmen. Man hat also folgende Gleichung

$$1 + A^3 \cdot \omega^{3\alpha+3} = 0$$

Daraus folgt $\alpha = -1$ und $A = \sqrt[3]{-1}$. Man führe diese Resultate in III ein, und reducire soviel, als möglich. Sodann setze man $(B \cdot \omega^{\beta} + R_2)$ an die Stelle von R_1; und man bekommt

$$\text{IV)}\quad -3nA \cdot \omega + 3A^2 \cdot B \cdot \omega^{\beta+1} - 3nB \cdot \omega^{\beta+2} + 3A \cdot B^2 \cdot \omega^{2\beta+2} + B^3 \cdot \omega^{3\beta+3}$$
$$+ 3A^2 \cdot \omega \cdot R_2 - 3n \cdot \omega^2 \cdot R_2 + 6A \cdot B \cdot \omega^{\beta+2} \cdot R_2 + 3B^2 \cdot \omega^{2\beta+3} \cdot R_2$$
$$+ 3A \cdot \omega^2 \cdot R_2^2 + 3B \cdot \omega^{\beta+3} \cdot R_2^2 + \omega^3 \cdot R_2^3 = 0$$

Die hier zu vergleichenden Exponenten sind nun folgende

$$1,\ (\beta+1),\ (\beta+2),\ (2\beta+2),\ (3\beta+3)$$

und man bekommt folgende Gleichungen

$$1 = 1$$
$$\beta + 1 = 1 + (\beta - 0)$$
$$\beta + 2 = 1 + (\beta - (-1))$$
$$2\beta + 2 = 1 + 2 \cdot \left(\beta - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right)$$
$$3\beta + 3 = 1 + 3 \cdot \left(\beta - \left(-\tfrac{2}{3}\right)\right)$$

Der grösste Werth, welchen hier β bekommen kann, ist $\beta = 0$; und man hat nun $(\beta+1)$ mit allen folgenden Exponenten zu vergleichen, bekommt also folgende Gleichungen:

$$\beta + 1 = \beta + 1$$
$$\beta + 2 = \beta + 1 + 1$$
$$2\beta + 2 = \beta + 1 + (\beta - (-1))$$
$$3\beta + 3 = \beta + 1 + 2 \cdot (\beta - (-1))$$

Der einzige Werth, welchen hier β bekommen kann, ist $\beta = -1$; da aber schon $\alpha = -1$ ist, so darf $\beta = -1$ nicht weiter berücksichtigt werden. Man hat also jetzt die Gleichung

$$-3nA \cdot \omega + 3A^2 \cdot B \cdot \omega^{\beta+1} = 0$$

Daraus folgt $\beta = 0$ und $B = \frac{n}{A}$. Man führe diese Resultate in IV ein, reducire soviel als möglich, und setze dann $(C \cdot \omega^\gamma + R_3)$ an die Stelle des R_2; und man bekommt folgende Exponenten mit einander zu vergleichen

$$\text{V)} \quad \begin{cases} 3 \\ (\gamma + 1), (\gamma + 2), (\gamma + 3) \\ (2\gamma + 2), (2\gamma + 3) \\ (3\gamma + 3) \end{cases}$$

Da nun $\beta = 0$ ist, so muss γ positiv sein; und unter dieser Bedingung kann nur $(\gamma + 1)$ der kleinste unter den unbestimmten Exponenten sein. Man bekommt also $\gamma + 1 = 3$, d. h. $\gamma = 2$, und $C = -\frac{n^3}{3A^5}$. Die in V aufgestellten unbestimmten Exponenten gehen nun in folgende bestimmte Zahlen über:

$$3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Indem man aber für γ und C die Resultate einführt, soviel als möglich reducirt, und dann $(D \cdot \omega^\delta + R_4)$ an die Stelle des R_3 einsetzt; so sind die sich nun ergebenden unbestimmten Exponenten folgende:

$$\text{VI)} \quad \begin{cases} (\delta + 1), (\delta + 2), (\delta + 3), (\delta + 4), (\delta + 5), (\delta + 7) \\ (2\delta + 2), (2\delta + 3), (2\delta + 4) \\ 3\delta \end{cases}$$

Man erkennt nun schon mit Bestimmtheit, dass die Exponenten der zu suchenden Reihe nur aus folgenden Zahlen

$$-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots.$$

genommen werden können; und wenn irgend einer dieser Exponenten nicht vorkommen darf, so muss der Coefficient des fraglichen Gliedes Null sein. Man ist also auf dem Punkte, die Form der Reihe zu haben, und man kann gradezu

$$\text{VII)} \quad u = A_1 . \omega^{-1} + A_2 + A_3 . \omega + A_4 . \omega^2 + A_5 . \omega^3 + \ldots\ldots$$

in Gleichung II einsetzen, und alle mit einerlei Dimension des ω behafteten Theilsätze für sich verschwinden lassen. Die Gleichungen, aus welchen die Coefficienten bestimmt werden, beobachten dann folgendes Discerptionsgesetz

1) $1 + A_1A_1A_1 = 0$

2) $-3nA_1 + (3A_1A_1A_2) = 0$

3) $-3nA_2 + (3A_1A_1A_3 + 3A_1A_2A_2) = 0$

4) $-3nA_3 + (3A_1A_1A_4 + 6A_1A_2A_3 + A_2A_2A_2) = 0$

5) $-3nA_4 + (3A_1A_1A_5 + 6A_1A_2A_4 + 3A_1A_3A_3 + 3A_2A_2A_3) = 0$

und so fort.

Der erste dieser Coefficienten hat drei Formen; da aber in jeder dieser Coefficientengleichungen von der zweiten an der jedesmal zu bestimmende Coefficient nur in der ersten Potenz vorkommt, so kann auch jeder Coefficient vom zweiten an durch eine rationale Function von A_1 ausgedrückt werden; und somit ist dargethan, dass diese Reihe nicht mehr und nicht weniger als die drei verschiedenen Formen des u zugleich repräsentirt. Setzt man zuletzt wieder $\frac{1}{v}$ statt ω zurück, so hat man eine fallende Reihe von der Form

$$\text{VIII)} \quad u = A_1 . v + A_2 + A_3 . v^{-1} + A_4 . v^{-2} + A_5 . v^{-3} + \ldots\ldots$$

Bei Bestimmung der Coefficienten wird man finden, dass $A_3 = 0$ ist. Diese Reihe hat also die Eigenschaft, dass schon das erste Glied dreiförmig ist; und man kann sie, wenn man will, in drei verschiedene eindeutige Reihenformen zerlegen.

Bemerkung hinsichtlich der zuzufügenden Ergänzung.

Hätte man die Reihe VII z. B. nach dem zweiten Gliede abbrechen wollen, so hätte man die entsprechende Ergänzung aus Gleichung IV entnehmen müssen. Da aber die hiesige Reihe alle Formen des u zugleich repräsentirt, so kann sich auch aus Gleichung IV für R_2 kein Ausdruck ergeben, welcher nicht hinter das zweite Glied der Reihe VII gesetzt werden dürfte (vergleiche in dieser Beziehung §. 32, besonders die dortige Schlussbemerkung). So wie aber die Reihe VII in die Reihe VIII übergeht, dadurch dass man ω in $\frac{1}{v}$ zurückkehren lässt; ebenso geht auch die zu Reihe VII gehörige Ergänzung jedesmal in die zu Reihe VIII gehörige Ergänzung über, dadurch dass man ω in $\frac{1}{v}$ zurückkehren lässt.

§. 34. **Man soll aus der unentwickelten Gleichung**

$$\text{I)}\quad m \cdot v^2 + v^3 + m^2 \cdot u + 2m \cdot v \cdot u - 2m \cdot u^2 - 3v \cdot u^2 + u^3 = 0$$

die nach Potenzen des v aufsteigenden Reihen entwickeln.

Die vorerst zu vergleichenden Exponenten sind

$$2,\ \alpha,\ (\alpha+1),\ 2\alpha,\ (2\alpha+1),\ 3\alpha$$

und man hat folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \\ \alpha &= 2 + (\alpha - 2) \\ \alpha + 1 &= 2 + (\alpha - 1) \\ 2\alpha &= 2 + 2 \cdot (\alpha - 1) \\ 2\alpha + 1 &= 2 + 2 \cdot \left(\alpha - \tfrac{1}{2}\right) \\ 3\alpha &= 2 + 3 \cdot \left(\alpha - \tfrac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Der grösste Werth, welchen hier α bekommen kann, ist $\alpha = 2$; und man hat jetzt den Exponenten α mit allen übrigen zu vergleichen, so dass man folgende Gleichungen bekommt:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha \\ \alpha + 1 &= \alpha + 1 \\ 2\alpha &= \alpha + (\alpha - 0) \\ 2\alpha + 1 &= \alpha + (\alpha - (-1)) \\ 3\alpha &= \alpha + 2 \cdot (\alpha - 0) \end{aligned}$$

Der grösste Werth, welchen hier α bekommen kann, ist $\alpha = 0$, und da jetzt der erste und letzte der hier verglichenen Exponenten einander gleich werden, so kann α keinen weiteren brauchbaren Werth mehr annehmen.

Erstens. Es sei $\alpha = 2$. Man setze $(A \cdot v^2 + R_1)$ an die Stelle des u in Gleichung I überall ein, so bekommt man zunächst die Gleichung

$$m + m^2 \cdot A = 0$$

Daraus folgt $A = -\frac{1}{m}$; und Gleichung I reducirt sich auf

$$\text{II)}\quad -v^3 - \frac{2 \cdot 4^4}{m} - \frac{3 \cdot v^5}{m^2} - \frac{v^6}{m^3} + \left(m^2 + 2mv + 4 \cdot v^2 + \frac{6 \cdot v^3}{m} - \frac{3 \cdot v^4}{m^2}\right) \cdot R_1$$
$$- \left(2m + 3v + \frac{3v^2}{m}\right) \cdot R_1^2 + R_1^3 = 0$$

An die Stelle des R_1 setze man $(B \cdot v^\beta + R_2)$, und man bekommt $\beta = 3$ und $B = +\frac{1}{m^2}$

Ueberhaupt wird man bald erkennen, dass die Reihe folgende Form

$$u = A_1 \cdot v^2 + A_2 \cdot v^3 + A_3 \cdot v^4 + A_4 \cdot v^5 + \ldots.$$

haben muss; und sollte irgend eines dieser Glieder nicht stattfinden dürfen, so muss

dessen Coefficient Null sein. Die Coefficientengleichungen beobachten aber folgendes Discerptionsgesetz:

1) $m + m^2 \cdot A_1 = 0$

2) $1 + m^2 \cdot A_2 + 2m \cdot A_1 = 0$

3) $m^2 \cdot A_3 + 2m \cdot A_2 - 2m \cdot (A_1 A_1) = 0$

4) $m^2 \cdot A_4 + 2m A_3 - 2m \cdot (2A_1 A_2) - 3 \cdot (A_1 A_1) = 0$

5) $m^2 \cdot A_5 + 2m \cdot A_4 - 2m \cdot (2A_1 A_3 + A_2 A_2) - 3 \cdot (2A_1 A_2) + (A_1 A_1 A_1) = 0$

6) $m^2 \cdot A_6 + 2m \cdot A_5 - 2m \cdot (2A_1 A_4 + 2A_2 A_3) - 3 \cdot (2A_1 A_3 + A_2 A_2)$
$+ (3 \cdot A_1 A_1 A_2) = 0$

7) $m^2 \cdot A_7 + 2m \cdot A_6 - 2m \cdot (2A_1 A_5 + 2A_2 A_4 + A_3 A_3) - 3 \cdot (2A_1 A_4 + 2A_2 A_3)$
$+ (3 \cdot A_1 A_1 A_3 + 3A_1 A_2 A_2) = 0$

und so fort.

Für A_1 gibt sich der reelle und eindeutige Ausdruck $\left(-\frac{1}{m}\right)$; und da der jedesmal zu bestimmende Coefficient nur in der ersten Potenz vorkommt, so kann auch jeder Coefficient durch eine rationale Function von A_1 ausgedrückt werden; und somit sind alle Coefficienten der zu suchenden Reihe eindeutig und reell.

Zweitens. Es sei $\alpha = 0$. Man setze $(A + R_1)$ an die Stelle des u in Gleichung I überall ein, so bekommt man zunächst die Gleichung $A \cdot (m - A)^2 = 0$, d. h. $A = m$. Führt man jetzt noch die für α und A gefundenen Ausdrücke ein, so ergibt sich

III) $-m^2 \cdot v + m \cdot v^2 + v^3 - 4m \cdot v \cdot R_1 + m \cdot R_1^2 - 3v \cdot R_1^2 + R_1^3 = 0$

Man führe nun $(B \cdot v^\beta + R_2)$ an die Stelle des R_1 überall ein, so bekommt man folgende Exponenten mit einander zu vergleichen:

$$1,\ (\beta + 1),\ 2\beta,\ (2\beta + 1),\ 3\beta$$

und man bekommt nun folgende Gleichungen:

$$1 = 1$$
$$\beta + 1 = 1 + (\beta - 0)$$
$$2\beta = 1 + 2 \cdot \left(\beta - \tfrac{1}{2}\right)$$
$$2\beta + 1 = 1 + 2 \cdot (\beta - 0)$$
$$3\beta = 1 + 3 \cdot \left(\beta - \tfrac{1}{3}\right)$$

Der grösste Werth, welchen jetzt β bekommen kann, ist $\beta = \frac{1}{2}$; und man hat jetzt den Exponenten 2β mit allen folgenden zu vergleichen, so dass man noch folgende Gleichungen bekommt:

$$2\beta = 2\beta$$
$$2\beta + 1 = 2\beta + 1$$
$$3\beta = 2\beta + (\beta - 0)$$

Hier kann β keinen andern Werth als Null bekommen; da aber schon $\alpha = 0$ ist, so kann $\beta = 0$ nicht weiter berücksichtigt werden, und man kann nur $\beta = \frac{1}{2}$ setzen. Dazu bekommt man noch $B = \sqrt{m}$. Fährt man so fort, so erkennt man bald, dass die späteren Exponenten nur aus folgenden Zahlen

$$1,\ \tfrac{3}{2},\ 2,\ \tfrac{5}{2},\ 3\ \ldots\ldots$$

genommen werden können. Man kann also die Form der Reihe gradezu voraussetzen, und die Coefficientengleichungen herstellen. Man sieht aber auf der Stelle, dass Gleichung III dazu bequemer ist, als Gleichung I; und desshalb setze man

$$R_1 = A_1 \cdot v^{\frac{1}{2}} + A_2 \cdot v + A_3 \cdot v^{\frac{3}{2}} + A_4 \cdot v^2 + A_5 \cdot v^{\frac{5}{2}} + \ldots$$

in Gleichung III ein; und sollte eines dieser Glieder nicht vorkommen dürfen, so muss

dessen Coefficient Null sein. Die Coefficientengleichungen beobachten nun folgendes Discerptionsgesetz:

1) $-m^2 + m \cdot A_1A_1 = 0$

2) $-4m \cdot A_1 + m \cdot (2A_1A_2) + (A_1A_1A_1) = 0$

3) $+m - 4m \cdot A_2 - 3 \cdot (A_1A_1) + m \cdot (2A_1A_3 + A_2A_2) + (3A_1A_1A_2) = 0$

4) $-4m \cdot A_3 - 3 \cdot (2A_1A_2) + m \cdot (2A_1A_4 + 2A_2A_3) + (3A_1A_1A_3 + 3A_1A_2A_2) = 0$

5) $1 - 4m \cdot A_4 - 3 \cdot (2A_1A_3 + A_2A_2) + m \cdot (2A_1A_5 + 2A_2A_4 + A_3A_3)$
$+ (3A_1A_1A_4 + 6A_1A_2A_3 + A_2A_2A_2) = 0$

6) $-4mA_5 - 3 \cdot (2A_1A_4 + 2A_2A_3) + m \cdot (2A_1A_6 + 2A_2A_5 + 2A_3A_4)$
$+ (3A_1A_1A_5 + 6A_1A_2A_4 + 3A_1A_3A_3 + 3A_2A_2A_3) = 0$

und so fort.

Von jetzt an geht das Gesetz der Coefficientengleichungen ungestört weiter, weil alle in Gleichung I befindlichen Theilsätze, welche ohne u sind, bereits aufgebraucht sind. Der erste dieser Coefficienten hat zwei Formen; alle obigen Gleichungen von der zweiten an enthalten den jedesmal zu bestimmenden Coefficienten nur in der ersten Potenz, und sonach kann jeder der Coefficienten vom zweiten an durch eine rationale Function von A_1 ausgedrückt werden, wodurch dargethan ist, dass diese Reihe nicht mehr und nicht weniger als zwei verschiedene Formen des u zugleich repräsentirt. Die Reihe selbst ist

$$u = m + A_1 \cdot v^{\frac{1}{2}} + A_2 \cdot v + A_3 \cdot v^{\frac{3}{2}} + A_4 \cdot v^2 + \dots$$

Diese Reihe hat die Eigenschaft, dass das erste Glied noch einförmig ist, und die Zweiförmigkeit erst bei dem zweiten Gliede beginnt.

Durch diese und die vorige Reihe sind also die drei Formen des u in steigenden Reihen vollständig hergestellt; und man kann sich, wenn man will, drei verschiedene eindeutige Reihenformen bilden. Hinsichtlich der zu diesen beiden Reihen jedesmal hinzuzufügenden Ergänzung vergleiche man die am Schlusse des §. 32 gemachte Bemerkung.

§. 35. Man soll aus folgender unentwickelten Gleichung

$$\text{I)}\quad m \cdot v^2 + v^3 + m^2 \cdot u + 2mv \cdot u - 2m \cdot u^2 - 3v \cdot u^2 + u^3 = 0$$

die nach fallenden Potenzen des v fortschreitenden Reihen entwickeln.

Man setze $\frac{1}{\omega}$ statt v, so geht Gleichung I über in

$$\text{II)}\quad 1 + m\omega + 2m \cdot \omega^2 \cdot u + m^2 \cdot \omega^3 \cdot u - 3\omega^2 \cdot u^2 - 2m \cdot \omega^3 \cdot u^2 + \omega^3 \cdot u^3 = 0$$

Da aber $1 = \omega^0$ ist, so sind folgende Exponenten

$$0,\ (\alpha + 2),\ (\alpha + 3),\ (2\alpha + 2),\ (2\alpha + 3),\ (3\alpha + 3)$$

miteinander zu vergleichen, und man hat folgende Gleichungen:

$$0 = 0$$
$$\alpha + 2 = 0 + (\alpha - (-2))$$
$$\alpha + 3 = 0 + (\alpha - (-3))$$
$$2\alpha + 2 = 0 + 2 \cdot (\alpha - (-1))$$
$$2\alpha + 3 = 0 + 2 \cdot \left(\alpha - \frac{-3}{2}\right)$$
$$3\alpha + 3 = 0 + 3 \cdot (\alpha - (-1))$$

Der grösste Werth, welchen hier α bekommen kann, ist $\alpha = -1$; und da dabei der erste und letzte der verglichenen Exponenten einander gleich werden, so hat α keinen weiteren brauchbaren Werth mehr. Man setze also $(A \cdot \omega^{-1} + R_1)$ an die Stelle des u in Gleichung II überall ein, so bekommt man

$$1 - 3A^2 + A^3 = 0$$

woraus sich drei verschiedene Formen für A ergeben. Gleichung II aber reducirt sich auf

$$\text{III)}\quad (1 + 2A - 2A^2)\cdot m\omega + A\cdot m^2\cdot\omega^2 - 3\cdot(2 - A)\cdot A\cdot\omega\cdot R_1$$
$$+ 2m\cdot(1 - 2A)m\cdot\omega^2\cdot R_1 + m^2\cdot\omega^3 R_1 - 3\cdot(1 - A)\cdot\omega^2\cdot R_1^2$$
$$- 2m\cdot\omega^3\cdot R_1^2 + \omega^3\cdot R_1^3 = 0$$

Die jetzt zu vergleichenden Exponenten sind

$$1,\ (\beta+1),\ (\beta+2),\ (\beta+3),\ (2\beta+2),\ (2\beta+3),\ (3\beta+3)$$

und man bekommt folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ \beta + 1 &= 1 + (\beta - 0) \\ \beta + 2 &= 1 + (\beta - (-1)) \\ \beta + 3 &= 1 + (\beta - (-2)) \\ 2\beta + 2 &= 1 + 2\cdot\left(\beta - \frac{-1}{2}\right) \\ 2\beta + 3 &= 1 + 2\cdot(\beta - (-1)) \\ 3\beta + 3 &= 1 + 3\cdot\left(\beta - \frac{-2}{3}\right) \end{aligned}$$

Der grösste Werth, welchen hier β bekommen kann, ist $\beta = 0$; und man hat jetzt den Exponenten $(\beta + 1)$ mit allen folgenden zu vergleichen, so dass man folgende Gleichungen bekommt:

$$\begin{aligned} \beta + 1 &= \beta + 1 \\ \beta + 2 &= \beta + 1 + 1 \\ \beta + 3 &= \beta + 1 + 2 \\ 2\beta + 2 &= \beta + 1 + (\beta - (-1)) \\ 2\beta + 3 &= \beta + 1 + (\beta - (-2)) \\ 3\beta + 3 &= \beta + 1 + 2\cdot(\beta - (-1)) \end{aligned}$$

Der grösste Werth, welchen hier β bekommen kann, ist $\beta = -1$; und da dabei der erste und letzte der zuletzt verglichenen Exponenten einander gleich werden, so gibt es keinen andern für β brauchbaren Werth mehr. Nun ist aber schon $\alpha = -1$; es kann also $\beta = -1$ nicht berücksichtigt werden; und man kann nur $\beta = 0$ nehmen. Ueberhaupt überzeugt man sich bald, dass alle Exponenten der zu entwickelnden Reihe folgende arithmetische Progression bilden:

$$-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Man kann also die Form der Reihe schon voraussetzen, und gradezu

$$\text{IV)}\quad u = A_1\,.\,\omega^{-1} + A_2 + A_3\,.\,\omega + A_4\,.\,\omega^2 + A_5\,.\,\omega^3 + \ldots\,.$$

in Gleichung II einsetzen. Die sich ergebenden Coefficientengleichungen beobachten folgendes Discerptionsgesetz:

$$1)\quad 1 - 3A_1A_1 + A_1A_1A_1 = 0$$

$$2)\quad m + 2m\cdot A_1 - 3\cdot(2A_1A_2) - 2m\cdot(A_1A_1) + (3A_1A_1A_2) = 0$$

$$3)\quad 2m\cdot A_2 + m^2A_1 - 3\cdot(2A_1A_3 + A_2A_2) - 2m\cdot(2A_1A_2) + (3A_1A_1A_3 + 3A_1A_2A_2) = 0$$

$$4)\quad 2m\cdot A_3 + m^2\cdot A_2 - 3\cdot(2A_1A_4 + 2A_2A_3) - 2m\cdot(2A_1A_3 + A_2A_2) + (3A_1A_1A_4 + 6A_1A_2A_3 + A_2A_2A_2) = 0$$

$$5)\quad 2m\cdot A_4 + m^2\cdot A_3 - 3\cdot(2A_1A_5 + 2A_2A_4 + A_3A_3) - 2m\cdot(2A_1A_4 + 2A_2A_3) + (3A_1A_1A_5 + 6\cdot A_1A_2A_4 + 3\cdot A_1A_3A_3 + 3\cdot A_2A_2A_3) = 0$$

und so fort.

Der erste dieser Coefficienten hat drei Formen; alle die obigen Gleichungen von der zweiten an enthalten den jedesmal zu bestimmenden Coefficienten nur in der ersten Potenz, und sonach kann jeder der Coefficienten vom zweiten an durch eine rationale Function von A_1 ausgedrückt werden, wodurch dargethan ist, dass diese Reihe nicht mehr und nicht weniger als die drei verschiedenen Formen des u

zugleich repräsentirt. Führt man wieder $\frac{1}{v}$ statt ω in Gleichung III zurück, so ist die gesuchte Reihe folgende:

$$\text{V)}\quad u = A_1 . v + A_2 + A_3 . v^{-1} + A_4 . v^{-2} + A_5 . v^{-3} + \ldots$$

Diese Reihe hat, wie man sieht, die Eigenschaft, dass schon das erste Glied dreiförmig ist; und man kann sie, wenn man will, in drei eindeutige Reihenformen zerlegen. Hinsichtlich der hinzuzufügenden Ergänzung vergleiche man die am Schlusse des §. 33 gemachte Bemerkung.

§. 36. Man soll aus folgender Gleichung

$$\text{I)}\quad v^3 + 6 \cdot v^4 + 12 \cdot v^5 + 8 \cdot v^6 + 27v^7 - 3v^2 \cdot u - 12v^3 \cdot u - 12v^4 \cdot u + 3v \cdot u^2 + 6v^2 \cdot u^2 - u^3 = 0$$

die nach Potenzen des v aufsteigenden Reihen entwickeln.

Die zu vergleichenden Exponenten sind

$$3,\ (\alpha+2),\ (\alpha+3),\ (\alpha+4),\ (2\alpha+1),\ (2\alpha+2),\ 3\alpha$$

und man bekommt folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3 &= 3 \\ \alpha + 2 &= 3 + (\alpha - 1) \\ \alpha + 3 &= 3 + (\alpha - 0) \\ \alpha + 4 &= 3 + (\alpha - (-1)) \\ 2\alpha + 1 &= 3 + 2 \cdot (\alpha - 1) \\ 2\alpha + 2 &= 3 + 2 \cdot \left(\alpha - \tfrac{1}{2}\right) \\ 3\alpha &= 3 + 3 \cdot (\alpha - 1) \end{aligned}$$

Der grösste Werth, welchen hier α bekommen kann, ist $\alpha = 1$; und da dabei der erste und letzte der verglichenen Exponenten einander gleich werden, so gibt es für α keinen weiteren brauchbaren Werth mehr. Setzt man daher $(A \cdot v + R_1)$ an die Stelle des u in Gleichung I ein, so bekommt man

$$v^3 - 3A \cdot v^3 + 3A^2 \cdot v^3 - A^3 \cdot v^3 = 0$$

Daraus folgt $(1 - A)^3 = 0$, d. h. A hat nur die einzige reelle Form 1. Gleichung I reducirt sich aber auf

$$\text{II)}\quad 8 \cdot v^6 + 27 \cdot v^7 - 12 \cdot v^4 \cdot R_1 + 6 \cdot v^2 \cdot R_1^2 - R_1^3 = 0$$

Die nun zu vergleichenden Exponenten sind

$$6,\ (\beta+4),\ (2\beta+2),\ 3\beta$$

und man bekommt folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} 6 &= 6 \\ \beta + 4 &= 6 + (\beta - 2) \\ 2\beta + 2 &= 6 + 2 \cdot (\beta - 2) \\ 3\beta &= 6 + 3 \cdot (\beta - 2) \end{aligned}$$

Der grösste Werth, welchen hier β annehmen kann, ist $\beta = 2$; und es gibt, wie man sieht, keinen anderen für β brauchbaren Werth. Man führe also $(B \cdot v^2 + R_2)$ an die Stelle des R_1 in Gleichung II überall ein, und man bekommt

$$8 \cdot v^6 - 12B \cdot v^6 + 6B^2 \cdot v^6 - B^3 \cdot v^6 = 0$$

Daraus folgt $(2 - B)^3 = 0$, d. h. B hat die einzige reelle Form 2. Gleichung II reducirt sich nun auf

$$27 \cdot v^7 - R_2^3 = 0$$

Daraus folgt $R_2 = 3 \cdot (\sqrt[3]{1}) \cdot v^{\frac{7}{3}}$

Die gesuchte Reihe ist also

$$u = v + 2 \cdot v^2 + 3 \cdot (\sqrt[3]{1}) \cdot v^{\frac{7}{3}}$$

Durch diese Reihe sind die drei verschiedenen Formen des u zugleich repräsentirt. Die Vielförmigkeit beginnt aber erst beim dritten Gliede. Man kann die Reihe, wenn man will, in drei verschiedene eindeutige Reihenformen zerlegen.

§. 37. Man soll aus folgender unentwickelten Gleichung

$$\text{I)} \quad c \cdot v^8 + b \cdot v^4 \cdot u^2 + a \cdot v^2 \cdot u^3 + u^4 = 0$$

alle nach Potenzen des v aufsteigenden Reihen entwickeln.

Bei Vergleichung der Exponenten bekommt man folgende Gleichungen:

$$8 = 8$$
$$2\alpha + 4 = 8 + 2 \cdot (\alpha - 2)$$
$$3\alpha + 2 = 8 + 3 \cdot (\alpha - 2)$$
$$4\alpha = 8 + 4 \cdot (\alpha - 2)$$

Es ist also $\alpha = 2$, und einen andern für α brauchbaren Werth gibt es nicht. Man setze also $(A \cdot v^2 + R_1)$ an die Stelle des u überall ein, und man bekommt

$$\text{II)} \quad c + b \cdot A^2 + a \cdot A^3 + A^4 = 0$$

Aus dieser Gleichung geben sich vier Formen für A, und die gesuchte Reihe ist

$$\text{III)} \quad u = A \cdot v^2 + R_1$$

wo schon das erste Glied vierförmig ist. Gleichung I reducirt sich nun auf

$$\text{IV)} \quad [(2b + 3aA + 4A^2) \cdot A \cdot v^6 + (b + 3aA + 6A^2) \cdot v^4 \cdot R_1$$
$$+ (a + 4A) \cdot v^2 \cdot R_1^2 + R_1^3] \cdot R_1 = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt:

entweder $\qquad \text{V)} \quad R_1 = 0$

oder $\quad \text{VI)} \quad (2b + 3aA + 4A^2) \cdot A \cdot v^6 + (b + 3aA + 6A^2) \cdot v^4 \cdot R_1$
$$+ (a + 4A) \cdot v^2 \cdot R_1^2 + R_1^3 = 0$$

Erstens. Nimmt man $R_1 = 0$, so reducirt sich Gleichung III auf

$$\text{VII)} \quad u = A \cdot v^2$$

wodurch schon vier Formen des u repräsentirt sind.

Zweitens. Lässt man aber Gleichung VI gelten, so setze man $(B \cdot v^{\beta} + R_2)$ an die Stelle des R_1 in VI überall ein: und es ergeben sich bei Vergleichung der Exponenten folgende Gleichungen:

$$6 = 6$$
$$\beta + 4 = 6 + (\beta - 2)$$
$$2\beta + 2 = 6 + 2 \cdot (\beta - 2)$$
$$3\beta = 6 + 3 \cdot (\beta - 2)$$

Es ist also $\beta = 2$, und einen anderen für β brauchbaren Werth gibt es nicht. Da aber schon $\alpha = 2$ ist, so erkennt man, dass die Reihe kein zweites, kein drittes, etc. Glied haben kann, d. h. dass die Reihe nur aus einem einzigen Gliede besteht.

Die Reihe VII ist also die gesuchte Reihe. Wollte man aber dessenungeachtet aus Gleichung VI das R_1 entwickeln, und den sich ergebenden Ausdruck in III substituiren; so würde man eine Gleichung von folgender Form bekommen:

$$\text{VIII)} \quad u = (A + W) \cdot v^2$$

Wenn man aber aus $(A + W)$ alle einzelnen Formen besonders ausscheidet, so ergeben sich genau dieselben vier eindeutigen Formen, welche schon durch A allein repräsentirt sind.

Man vergleiche in dieser Beziehung §. 30, wo man für u die beiden gleichbedeutenden Formen

$$u = 3 \cdot \left(\sqrt[3]{1}\right) \cdot v^{\frac{2}{3}} + 2v$$

und

$$u = \left[3 \cdot \left(\sqrt[3]{1}\right) + \frac{3}{2} \cdot \left(-3 \pm \sqrt{-3}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{1}\right)\right] \cdot v^{\frac{2}{3}} + 2v$$

bekommen hat.

Hinsichtlich der Behandlung vielförmiger Ausdrücke vergleiche man noch §. 41.

§. 38. Man soll aus der Gleichung

$$\text{I)}\quad ax^m = y + 2 \cdot y^2 + 3 \cdot y^3 + \ldots + n \cdot y^n$$

wo der rechte Theil eine nach augenfälligem Gesetze fortschreitende Reihe, und der Exponent m eine ganze positive Zahl ist, alle nach Potenzen des x aufsteigenden Reihen entwickeln.

Man bringe alle Theilsätze in gehöriger Ordnung auf die linke Seite des Gleichheitszeichens, so gibt sich

$$\text{II)}\quad a \cdot x^m - y - 2 \cdot y^2 - 3 \cdot y^3 - \ldots - n \cdot y^n = 0$$

Man setze zuerst $(A_1 \cdot x^\alpha + R_1)$ an die Stelle des y ein, und es geben sich folgende Exponentengleichungen:

$$m = m$$
$$\alpha = m + (\alpha - m)$$
$$2\alpha = m + 2 \cdot \left(\alpha - \frac{m}{2}\right)$$
$$3\alpha = m + 3 \cdot \left(\alpha - \frac{m}{3}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n\alpha = m + n \cdot \left(\alpha - \frac{m}{n}\right)$$

Aber eben weil m und n positive Zahlen sind, so ist $\alpha = m$ der grösste Werth, welchen α bekommen kann. Man hat nun noch den zweiten dieser Exponenten mit allen folgenden zu vergleichen, und bekommt folgende Gleichungen:

$$\alpha = \alpha$$
$$2\alpha = \alpha + (\alpha - 0)$$
$$3\alpha = \alpha + 2 \cdot (\alpha - 0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n\alpha = \alpha + (n - 1) \cdot (\alpha - 0)$$

Da nun bei $\alpha = 0$ der erste und letzte der hier verglichenen Exponenten einander gleich werden; so erkennt man, dass es keinen weiteren für α brauchbaren Werth mehr gibt.

Erstens. Es sei $\alpha = m$. Man gelangt bald zu der Ueberzeugung, dass die mit $\alpha = m$ anfangende Reihe folgende ist:

$$\text{III)}\quad y = A_1 \cdot x^m + A_2 \cdot x^{2m} + A_3 \cdot x^{3m} + A_4 \cdot x^{4m} + \ldots$$

Die Coefficientengleichungen beobachten folgendes Discerptionsgesetz:

1) $a - A_1 = 0$

2) $-A_2 - 2 \cdot (A_1A_1) = 0$

3) $-A_3 - 2 \cdot (2A_1A_2) - 3 \cdot (A_1A_1A_1) = 0$

4) $-A_4 - 2 \cdot (2A_1A_3 + A_2A_2) - 3 \cdot (3A_1A_1A_2) - 4 \cdot (A_1A_1A_1A_1) = 0$

5) $-A_5 - 2 \cdot (2A_1A_4 + 2A_2A_3) - 3 \cdot (3A_1A_1A_3 + 3A_1A_2A_2) - 4 \cdot (4A_1A_1A_1A_2)$
$\quad - 5 \cdot (A_1A_1A_1A_1A_1) = 0$

und so fort.

Aus diesen Gleichungen erkennt man: es gibt nur eine einzige Form für A_1, es gibt nur eine einzige Form für A_2, und ebenso für A_3, A_4, A_5, etc., so dass durch die Reihe III auch nur eine einzige Form des y repräsentirt ist.

Zweitens. Es sei $\alpha = 0$. Man setze $(A + R_1)$ in Gleichung II überall ein, so bekommt man

$$\text{IV)}\quad a\cdot x^m - A\cdot(1+2A+3A^2+4A^3+5A^4+\ldots\ldots n\cdot A^{n-1})$$
$$-\left(1\cdot\frac{1^{1|-1}}{1}+2\cdot\frac{2^{1|-1}}{1}\cdot A+3\cdot\frac{3^{1|-1}}{1}\cdot A^2+\ldots\ldots+n\cdot\frac{n^{1|-1}}{1}\cdot A^{n-1}\right)\cdot R_1$$
$$-\left(2\cdot\frac{2^{2|-1}}{1.2}+3\cdot\frac{3^{2|-1}}{1.2}\cdot A+4\cdot\frac{4^{2|-1}}{1.2}\cdot A^2+\ldots\ldots+n\cdot\frac{n^{2|-1}}{1.2}\cdot A^{n-2}\right)\cdot R_1^2$$
$$-\left(3\cdot\frac{3^{3|-1}}{1.2.3}+4\cdot\frac{4^{3|-1}}{1.2.3}\cdot A+5\cdot\frac{5^{3|-1}}{1.2.3}\cdot A^2+\ldots\ldots+n\cdot\frac{n^{3|-1}}{1.2.3}\cdot A^{n-3}\right)\cdot R_1^3$$

. .

$$-n\cdot\frac{n^{n|-1}}{1.2.3\ldots n}\cdot R_1^n=0$$

Hier ist bekanntlich

$$1^{1|-1}=1,\ 2^{1|-1}=2,\ \ldots..,\ n^{1|-1}=n,$$
$$2^{2|-1}=2\cdot 1,\ 3^{2|-1}=3\cdot 2,\ \ldots..,\ n^{2|-1}=n\cdot(n-1),$$
$$3^{3|-1}=3\cdot 2\cdot 1,\ 4^{3|-1}=4\cdot 3\cdot 2,\ \ldots..,\ n^{3|-1}=n\cdot(n-1)\cdot(n-2),$$

und so fort.

Das Gesetz der zu den verschiedenen Potenzen des R_1 gehörigen Coefficienten ist augenscheinlich. Zur Abkürzung schreibe man bezüglich B_1, B_2, B_3, ..., B_n; so geht Gleichung IV über in

$$\text{V)}\quad a\cdot x^m - A\cdot(1+2A+3A^2+4A^3+\ldots\ldots+n\cdot A^{n-1}) - B_1\,.\,R_1$$
$$-B_2\,.\,R_1^2 - B_3\cdot R_1^3 - \ldots\ldots - B_n\cdot R_1^n = 0$$

Zunächst folgt daraus die Gleichung

$$\text{VI)}\quad A\cdot(1+2A+3A^2+4A^3+\ldots\ldots+n\cdot A^{n-1})=0$$

und da A nicht Null sein kann, eben weil die Reihe ein erstes Glied haben muss; so kann nur

$$\text{VII)}\quad 1+2A+3A^2+4A^3+\ldots\ldots+n\cdot A^{n-1}=0$$

gesetzt werden, und daraus geben sich $(n-1)$ verschiedene Formen für A. Gleichung V reducirt sich jetzt auf

$$\text{VIII)}\quad a\cdot x^m - B_1\,.\,R_1 - B_2\,.\,R_1^2 - B_3\cdot R_1^3 - \ldots\ldots - B_n\cdot R_1^n = 0$$

Man setze $(C_1\,.\,x^\gamma + R_2)$ an die Stelle des R_1 überall ein, so bekommt man folgende Exponentengleichungen:

$$m = m$$
$$\gamma = m + (\gamma - m)$$
$$2\gamma = m + 2\cdot\left(\gamma - \frac{m}{2}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n\gamma = m + n\cdot\left(\gamma - \frac{m}{n}\right)$$

Weil m eine positive Zahl ist, so ist $\gamma = m$ der grösste für γ brauchbare Werth; und man hat nun den zweiten der zuletzt verglichenen Exponenten mit allen folgenden zu vergleichen, d. h. man bekommt die Gleichungen

$$\gamma = \gamma$$
$$2\gamma = \gamma + (\gamma - 0)$$
$$3\gamma = \gamma + 2\cdot(\gamma - 0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n\gamma = \gamma + (n-1)\cdot(\gamma - 0)$$

Da aber schon $\alpha = 0$ gesetzt ist, so darf $\gamma = 0$ nicht beachtet werden; und es gibt, ausser m, keinen für γ brauchbaren Werth mehr. Man gelangt aber bald zu der Ueberzeugung, dass die mit $\alpha = 0$ anfangende Reihe folgende ist

$$\text{IX)}\quad y = A + C_1 . x^m + C_2 . x^{2m} + C_3 . x^{3m} \ldots\ldots$$

und indem man die Reihe

$$C_1 . x^m + C_2 . x^{2m} + C_3 . x^{3m} + \ldots\ldots$$

an die Stelle des R_1 in Gleichung VIII einsetzt, bekommt man Coefficientengleichungen, welche folgendes Discerptionsgesetz beobachten:

1) $a - B_1 . C_1 = 0$

2) $- B_1 . C_2 - B_2 . (C_1 . C_1) = 0$

3) $- B_1 . C_3 - B_2 . (2C_1 . C_2) - B_3 . (C_1 . C_1 . C_1) = 0$

4) $- B_1 . C_4 - B_2 . (2C_1 . C_3 + C_2 . C_2) - B_3 . (3C_1 . C_1 . C_2)$
$- B_4 . (C_1 . C_1 . C_1 C_1) = 0$

5) $- B_1 . C_5 - B_2 . (2C_1 . C_4 + 2C_2 . C_3) - B_3 . (3C_1 . C_1 . C_3 + 3 \cdot C_1 . C_2 . C_2)$
$- B_4 . (4C_1 . C_1 . C_1 . C_2) - B_5 . (C_1 C_1 C_1 C_1 C_1) = 0$

und so fort.

Das A hat (n—1) verschiedene Formen, welche aus VII bestimmt werden. Zu jeder einzelnen Form des A gehört nur eine einzige Form für B_1, nur eine einzige Form für B_2, nur eine einzige Form für B_3, und so fort.

Da nun in den Coefficientengleichungen der jedesmal zu bestimmende Coefficient nur in der ersten Potenz vorkommt; so erkennt man, dass zu jeder einzelnen Form des A auch nur eine einzige Form für C_1, nur eine einzige für C_2, nur eine einzige für C_3, etc. gehört. Die Reihe IX repräsentirt also nicht mehr und nicht weniger als (n — 1) verschiedene Formen des y; und somit sind durch die Reihen III und IX alle Formen des y mittelst steigender Reihen vollständig repräsentirt.

§. 39. Man soll aus der Gleichung

$$\text{I)}\quad a \cdot x^m = y + 2 \cdot y^2 + 3 \cdot y^3 + 4 \cdot y^4 + \ldots\ldots + n \cdot y^n$$

wo der rechte Theil eine nach augenfälligem Gesetze fortschreitende Reihe, und der Exponent m eine ganze positive Zahl ist, alle nach fallenden Potenzen des x fortschreitenden Reihen entwickeln.

Man setze $x = \frac{1}{\omega}$, so geht Gleichung I über in

$$\text{II)}\quad a - \omega^m \cdot y - 2 \cdot \omega^m \cdot y^2 - 3 \cdot \omega^m \cdot y^3 - \ldots\ldots - n \cdot \omega^m \cdot y^n = 0$$

Weil $a = a \cdot \omega^0$, so bekommt man hier folgende Exponentengleichungen:

$$0 = 0$$
$$m + \alpha = 0 + (\alpha - (-m))$$
$$m + 2\alpha = 0 + 2 \cdot \left(\alpha - \frac{-m}{2}\right)$$
$$m + 3\alpha = 0 + 3 \cdot \left(\alpha - \frac{-m}{3}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$m + n\alpha = 0 + n \cdot \left(\alpha - \frac{-m}{n}\right)$$

Aber eben weil m und n positive Zahlen sind, so ist $\frac{-m}{n}$ der grösste für α brauchbare Werth; und da dabei der erste und letzte der hier verglichenen Exponenten einander gleich werden, so gibt es keinen andern für α brauchbaren Werth mehr. Man setze zunächst $(A_1 . \omega^{\frac{-m}{n}} + R_1)$ an die Stelle des y in Gleichung II ein, so bekommt man folgende Gleichung:

$$\text{III)}\quad a - n \cdot A_1^n = 0$$

Daraus ergeben sich n verschiedene Formen für den ersten Coefficienten der herzustellenden Reihe.

Man kann also aus der gegebenen Gleichung nur eine einzige nach fallenden Potenzen des x fortschreitende Reihe entwickeln.

§. 40. **Man soll aus der Gleichung**

$$\text{I)}\quad ax^m + x^{m-1} \cdot y + x^{m-2} \cdot y^3 + x^{m-3} \cdot y^6 + x^{m-4} \cdot y^{10} + \ldots\ldots$$

$$+ x^{m-n+1} \cdot y^{\frac{(n-1) \cdot n}{1 \cdot 2}} + x^{m-n} \cdot y^{\frac{n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2}} = 0$$

wo m eine ganze (positive oder negative) Zahl, dagegen n eine positive ganze Zahl ist, alle nach Potenzen des x aufsteigenden Reihen entwickeln.

Man setze $(A_1 \cdot x^\alpha + R_1)$ an die Stelle des y überall ein, so bekommt man folgende Systeme von Exponentengleichungen:

Erstens.

$$m = m$$
$$m - 1 + \alpha = m + (\alpha - 1)$$
$$m - 2 + 3\alpha = m + 3 \cdot \left(\alpha - \frac{2}{3}\right)$$
$$m - 3 + 6\alpha = m + 6 \cdot \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$$
$$m - 4 + 10\alpha = m + 10 \cdot \left(\alpha - \frac{2}{5}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Der grösste Werth, welchen hier α bekommen kann, ist $\alpha = 1$; und die dabei sich ergebende Reihe repräsentirt eine Form des y.

Zweitens.

$$m - 1 + \alpha = m - 1 + \alpha$$
$$m - 2 + 3\alpha = m - 1 + \alpha + 2 \cdot \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$$
$$m - 3 + 6\alpha = m - 1 + \alpha + 5 \cdot \left(\alpha - \frac{2}{5}\right)$$
$$m - 4 + 10\alpha = m - 1 + \alpha + 9 \cdot \left(\alpha - \frac{1}{3}\right)$$

Der grösste Werth, welchen hier α bekommen kann, ist $\alpha = \frac{1}{2}$; und die dabei sich ergebende Reihe repräsentirt zwei Formen des y.

Drittens.

$$m - 2 + 3\alpha = m - 2 + 3\alpha$$
$$m - 3 + 6\alpha = m - 2 + 3\alpha + 3 \cdot \left(\alpha - \frac{1}{3}\right)$$
$$m - 4 + 10\alpha = m - 2 + 3\alpha + 7 \cdot \left(\alpha - \frac{2}{7}\right)$$

Der grösste Werth, welchen hier α bekommen kann, ist $\alpha = \frac{1}{3}$; und die dabei sich ergebende Reihe repräsentirt drei Formen des y.

Fährt man fort, so bekommt man
zuletzt

$$m - n + 1 + \frac{(n-1)\cdot n}{1\cdot 2}\cdot\alpha = m - n + 1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\alpha$$

$$m - n + \frac{n\cdot(n+1)}{1\cdot 2}\cdot\alpha = m - n + 1 + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\alpha + n\cdot\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)$$

Daraus folgt, dass $\alpha = \frac{1}{n}$ ein brauchbarer Werth des α ist; und die dabei sich ergebende Reihe repräsentirt n verschiedene Formen des y.

Man hat also hier n verschiedene Reihen, und dadurch sind die $\frac{n\cdot(n+1)}{1\cdot 2}$ verschiedenen Formen des y vollständig repräsentirt.

Ist n eine unendlichgrosse Zahl, so lassen sich auch unendlichviele verschiedene Reihen entwickeln, deren jede eine Form mehr repräsentirt, als die unmittelbar vorhergehende.

§. 41. Man soll aus der Gleichung

$$\text{I)}\quad a\cdot x^m + x^{m-1}\cdot y + x^{m-2}\cdot y^3 + x^{m-3}\cdot y^6 + x^{m-4}\cdot y^{10} + \ldots\ldots$$
$$+ x^{m-n+1}\cdot y^{\frac{(n-1)\cdot n}{1\cdot 2}} + x^{m-n}\cdot y^{\frac{n\cdot(n+1)}{1\cdot 2}} = 0$$

wo m eine ganze (positive oder negative) Zahl, dagegen n nur eine positive ganze Zahl ist, alle nach fallenden Potenzen des x fortschreitenden Reihen entwickeln.

Man setze $\frac{1}{\omega}$ statt x in I ein, so bekommt man

$$\text{II)}\quad a + \omega\cdot y + \omega^2\cdot y^3 + \omega^3\cdot y^6 + \omega^4\cdot y^{10} + \ldots\ldots + \omega^{n-1}\cdot y^{\frac{(n-1)\cdot n}{1\cdot 2}}$$
$$+ \omega^n\cdot y^{\frac{n\cdot(n+1)}{1\cdot 2}} = 0$$

Da nun $a = a\cdot\omega^0$, so bekommt man folgende Exponentengleichungen:

$$0 = 0$$
$$1 + \alpha = 0 + (\alpha - (-1))$$
$$2 + 3\alpha = 0 + 3\cdot\left(\alpha - \frac{-2}{3}\right)$$
$$3 + 6\alpha = 0 + 6\cdot\left(\alpha - \frac{-2}{4}\right)$$
$$4 + 10\alpha = 0 + 10\cdot\left(\alpha - \frac{-2}{5}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\cdot\alpha = 0 + \frac{n\cdot(n+1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\alpha - \frac{-2}{n+1}\right)$$

Aber eben, weil n eine positive Zahl ist, so ist $\frac{-2}{n+1}$ der grösste für α zu setzende Werth; und weiter gibt es keinen für α brauchbaren Werth mehr.

Diese fallende Reihe repräsentirt alle $\frac{n\cdot(n+1)}{1\cdot 2}$ Formen des u zugleich.

Die erste Coefficientengleichung ist aber

$$\text{III)}\quad a + A^{\frac{n\cdot(n+1)}{1\cdot 2}} = 0$$

und daraus geben sich $\frac{n\cdot(n+1)}{1\cdot 2}$ verschiedene Formen für A. Man hat nun das erste Glied der Reihe gefunden, und kann entweder setzen

$$\text{IV)}\quad u = A \cdot \omega^{\frac{-2}{n+1}} + R_1$$

oder wenn man $\frac{1}{x}$ statt ω wieder zurückführt

$$\text{V)}\quad u = A \cdot x^{\frac{2}{n+1}} + R_1$$

Nun hat A schon $\frac{n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2}$ verschiedene Formen, und $x^{\frac{2}{n+1}}$ hat entweder $(n+1)$ oder $\frac{n+1}{2}$ verschiedene Formen, je nachdem $(n+1)$ eine ungrade oder grade Zahl ist; und somit hat es den Anschein, als hätte das erste Glied $A \cdot x^{\frac{2}{n+1}}$ entweder $\frac{n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2} \cdot (n+1)$ oder $\frac{n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n+1}{2}$ verschiedene Formen. Es ist also noch nachzuweisen, dass dieses erste Glied nicht mehr und nicht weniger als $\frac{n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2}$ verschiedene Formen hat. Vorerst unterscheide man, ob a positiv oder negativ ist. Ist a negativ, so dass man statt Gleichung III auch setzen kann

$$\text{VI)}\quad A^{\frac{n \,.\, (n+1)}{1 \,.\, 2}} - b^{\frac{n \,.\, (n+1)}{1 \,.\, 2}} = 0$$

so sind alle Formen des A dargestellt durch

$$\text{VII)}\quad A = b \cdot \left(\cos \frac{2k}{\frac{n \,.\, (n+1)}{1 \,.\, 2}} \cdot \pi \pm \left(\sqrt{-1}\right) \cdot \sin \frac{2k}{\frac{n \,.\, (n+1)}{1 \,.\, 2}} \cdot \pi\right)$$

Ist aber a positiv, so dass man statt Gleichung III auch setzen kann

$$\text{VIII)}\quad A^{\frac{n \,.\, (n+1)}{1 \,.\, 2}} + c^{\frac{n \,.\, (n+1)}{1 \,.\, 2}} = 0$$

so sind alle Formen des A dargestellt durch

$$\text{IX)}\quad A = c \cdot \left(\cos \frac{2k+1}{\frac{n \,.\, (n+1)}{1 \,.\, 2}} \cdot \pi \pm \left(\sqrt{-1}\right) \cdot \sin \frac{2k+1}{\frac{n \,.\, (n+1)}{1 \,.\, 2}} \cdot \pi\right)$$

Nun kann man dem x jeden beliebigen positiven oder negativen Werth beilegen. Legt man dem x einen positiven Werth bei, und denkt man sich unter $x^{\frac{2}{n+1}}$ die positive reelle Form; so sind alle Formen der allgemeinen Potenz $x^{\frac{2}{n+1}}$ auf einmal dargestellt durch

$$\text{X)}\quad x^{\frac{2}{n+1}} = x^{\frac{2}{n+1}} \cdot \left(\cos \frac{2h}{\frac{n+1}{2}} \cdot \pi \pm \left(\sqrt{-1}\right) \cdot \sin \frac{2h}{\frac{n+1}{2}} \cdot \pi\right)$$

Legt man aber dem x einen negativen Werth bei, und denkt man sich wieder unter $(+x)^{\frac{2}{n+1}}$ die positive reelle Form; so sind alle Formen der allgemeinen Potenz $(-x)^{\frac{2}{n+1}}$ auf einmal dargestellt durch

$$\text{XI)}\quad (-x)^{\frac{2}{n+1}} = (+x)^{\frac{2}{n+1}} \cdot \left(\cos \frac{2h+1}{\frac{n+1}{2}} \cdot \pi \pm \left(\sqrt{-1}\right) \cdot \sin \frac{2h+1}{\frac{n+1}{2}} \cdot \pi\right)$$

Man mache also folgende zwei Unterscheidungen:

Erstens. Man legt dem absolut unabhängigen Elemente x einen positiven Werth bei, und das (in Gleichung III befindliche) constante Element a habe einen negativen Werth. Hier hat man die Gleichungen VII und X zu benützen, und Gleichung V geht dabei über in

$$\text{XII)}\quad u = b \cdot x^{\frac{2}{n+1}} \cdot \left(\cos \frac{2h}{\frac{n+1}{2}} \cdot \pi \pm (\sqrt{-1}) \cdot \sin \frac{2h}{\frac{n+1}{2}} \cdot \pi\right) \cdot \left(\cos \frac{2k}{\frac{n.(n+1)}{1.2}} \cdot \pi \pm (\sqrt{-1}) \cdot \sin \frac{2k}{\frac{n.(n+1)}{1.2}} \cdot \pi\right) + R_1$$

Dieser Ausdruck lässt sich aber noch vereinfachen, und geht über in

$$\text{XIII)}\quad u = b \cdot x^{\frac{2}{n+1}} . \left(\cos \frac{2 \cdot (nh+k)}{\frac{n.(n+1)}{1.2}} \cdot \pi \pm (\sqrt{-1}) \cdot \sin \frac{2 \cdot (nh+k)}{\frac{n.(n+1)}{1.2}} \cdot \pi\right) + R_1$$

Hier setze man nach und nach $(nh+k) = 0$, $(nh+k) = 1$, $(nh+k) = 2$, ..., und zuletzt entweder $nh+k = \frac{n \cdot (n+1)}{4}$, oder $nh + k = \frac{\frac{n(n+1)}{1.2} - 1}{2}$, je nachdem $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ eine grade oder ungrade Zahl ist. Wenn man aber dem absolut unabhängigen Elemente x wieder einen positiven Werth beilegt, während das (in Gleichung III befindliche) constante Element a auch einen positiven Werth hat; so hat man Gleichung IX und X zu benützen, und Gleichung V geht über in

$$\text{XIV)}\quad u = c \cdot x^{\frac{2}{n+1}} . \left(\cos \frac{2 \cdot (nh+k) + 1}{\frac{n(n+1)}{1.2}} \cdot \pi \pm (\sqrt{-1}) \cdot \sin \frac{2 \cdot (nh+k) + 1}{\frac{n(n+1)}{1.2}} \cdot \pi\right) + R_1$$

Hier setze man nach und nach $nh + k = 0$, $nh + k = 1$, $nh + k = 2$, ... und zuletzt $nh + k = \frac{\frac{n(n+1)}{1.2} - 1}{2}$, oder $nh + k = \frac{\frac{n(n+1)}{1.2} - 2}{2}$, je nachdem $\frac{n(n+1)}{2}$ eine ungrade oder grade Zahl ist.

Zweitens. Man lege dem absolut unabhängigen Elemente x einen negativen Werth bei, und das (in Gleichung III befindliche) constante Element a habe auch einen negativen Werth. Hier hat man Gleichung XI und VII zu benützen, und es ist

$$\text{XV)}\quad u = b \cdot (+x)^{\frac{2}{n+1}} . \left(\cos \frac{2 \cdot (nh+k) + n}{\frac{n.(n+1)}{1.2}} \cdot \pi \pm (\sqrt{-1}) \cdot \sin \frac{2(nh+k) + n}{\frac{n.(n+1)}{1.2}} \cdot \pi\right) + R_1$$

Wenn man aber dem absolut unabhängigen Elemente x wieder einen negativen Werth beilegt, während das (in Gleichung III befindliche) constante Element a einen positiven Werth hat; so hat man Gleichung XI und IX zu benützen, und es ist

$$\text{XVI)}\quad u = c \cdot (+x)^{\frac{2}{n+1}} . \left(\cos \frac{2(nh+k) + n + 1}{\frac{n(n+1)}{1.2}} \cdot \pi \pm (\sqrt{-1}) . \sin \frac{2(nh+k) + n + 1}{\frac{n(n+1)}{1.2}} \cdot \pi\right) + R_1$$

Auch in den Gleichungen XV und XVI setze man nach und nach $nh + k = 0$, $nh + k = 1$, $nh + k = 2$, ..., bis man alle $\frac{n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2}$ verschiedene Formen hergestellt hat.

Es sollen, des gleichförmigen Verfahrens wegen, dem Ausdrucke $(n \cdot h + k)$ keine negativen Werthe beigelegt werden. Um daher alle $\frac{n \cdot (n+1)}{1.2}$ verschiedenen Formen der Reihen XV und XVI vollständig herzustellen, muss man für $(nh + k)$ öfters auch noch

solche positiven ganzen Zahlen setzen, bei denen der Zähler grösser wird, als der Nenner. Dabei kann sich dann ereignen, dass sich, ehe alle Formen vollständig hergestellt sind, manche Form ergiebt, welche schon einmal da war, und dass sich die noch fehlenden Formen erst bei späteren Werthen des Ausdruckes $(nh + k)$ ergeben, z. B. wenn $n = 3$ ist, so hat die Reihe XVI sechs verschiedene Formen, welche in nachstehender Ordnung aufeinander folgen:

α) Setzt man $(nh + k) = 0$, so ergeben sich zwei Formen für das erste Glied der Reihe XVI.

β) Setzt man $(nh + k) = 1$, so ergiebt sich die dritte Form für das erste Glied der Reihe XVI.

γ) Setzt man $(nh + k) = 2$, so ergeben sich genau wieder die zwei ersten Formen, aber in umgekehrter Ordnung.

δ) Setzt man $(nh + k) = 3$, so ergeben sich zwei weitere Formen für das erste Glied der Reihe XVI.

ε) Setzt man $(nh + k) = 4$, so ergiebt sich erst die sechste Form für das erste Glied der Reihe XVI.

Hiermit ist nachgewiesen, dass das bereits hergestellte erste Glied unter allen Umständen nicht mehr und nicht weniger als $\frac{n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2}$ verschiedene Formen repräsentirt.

Es ist nun der Weg gezeigt, wie man bei den folgenden Gliedern der hier zu entwickelnden Reihe zu verfahren hat.

§. 42. Wie schon (am Schlusse des §. 25) bemerkt worden ist, ebenso hat man an den bis jetzt entwickelten Reihen gesehen, dass, wenn von irgend einem Gliede ab in allen folgenden Gliedern die Exponenten des Fortschreitungselementes in arithmetischer Progression aufeinander folgen, die zugehörigen Coefficientengleichungen in Gruppen zerfallen, deren jede ein gewisses Discerptionsgesetz beobachtet.

Ebenso weiss man (aus §. 25), dass das $(p+1)$te Glied einer steigenden Reihe aus einer Gleichung von der Form $f(R_p, v) = 0$ entnommen wird, wo R_p die den schon hergestellten p ersten Gliedern noch zuzufügende Ergänzung bedeutet. Hat man sich nun zu der Ueberzeugung hingebracht, dass in der zu suchenden steigenden Reihe beim $(p+1)$ten und allen folgenden Gliedern die Exponenten des Fortschreitungselementes nur ganze Zahlen sein können, während der erste dieser Exponenten die ganze (positive oder negative) Zahl m ist; so setze man gradezu

$$A_1 . v^m + A_2 . v^{m+1} + A_3 . v^{m+2} + A_4 . v^{m+3} + \ldots . + R_z$$

wo R_z die hinter das z-te Glied noch hinzuzufügende Ergänzung ist, an die Stelle des R_p in $f(R_p, v) = 0$ überall ein, und man bekommt dann jedenfalls Coefficientengleichungen mit Gruppen, welche ein Discerptionsgesetz beobachten. Kann dann irgend ein Glied der angenommenen Reihe nicht existiren, so zeigt es sich dadurch an, dass dessen Coefficient Null wird. In diesen aufeinander folgenden Coefficientengleichungen wird sich aber die Anzahl der Gruppen immer vermehren, bis sie eben so gross ist, als die Anzahl der in $f(R_p, v) = 0$ mit dem Elemente R_p behafteten Theilsätze. Wenn daher in $f(R_p, v) = 0$ unendlichviele Theilsätze das Element R_p enthalten, so wird die Vermehrung der Anzahl dieser Gruppen kein Ende nehmen. Wenn nun das besagte $(p+1)$te Glied schon das erste Glied ist, so gilt von der ursprünglichen Gleichung $\varphi(u,v) = 0$ Alles, was bis jetzt von der Gleichung $f(R_p, v) = 0$ mitgetheilt worden ist.

Hat man sich aber zu der Ueberzeugung gebracht, dass in der zu suchenden steigenden Reihe beim $(p+1)$ten und allen folgenden Gliedern die Exponenten des Fortschreitungselementes nur solche Brüche sein können, denen allen der gemeinschaftliche Nenner n gegeben werden kann, und nimmt dabei der erste Exponent die Form $\frac{m}{n}$ an, wo m eine ganze (positive oder negative), und n auch eine ganze (aber nur positive) Zahl ist; so setze man gradezu

$$A_1 . v^{\frac{m}{n}} + A_2 . v^{\frac{m+1}{n}} + A_3 . v^{\frac{m+2}{n}} + A_4 . v^{\frac{m+3}{n}} + \ldots + R_z$$

wo R_z die nach dem z-ten Gliede noch hinzuzufügende Ergänzung bedeutet, an die Stelle

des Elementes R_p in $f(R_p, v) = 0$ überall ein, und man bekommt wieder Coefficientengleichungen mit Gruppen, welche ein Discerptionsgesetz beobachten. Kann dann irgend ein Glied der angenommenen Reihe nicht existiren, so wird sich Null für dessen Coefficient ergeben.

Allein wenn sich viele Nullcoefficienten ergeben, so hat man auch viele unnöthigen Coefficientengleichungen gebildet; und dabei kann es öfters der Fall sein, dass man sich in bedeutende Weitläufigkeiten eingelassen hat. Da aber die Kenntniss des Bildungsgesetzes das Wichtigste und Nothwendigste bei jeder Reihenbildung ist, so darf man diese Weitläufigkeiten nicht scheuen, sobald es sich darum handelt, das Bildungsgesetz festzustellen.

Oft kann das Bildungsgesetz augenfälliger gemacht werden, wenn man eine Reihe in zwei oder mehrere zerlegt, wobei man, wenn das Bildungsgesetz ein recurrentes ist, auch zwei oder mehrere Systeme von Coefficientengleichungen aufstellen muss.

Hinsichtlich der fallenden Reihen ist nichts Weiteres mehr zuzufügen, da die fallenden Reihen ebenso entwickelt werden, wie die steigenden, wenn man nur zuvor die gehörige (in §. 26 vorgeschriebene) Verwandlung ausgeführt hat.

§. 43. Wenn die Gleichung $\varphi(u,v) = 0$ die veränderlichen Elemente auch in gebrochenen Potenzen enthält; so ist es am bequemsten, diese gebrochenen Potenzen vorerst durch geeignete Substitution zu entfernen, und dann lässt sich alles Bisherige auf die neu hergestellte Form gradezu anwenden. Man unterscheide nun zwei Fälle:

1) Die gegebene Gleichung $\varphi(u,v) = 0$ sei so beschaffen, dass das Element u nur in g a n z e n, dagegen das Element v auch in g e b r o c h e n e n Potenzen vorkomme, und dass diese gebrochenen Potenzen alle sich entfernen, wenn man z an die Stelle von $v^{\overset{m}{=}{n}}$ in $\varphi(u,v) = 0$ überall einsetzt. Dabei geht $\varphi(u,v) = 0$ über in $f(u,z) = 0$, und aus dieser Gleichung lässt sich folgende Reihe

$$\text{I)} \quad u = A \cdot z^\alpha + B \cdot z^\beta + C \cdot z^\gamma + \ldots\ldots$$

entwickeln. Nun führe man wieder $v^{\frac{m}{n}}$ an die Stelle des z in die Reihe I zurück, so bekommt man

$$\text{II)} \quad u = A \cdot \left(v^{\frac{m}{n}}\right)^\alpha + B \cdot \left(v^{\frac{m}{n}}\right)^\beta + C \cdot \left(v^{\frac{m}{n}}\right)^\gamma + \ldots\ldots$$

Repräsentirt die Potenz $v^{\frac{m}{n}}$ in der ursprünglichen Gleichung $\varphi(u,v) = 0$ nur ihre einfachste Form, so ist es auch in der Reihe II der Fall; repräsentirt aber die Potenz $v^{\frac{m}{n}}$ in der ursprünglichen Gleichung $\varphi(u,v) = 0$ mehrere oder alle ihre Formen, so ist es auch in der Reihe II der Fall.

2) Die gegebene Gleichung $\varphi(u,v) = 0$ sei so beschaffen, dass sowohl das Element u als auch das Element v in gebrochenen Potenzen vorkommen, und dass diese gebrochenen Potenzen sich sämmtlich entfernen, wenn man w an die Stelle von $u^{\frac{r}{s}}$ und z an die Stelle von $v^{\frac{m}{n}}$ setzt. Dabei geht $\varphi(u,v) = 0$ über in $F(w,z) = 0$; und aus dieser Gleichung lässt sich folgende Reihe

$$\text{III)} \quad w = A \cdot z^\alpha + B \cdot z^\beta + C \cdot z^\gamma + \ldots\ldots$$

entwickeln. Diese Gleichung geht aber, wenn man für z und w die ursprünglichen Ausdrücke zurückführt, über in

$$\text{IV)} \quad u^{\frac{r}{s}} = A \cdot \left(v^{\frac{m}{n}}\right)^\alpha + B \cdot \left(v^{\frac{m}{n}}\right)^\beta + C \cdot \left(v^{\frac{m}{n}}\right)^\gamma + \ldots\ldots$$

und daraus folgt gradezu

$$\text{V)}\quad u = \left[A\cdot\left(\overset{m}{\underset{v^{n}}{=}}\right)^{\alpha} + B\cdot\left(\overset{m}{\underset{v^{n}}{=}}\right)^{\beta} + C\cdot\left(\overset{m}{\underset{v^{n}}{=}}\right)^{\gamma} + \ldots\ldots\right]^{\overset{s}{\underset{r}{=}}}$$

Mehrere solcher Reihenentwickelungen finden sich in Aufgabe 53. Dass die Vielförmigkeit der Ausdrücke (besonders bei diesen Reihenentwickelungen) genaue Berücksichtigung und oft die grösste Vorsicht erheischt, bedarf hier keiner Erinnerung mehr.

§. 44. Wenn eine Function in eine unaufhörliche Reihe übergeht, und man diese Reihe zur näherungsweisen Bestimmung des Werthes der vorgelegten Function benützen will; so hängt die Gründlichkeit des Verfahrens davon ab, dass man jeder Reihe, wo man sie auch abbrechen mag, ihre Ergänzung beifügt. Bei der hier angewendeten Methode, ungesonderte Functionen in Reihen zu entwickeln, bietet sich aber zugleich mit der Bestimmung irgend eines Gliedes auch jedesmal eine Gleichung dar, aus welcher man die hinter dieses Glied gehörige Ergänzung bestimmen kann (hinsichtlich dieser Ergänzung lese man die Schlussbemerkung zu den §§. 32 und 33).

Allein die Entwickelung ungesonderter Functionen in Reihen geschieht nicht desshalb, um für bestimmte Werthe der unabhängigen Elemente den jedesmaligen Werth des abhängigen Elementes zu bekommen, sondern vielmehr, um die Form des Abhängigen für unendlichgrosse und unendlichkleine Werthe der Unabhängigen darzustellen.

Die steigenden Reihen werden entwickelt, um zu erkennen, wie die Formen des Abhängigen bei unendlichkleinen Werthen der Unabhängigen beschaffen sind, d. h. ob diese Formen reell oder imaginär sind, und ob die Werthe der reellen Formen auch unendlichklein, oder endlich, oder unendlichgross sind.

Die fallenden Reihen werden entwickelt, um zu erkennen, wie die Formen des Abhängigen bei unendlichgrossen Werthen der Unabhängigen beschaffen sind, d. h. ob diese Formen reell oder imaginär sind, und ob die Werthe der reellen Formen auch unendlichgross, oder endlich, oder unendlichklein sind.

In diesen beiden Fällen hat man weiter nichts zu thun, als sich zu überzeugen, ob bei den grade obwaltenden Umständen alle Glieder reell sind, oder ob reelle und imaginäre Glieder beisammen vorkommen. Sind alle Glieder reell, so ist der Werth aller Glieder und der Ergänzung vom Werthe des ersten Gliedes um nichts Angebbares verschieden; kommen aber reelle und imaginäre Glieder beisammen vor, so hat man zu beachten, dass das Reelle und Imaginäre (§. 21) nicht gegeneinander in den Moment des Verschwindens gesetzt werden können, dass also die Reihe keine reelle Bedeutung hat, sobald eines der folgenden, wenn auch noch so späten, Glieder imaginär wird. Sind aber wirklich alle unendlichvielen Glieder einer Reihe reell, so hat man sich (in den meisten Fällen wenigstens) bald davon überzeugt, und man ist in den beiden Fällen, wo die Unabhängigen unendlichklein oder unendlichgross genommen werden, den Weitläufigkeiten der Reihenentwickelungen nicht sehr unterworfen.

§. 45. Es ist bekannt, dass bei einer rationalen Gleichung höheren Grades die Anzahl der Wurzeln niemals grösser sein kann, als die Anzahl der Einheiten des höchsten Exponenten; die Anzahl der Wurzeln kann aber kleiner sein, wenn eine oder mehrere Wurzeln mehr als einmal vorkommen.

Ebenso kann die Anzahl der Ausdrücke, welche eine ungesonderte rationale Function identisch machen, zusammen niemals grösser wohl aber kleiner sein, als der höchste Exponent des abhängigen Elementes Einheiten enthält.

Wenn man also alle aus einer ungesonderten rationalen Function sich ergebenden steigenden Reihen in lauter eindeutige Reihenformen zerlegt; so kann die Anzahl dieser eindeutigen steigenden Reihenformen niemals grösser, wohl aber kleiner sein, als der höchste Exponent des abhängigen Elementes Einheiten enthält.

Wenn man ferner alle aus einer ungesonderten rationalen Function sich ergebenden fallenden Reihen in lauter eindeutige Reihenformen zerlegt, so kann auch die An-

zahl dieser eindeutigen fallenden Reihenformen niemals grösser, wohl aber kleiner sein, als der höchste Exponent des abhängigen Elementes Einheiten enthält.

Wenn man alle aus einer ungesonderten rationalen Function sich ergebenden fallenden und steigenden Reihen herstellt, und die Anzahl der steigenden und der fallenden Reihen ungleich ist; so muss doch, wenn man beiderlei Reihen in eindeutige Reihenformen zerlegt, die Anzahl der eindeutigen steigenden Reihenformen ebensogross, und kann nicht grösser und nicht kleiner sein, als die Anzahl der eindeutigen fallenden Reihenformen.

Um aufzufinden, wie die eindeutigen steigenden Reihenformen, welche aus einer ungesonderten rationalen Function sich ergeben, vertheilt sind, kehre man wieder zu Gleichung III des §. 23 und zu §. 24 zurück, und mache auch hier die Unterscheidung, ob die Exponenten zweier oder mehrerer Theilsätze einander gleich und zugleich kleiner als alle übrigen werden.

Erstens. Es können nur zwei Exponenten einander gleich und kleiner als alle übrigen werden.

1) Man hat hier zuerst $p = k' + ka$ gesetzt, woraus $a = \frac{p - k'}{k}$ folgt. Gibt es nur eine einzige Reihe, deren erstes Glied diesen Exponenten hat, so kann diese Reihe höchstens k eindeutige Reihenformen enthalten; gibt es aber mehrere Reihen, deren erstes Glied diesen Exponenten hat, so können alle diese Reihen zusammen höchstens k eindeutige Reihenformen enthalten.

2) Man hat hierauf $k' + ka = g' + ga$ gesetzt, woraus $a = \frac{k' - g'}{g - k}$ folgt. Gibt es nur eine einzige Reihe, deren erstes Glied diesen Exponenten hat, so kann diese Reihe höchstens $(g - k)$ eindeutige Reihenformen enthalten; gibt es aber mehrere Reihen, deren erstes Glied diesen Exponenten hat, so können alle diese Reihen zusammen höchstens $(g - k)$ eindeutige Reihenformen enthalten.

3) Man hat hierauf $g' + ga = f' + fa$ gesetzt, woraus $a = \frac{g' - f'}{f - g}$ folgt, und dabei gelangt man höchstens zu $(f - g)$ eindeutigen Reihenformen.

Und so fort. Sollte nun (in Gleichung II des §. 23) der Theilsatz $E \cdot u^e \cdot v^{e'}$ der letzte sein; so sind die durch die hergestellten steigenden Reihen erlangten eindeutigen Reihenformen auf folgende Weise vertheilt:

1) Zuerst hat man höchstens k eindeutige steigende Reihenformen,
2) Hierauf hat man höchstens $(g - k)$ eindeutige steigende Reihenformen,
3) Hierauf hat man höchstens $(f - g)$ eindeutige steigende Reihenformen,
4) Zuletzt hat man höchstens $(e - f)$ eindeutige steigende Reihenformen.

Also hat man zusammen höchstens e eindeutige steigende Reihenformen.

Wie man geeigneten Falles weiter zu gehen hätte, ist nun von selbst klar.

Zweitens. Es können (in Gleichung III des §. 23) drei Exponenten einander gleich und zugleich kleiner als alle übrigen werden.

1) Man hat (in §. 24) zuerst $p = m' + ma = h' + ha$ gesetzt, woraus $a = \frac{p - m'}{m} = \frac{p - h'}{h}$ folgt. Gibt es nur eine Reihe, deren erstes Glied diesen Exponenten hat, so kann diese Reihe höchstens h eindeutige Reihenformen enthalten; gibt es aber mehrere Reihen, deren erstes Glied diesen Exponenten hat, so können alle diese Reihen zusammen höchstens h eindeutige Reihenformen enthalten.

2) Wird nun $h' + ha = f' + fa = e' + ea$ gesetzt, so ist $a = \frac{h' - f'}{f - h} = \frac{h' - e'}{e - h}$. Gibt es nur eine Reihe, deren erstes Glied diesen Exponenten hat, so kann diese Reihe höchstens $(e - h)$ eindeutige Reihenformen enthalten; gibt es aber mehrere Reihen, deren erstes Glied diesen Exponenten hat, so können alle diese Reihen zusammen höchstens $(e - h)$ eindeutige Reihenformen enthalten.

Und so fort. Sollte nun (in Gleichung II des §. 23) der Theilsatz $E \cdot u^e \cdot v^{e'}$ der

letzte sein, so sind die durch die hergestellten steigenden Reihen erlangten eindeutigen Reihenformen auf folgende Weise vertheilt:

Zuerst hat man höchstens h eindeutige steigende Reihenformen.

Hierauf hat man höchstens (e — h) eindeutige steigende Reihenformen.

Also hat man zusammen höchstens e eindeutige steigende Reihenformen.

Wie man geeigneten Falles weiter zu gehen hätte, oder wie man zu verfahren hätte, wenn mehr als drei Exponenten einander gleich und zugleich kleiner als alle übrigen werden würden, das ist nun von selbst klar.

Um aufzufinden, wie die eindeutigen fallenden Reihenformen, welche aus einer ungesonderten rationalen Function sich ergeben, vertheilt sind, hat man zuerst die gehörige (in §. 26 vorgeschriebene) Verwandlung auszuführen, und dann kann man wie bei den steigenden Reihen verfahren.

Ist die vorgegebene ungesonderte Function irrational, so mache man sie zuerst rational, und verfahre wie bisher. (Man vergleiche noch §. 43).

Dieser § ist allerdings so gehalten, dass er seinen Inhalt nur als Thatsache vorträgt, und der Beweis noch rückständig ist. Allein dieser Beweis, sowie noch sehr viele andere auf das hier vorgenommene Problem sich beziehende Untersuchungen mögen zu einer desshalb zu liefernden Monographie aufgespart werden; und es ist genug, hier die Mittel angegeben zu haben, wie man alle steigenden und alle fallenden Reihen aus einer ungesonderten Function entwickeln kann. Aller Aufenthalt bei dergleichen Untersuchungen würde die Erreichung des von dem hier vorgelegten Werke zu erstrebenden Zweckes nur weiter und weiter hinausschieben. Man bemerke nur noch, dass man von jetzt an durch das ganze Werk

1) die fallenden Reihen gar nicht berücksichtigt, und

2) von den steigenden Reihen nur diejenigen allein aufsucht, wodurch die Aenderung gegeben ist, welche irgend ein für das abhängige Element brauchbarer Ausdruck erleidet, wenn man den unabhängigen Elementen willkürliche Aenderungen beilegt.

Dieses mag Gegenstand des nächsten § sein.

§. 46. I) Es sei $\varphi(u, v) = o$ eine ungesonderte Function, wo u der Abhängige und v der Unabhängige ist. Es sei ferner $\psi(v)$ ein Ausdruck, welcher an die Stelle des u gesetzt die vorgegebene Function identisch macht. Wenn man nun v in $(v + Dv)$ übergehen lässt, so muss die zu $u = \psi(v)$ gehörige Aenderung, welche durch Du bezeichnet sein mag, dergestalt von Dv abhängig sein, dass

1) auch die Gleichung $\varphi(\psi(v) + Du,\ v + Dv) = o$ identisch wird, und dass

2) das $Du = o$ wird, sobald man $Dv = o$ setzt.

Wenn man daher Du in eine Reihe entwickelt, und

$$u + Du = \psi(v) + B \cdot Dv^{\beta} + C \cdot Dv^{\gamma} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

bekommt, so bringt die Bedingung, dass bei $Dv = o$ auch $Du = o$ werden müsse, mit sich, dass die Exponenten $\beta, \gamma \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$ alle positiv sein müssen. Desshalb muss die Reihe, wenn sie eine unaufhörliche ist, eine steigende sein, da, wenn sie eine fallende wäre, einmal eine Stelle vorkommt, von wo ab alle folgenden Exponenten negativ sind. Das Praktische des Verfahrens ist nun: Man betrachte $\psi(v) + Du$ als ein einziges Element, bezeichnet durch $\mathfrak{U}$, und setze $\varphi(\mathfrak{U},\ v + Dv) = o$. Hierauf untersuche man, ob es nur eine mit $\psi(v)$ anfangende oder ob es mehrere mit $\psi(v)$ anfangende Reihen gibt, welche dann von der Eorm

$$\mathfrak{U} = \psi(v) + B \cdot Dv^{\beta} + C \cdot Dv^{\gamma} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

sind. Alle andern Reihen braucht man, wie gesagt, nicht zu berücksichtigen. (Ma sehe die Aufgaben 18—23.)

Andere Schriftseller setzen $(\psi(v) + Du)$ an die Stelle des u, und $(v + Dv)$ an die Stelle des v in $\varphi(u, v) = 0$ überall ein und reduciren soviel als möglich, wodurch sich dann eine Gleichung ergiebt, wo kein Theilsatz von Du und Dv zugleich frei ist. Hierauf stellen sie für Du alle nach Potenzen des Dv aufsteigenden Reihen her, etc. etc. Das Ergebniss dieses Verfahrens ist dann, dass diese Leute nicht bemerken, dass unter den hergestellten Reihen sich manche befindet, welche nicht die zu $\psi(v)$ gehörige Aenderung

ausdrückt. Sie betrachten dann eine Reihe nach der andern, und gerathen durch die vielen dabei sich ergebenden Widersprüche öfters in ein grosses Gedränge, welchem zu entkommen sie die possierlichsten Anstalten treffen.

II.) Es sei $\varphi(u, v, w) = 0$ eine ungesonderte Funktion, wo u der Abhängige und v und w die Unabhängigen sind. Es sei ferner $\psi(v, w)$ ein Ausdruck, welcher, an die Stelle des u gesetzt, die vorgegebene Function identisch macht. Wenn man nun v und w bezüglich in $(v + Dv)$ und $(w + Dw)$ übergehen lässt, so muss die zu $u = \psi(v, w)$ gehörige Aenderung, welche durch Du bezeichnet sein mag, dergestalt von Dv und Dw abhängig sein, dass

1) auch die Gleichung $\varphi[\psi(v, w) + Du, v + Dv, w + Dw] = 0$ identisch wird, und dass
2) das $Du = 0$ wird, sobald man gleichzeitig $Dv = 0$ und $Dw = 0$ setzt.

Das Praktische des Verfahrens ist aber auch hier, dass man $\psi(v, w) + Du$ als ein einziges Element ansieht, und durch $\mathfrak{U}$ bezeichnet; sodann ist es jedenfalls bequem, $\varkappa \cdot \mathfrak{D}v$ und $\varkappa \cdot \mathfrak{D}w$ bezüglich statt Dv und Dw zu setzen, und aus der Gleichung

$$\varphi(\mathfrak{U}, v + \varkappa \cdot \mathfrak{D}v, w + \varkappa \cdot \mathfrak{D}w) = 0$$

die mit $\psi(v, w)$ anfangenden und nach Potenzen von $\varkappa$ aufsteigenden Reihen

$$\mathfrak{U} = \psi\,(v, w) + B \cdot \varkappa^{\beta} + C \cdot \varkappa^{\gamma} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

zu entwickeln. Hier bekommt man wieder $u = \psi(v, w)$, wenn man das einzige Element $\varkappa = 0$ setzt; und wenn die zu $\psi(v, w)$ gehörige Aenderung unendlich klein sein soll, so setze man $\varkappa$ bald als positiv, bald als negativ in den Moment des Verschwindens, während $\mathfrak{D}v$ und $\mathfrak{D}w$ jeden beliebigen endlichen positiven oder negativen Werth bekommen können (Man sehe die Aufgaben 21, 23, 34.

III) Es seien $\varphi(u, v, w) = 0$ und $f(v, w) = 0$ zwei ungesonderte Functionen, wo w der absolute Unabhängige, v der relative Unabhängige, und u der Abhängige ist. Es seien ferner $\psi(w)$ und $F(w)$ zwei Ausdrücke, welche bezüglich an die Stelle des u und des v gesetzt die vorgegebenen Gleichungen identisch machen. Wenn nun w in $(w + Dw)$ übergeht, so müssen die zu $\psi(w)$ und zu $F(w)$ gehörigen Aenderungen, welche bezüglich durch Du und Dv bezeichnet sein mögen, dergestalt von Dw abhängig sein, dass

1) auch die Gleichungen $\varphi(\psi(w) + Du, F(w) + Dv, w + Dw) = 0$ und $f(F(w) + Dv, w + Dw) = 0$ gleichzeitig identisch werden, und dass
2) sowohl $Du = 0$ als auch $Dv = 0$ wird, sobald man $Dw = 0$ setzt.

Dafür hat man zwei Methoden:

A) Man eliminire v aus $\varphi(u, v, w) = 0$, so dass man $\varphi(u, F(w), w) = 0$ bekommt. Wenn dann w in $(w + Dw)$ übergeht, so setze man $\varphi[\mathfrak{U}, F(w + Dw), w + Dw] = 0$, und untersuche, ob man aus dieser Gleichung eine einzige mit $\psi(w)$ anfangende und nach Potenzen des Dw aufsteigende Reihe oder ob man mehrere solcher Reihen entwickeln kann.

B) Will man aber diese Elimination aus irgend einem Grunde vermeiden, so setze man zuerst $\mathfrak{V}$ statt $(F(w) + Dv)$ an die Stelle des v in Gleichung $f(v, w) = 0$ ein, und entwickle aus der Gleichung $f(\mathfrak{V}, w + Dw) = 0$ alle mit $F(w)$ anfangenden und nach Potenzen des Dw aufsteigenden Reihen, welche folgende Form haben:

$$\mathfrak{V} = F(w) + B \cdot Dw^{\beta} + C \cdot Dw^{\gamma} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Diese Reihe setze man an die Stelle des v in Gleichung $\varphi(u, v, w) = 0$ überall ein, und entwickle aus der Gleichung

$$\varphi(\mathfrak{U}, F(w) + B \cdot Dw^{\beta} + C \cdot Dw^{\gamma} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot, w + Dw) = 0$$

alle mit $\psi(w)$ anfangenden und nach Potenzen des Dw aufsteigenden Reihen. (Man sehe die Aufgaben 53 und 54).

Es hat jetzt keinen Anstand, diese Untersuchung auf zusammengesetztere Fälle auszudehnen. Desshalb soll nur noch folgende Bemerkung zugefügt werden:

„In Fällen, wo mehrere absolute Unabhängige w, x, y · · · · · · z vorkommen, ist es bequem, die willkürlichen Aenderungen Dw, Dx, Dy · · · · · ·, Dz, in die Pro-

ducte $\varkappa \cdot \mathfrak{D}w$, $\varkappa \cdot \mathfrak{D}x$, $\varkappa \cdot \mathfrak{D}y$, $\cdots\cdots\cdots$ $\varkappa \cdot \mathfrak{D}z$ umzuwandeln, und die gehörigen Reihenentwicklungen nun nach Potenzen des $\varkappa$ vorzunehmen.«

V. Theorie des sogenannten Variationscalculs.

Einleitung.

§. 47. Jeder aus veränderlichen und beständigen Bestandtheilen zusammengesetzte Ausdruck wird eine Function genannt.

Ein beständiger (constanter) Bestandtheil ist ein solcher, welcher an Gestalt und an Gehalt sich immer gleich bleibt. Ein veränderlicher Bestandtheil ist ein solcher, bei welchem dieses nicht stattfindet.

Eine Function kann zweierlei Aenderungen erleiden. Sie kann entweder blossen Werthänderungen unterworfen werden, und dabei ihr eigentliches Wesen ungestört erhalten; oder sie kann in ganz andere Functionen übergehen. Mehr als diese zweierlei Aenderungen kann es, wie von selbst einleuchtet, nicht geben. Derjenige Zweig der Analysis, welcher sich mit den auf diese beiderlei Aenderungen begründeten directen und inversen Operationen beschäftigt, wird höhere Analysis genannt.

Aenderungen der ersten Art.

A) Man habe

$$\text{I.}\quad U = F(x)$$

und lege dem x die willkürliche Werthänderung $(x + Dx)$ bei. Dadurch geht U in $(U + DU)$ über, so dass man hat

$$\text{II.}\quad U + DU = F(x + Dx)$$

Den Bestandtheil x, welchem man jede beliebige Werthänderung $(x + Dx)$ beilegen kann, nennt man den unabhängigen oder willkürlichen Variablen; und den Bestandtheil U, dessen Werthänderung von der jedesmaligen Werthänderung des x abhängig ist, nennt man den abhängigen Variablen.

B) Man habe

$$\text{III.}\quad U = F(x, w)$$

und lege dem x die willkürliche Werthänderung $(x + Dx)$ und dem w die willkürliche Werthänderung $(w + Dw)$ bei. Dadurch geht U über in $(U + DU)$, so dass man hat

$$\text{IV.}\quad U + DU = F(x + Dx, w + Dw)$$

Die beiden Bestandtheile x und w, denen man jede beliebige Werthänderung beilegen kann, nennt man auch hier die unabhängigen oder willkürlichen Variablen; und den Bestandtheil U, dessen Werthänderung von den jedesmaligen Werthänderungen des x und w abhängig ist, nennt man den abhängigen Variablen.

C) Man habe

$$\text{V.}\quad U = F(x, w, y \cdots\cdots z)$$

wo man jedem der Bestandtheile x, w, y $\cdots\cdots$ z jede beliebige Werthänderung beilegen kann. Alle Bestandtheile x, w, y $\cdots\cdots$ z nennt man die unabhängigen oder willkürlichen Variablen; dagegen den Bestandtheil U nennt man den abhängigen Variablen.

D) Man habe gleichzeitig die beiden Functionen

$$\text{VI.}\quad U = F(x, y)$$

und

$$\text{VII.}\quad y = \varphi(x)$$

Legt man dem x die willkürliche Werthänderung $(x + Dx)$ bei, so geht, eben wegen $y = \varphi(x)$, das y über in $(y + Dy)$, so dass man hat

$$\text{VIII.}\quad y + Dy = \varphi(x + Dx)$$

und U geht über in (U + DU), so dass man hat

$$\text{IX.}\quad U + DU = F(x + Dx, y + Dy)$$
$$= F(x + Dx, \varphi(x + Dx))$$

Den Bestandtheil U, dessen Werthänderung von den Werthänderungen des x und des y abhangt, nennt man den abhängigen Variablen; den Bestandtheil y, dessen Werthänderung von der Werthänderung des U unabhängig, aber von der Werthänderung des x abhängig ist, nennt man den relativ unabhängigen Variablen; dagegen den Bestandtheil x, dessen Werthänderung ganz beliebig ist, nennt man den absolut unabhängigen Variablen oder den Urvariablen.

E) Man habe gleichzeitig die drei Functionen

$$\text{X.}\quad U = F(x, w, y, z)$$
$$\text{XI.}\quad y = \varphi(x, w)$$
$$\text{XII.}\quad z = \psi(x, w)$$

Auch hier nennt man U den abhängigen Variablen; y und z nennt man die relativ unabhängigen Variablen, weil ihre Werthänderungen von der des U unabhängig sind; und x und w nennt man die absolut unabhängigen Variablen oder die Urvariablen.

Und so fort.

Auf diese Weise ist das Wort „variabel“ verbraucht in allen deutschen und ausländischen Schriften, deren Gegenstand der Differential- und Integral-Calcul ist.

Aenderungen der zweiten Art.

A) Man habe eine Function mit einem willkürlichen Variablen

$$\text{XIII.}\quad y = \varphi(x)$$

und lasse diese Function übergehen in

$$\text{XIV.}\quad y' = \psi(x)$$

so hat der Uebergang einer Function in eine andere stattgefunden, was z. B. der Fall ist, wenn $y = \cos x$ in $y' = \lg\,\text{nat}\, x$ übergeht.

B) Man habe eine Function mit zwei willkürlichen Variablen

$$\text{XV.}\quad y = \varphi(x, w)$$

und lasse diese Function übergehen in

$$\text{XVI.}\quad y' = \psi(x, w)$$

so hat wieder der Uebergang einer Function in eine andere stattgefunden, was z. B. der Fall ist, wenn $y = (x + w)^m$ in

$$y' = (x + w)^m + \cos x + \lg\,\text{nat}\, w + \sin(x + w)$$

übergeht.

C) Man habe gleichzeitig folgende zwei Functionen

$$\text{XVII.}\quad U = F(x, y)$$

und

$$\text{XVIII.}\quad y = \varphi(x)$$

so dass sich ergibt

$$\text{XIX.}\quad U = F(x, \varphi(x))$$

Geht $y = \varphi(x)$ über in $y' = \psi(x)$, so geht Gleichung XVII über in

$$\text{XX.}\quad U' = F(x, y')$$
$$= F(x, \psi(x))$$

Nun soll folgende Betrachtung angestellt werden:

α) In VI wird durch den Bestandtheil y immer eine und dieselbe Function $\varphi(x)$ repräsentirt, welche man keiner andern Aenderung als derjenigen unterwerfen kann, die sich durch die Werthänderung des x ergibt; das eigentliche Wesen von $\varphi(x)$ bleibt ungestört. Die Werthänderung des y ist von der des x abhängig.

β) In XVII wird durch den Bestandtheil y bald eine Function $\varphi(x)$, bald eine andere $\psi(x)$, etc. repräsentirt. Das hiesige y geht ganz selbstständig und unabhängig bald in diese bald in jene Function von x über.

γ) Wenn nun der in VI befindliche Bestandtheil y, der nur Werthänderungen erleiden kann, den Namen „variabler Bestandtheil" führt, so muss es Begriffsverwirrungen veranlassen, wenn man auch dem in XVII befindlichen Bestandtheile y, der bald in diese, bald in jene Function von x übergeht, den Namen „variabler Bestandtheil" beilegen würde.

δ) Auch kommt der Name „Variation" schon bei den sogenannten combinatorischen Variationen vor. Es würde also abermals eine Begriffsverwirrung veranlassen, wenn auch die Aenderungen, welche der Bestandtheil y bei seinen Uebergängen in verschiedenartige Functionen erleidet, den Namen Variationen erhalten würden.

ε) Um nun alle Begriffsverwirrung zu beseitigen, gebe man dem in Gleichung XVII befindlichen Bestandtheile y, welcher bald diese bald jene Function repräsentirt, einen andern Namen; und da in dem höchsten Zweige der Analysis diese Nameneinführung vorgenommen wird, so bleiben davon alle übrigen Zweige des Calculs unberührt.

Man könnte vorschlagen, den Namen „transformabler Bestandtheil" zu wählen. Allein das Wort Transformation (Umformung, etc.) ist schon verwendet für den Fall, wo man einem vorgelegten Ausdrucke eine andere Form in der Weise geben soll, dass die neue Form der ursprünglichen in allen Beziehungen vollkommen gleich ist. Soll man z. B. untersuchen, ob der Ausdruck

$$5 \cdot x^2 - 80 \cdot x \cdot y + 327 \cdot y^2$$

bei jedem reellen Werthe des x und bei jedem reellen Werthe des y positiv bleibt, so gebe man ihm folgende Form

$$5 \cdot (x - 8 \cdot y)^2 + 7 \cdot y^2$$

Diese zweite Form ist der ersten in allen Beziehungen vollkommen gleich; aber an der zweiten Form erkennt man leichter, als an der ersten, dass der hier vorgelegte Ausdruck positiv bleibt bei jedem reellen Werthe des x und bei jedem reellen Werthe des y. Andere Transformationen gibt es in den verschiedenen Zweigen des Calculs sehr viele.

Ganz passend ist es, das Wort „Mutation" zu wählen, um anzuzeigen, dass der Bestandtheil y in verschiedenartige Functionen übergehe.

Das Wort „Mutation" ist das bezeichnendste, welches man aus der lateinischen Sprache wählen kann, um anzuzeigen, dass eine Function in eine andere übergegangen sei; und von der Zweckmässigkéit dieser Wahl überzeugt man sish geradezu, wenn man sich z. B. erinnert, in welcher Bedeutung das Wort „mutare« von Ovidius in seinen Metamorphosen (siehe unter andern Stellen die zwei ersten Verse) gebraucht ist.

Man ist nunmehr bei nachstehender Definition angelangt:

Der hier vorgelegte Calcul (bis jetzt Variationscalcul genannt) ist derjenige Zweig der höheren Analysis, welcher, wenn man Functionen in andere Functionen übergehen lässt, die aus diesem Verfahren folgenden Ergebnisse untersucht und anwenden lehrt.

Unter die Aufgaben desselben gehört z. B. die Behandlung der Fälle, wo die Functionen, welche gewissen Bedingungen genügen sollen, das Gesuchte sind, wo also der Anfang der Untersuchung von ganz unbekannten Functionen ausgeht.

Die der eben besagten speciellen Aufgabe dieses Calculs analoge Aufgabe des Differenzencalculs ist die Behandlung der Fälle, wo die den in bestimmt gegebenen Functionen befindlichen Veränderlichen beizulegenden Werthe, welche gewissen Bedingungen genügen sollen, das Gesuchte sind, wo also der Anfang der Untersuchung von noch unbekannten Werthen der in bestimmt gegebenen Functionen befindlichen Veränderlichen ausgeht.

Wenn eine Function in eine andere übergeht, so sage man: „sie wird mutirt"; die Function selbst, welche mutirt wird, werde mutable Function, und der Unterschied zwischen der neuen und ursprünglichen Function werde Mutation genannt. Wenn eine mutable Function als ein einziges Element betrachtet wird, so nenne man sie einen mutablen Veränderlichen, um ihn von einem solchen Veränderlichen zu

unterscheiden, welcher nur Werthänderungen erleiden kann, und desshalb **nichtmutabler Veränderlicher** genannt werden mag.

Wenn eine Function geradezu für sich allein und unabhängig von andern Functionen mutirt wird; so nenne man eine solche Mutation eine **unmittelbare**. Wenn aber eine Function dadurch mutirt wird, dass eine andere, von welcher sie abhangt, mutirt wird, oder dass mehrere andere, von welchen sie abhangt, mutirt werden; so nenne man eine solche Mutation eine **mittelbare**. Wenn dabei die nichtmutablen Veränderlichen keine Werthänderung erleiden; so nenne man sowohl die unmittelbare als auch die mittelbare Mutation eine **reine**. Wenn aber die nichtmutablen Veränderlichen zugleich eine Werthänderung erleiden; so nenne man sowohl die unmittelbare als auch die mittelbare Mutation eine **gemischte**. Alle bis jetzt besprochenen Mutationen mögen den gemeinschaftlichen Namen „**einfache Mutationen**" führen.

Wenn eine Function sowohl unmittelbar als auch mittelbar zugleich mutirt wird; so nenne man eine solche Mutation eine **zusammengesetzte**. Auch sie ist eine reine, wenn dabei die nichtmutablen Veränderlichen keine Werthänderung erleiden; dagegen ist sie eine gemischte, wenn die nichtmutablen Veränderlichen zugleich eine Werthänderung erleiden.

Hiermit ist die Idee des vorgelegten Calculs vollkommen ausgesprochen. Bei der elementaren Klarheit dieser Idee sind wir uns jedesmal bewusst, wann wir unbedingte Freiheit in den Operationen haben, und dieselben nach einem zu erreichenden Zwecke einrichten können, und wann wir gezwungen sind, dieselben den jedesmal obwaltenden Umständen zu unterwerfen und zu überlassen. Man kommt nun zu folgender Anordnung:

- A. Einfache Mutationen.
 - a) Einfache reine Mutationen.
 - aa) Unmittelbare reine Mutationen.
 - bb) Mittelbare reine Mutationen.
 - b) Einfache gemischte Mutationen.
 - aa) Unmittelbare gemischte Mutationen.
 - bb) Mittelbare gemischte Mutationen.
- B. Zusammengesetzte Mutationen.
 - a) Zusammengesetzte reine Mutationen.
 - b) Zusammengesetzte gemischte Mutationen.

A. Einfache Mutationen.

a) *Einfache reine Mutationen.*

aa) Unmittelbare reine Mutationen.

§. 48. Eine Function wird (nach vorigem §) **einfach** mutirt, wenn sie entweder nur unmittelbar oder nur mittelbar mutirt wird; sie wird **unmittelbar** mutirt, wenn sie unabhängig und für sich allein in eine andere Function übergeht; sie wird **unmittelbar rein** mutirt, wenn dabei die nichtmutablen Veränderlichen keine Werthänderung erleiden.

Die erste sich darbietende Operation ist, wie von selbst einleuchtet, die, dass man der neuen Function ein bleibendes Merkmal beilegt, mittelst dessen es jederzeit möglich ist, aus ihr die ursprüngliche Function wieder herzustellen.

Die zweite Operation ist aber die, dass man die neue Function in zwei Theile zerlegt, deren erster die ursprüngliche Function, und deren zweiter die Mutation ist.

Ein zur Ausführung dieser beiden Operationen in allen Fällen ausreichendes Mittel ist, in die neue Function ein ferneres Element so einzuführen, dass, wenn man dieses Elementes Werth zu Null werden lässt, die neue Function sich auf die ursprüngliche zurückzieht. Ist aber dieses Element einmal in die neue Function eingeführt, so muss

es so behandelt werden, dass es von allen neben ihm in der neuen Function noch vorhandenen Elementen unabhängig ist, und dass wiederum alle neben ihm in der neuen Function noch vorhandenen Elemente auch von ihm unabhängig sind. Dieses Element bezeichne man mit $\varkappa$, und nenne es das mutirende Element.

Dass das Element $\varkappa$ oft auf sehr verschiedene Weise in die neue Function eingeführt werden kann, und doch jedesmal die genannten zwei Operationen ausführbar sind, bedarf keines nähern Nachweises. Welche Einschränkungen aber bei dieser Einführung wichtig sind, wird später (in §. 53) erörtert werden. Hat man nun das Element $\varkappa$ auf oben besagte Weise in die neue Function eingeführt, und dieselbe hierauf in ihre zwei Theile zerlegt, so darf das Element $\varkappa$ nur im zweiten Theile vorkommen, eben weil der erste die ursprüngliche Function sein soll. Will man nach ausgeführter Zerlegung die Mutation wieder von dem fremdartigen Elemente $\varkappa$ befreien, so muss man ihm die entsprechende specielle Bedeutung beilegen, welche sich jederzeit leicht ausmitteln lässt. Das Element $\varkappa$ ist also ein blosses Operationsmittel; und dass es nur diese Bedeutung hat, halte man durch diesen ganzen Calcul hindurch fest.

§. 49. Der eingeschränkteste Begriff einer unmittelbaren Mutation ist gegeben, wenn man in einer Function an die Stelle der constanten Elemente andere constante Elemente setzt; denn dabei unterscheiden sich die ursprüngliche und die neue Function nur nach ihrem Gehalte, der Gestalt nach sind sie nicht verschieden.

Wenn man die Function $\varphi(x, a)$ hat, welche nur den einzigen nichtmutablen Veränderlichen x enthält; und wenn man an die Stelle des Constanten a einen andern Constanten b setzt; so geht $\varphi(x, a)$ über in $\varphi(x, b)$.

Nun ist die erste Operation, dass man der neuen Function $\varphi(x, b)$ ein bleibendes Merkmal beilegt, mittelst dessen man aus ihr jederzeit die ursprüngliche Function $\varphi(x, a)$ wieder herstellen kann. Dieses wird erreicht, wenn man $(a + \varkappa)$ an die Stelle des b in $\varphi(x, b)$ einsetzt; denn $\varphi(x, a + \varkappa)$ zieht sich bei $\varkappa = 0$ jederzeit auf $\varphi(x, a)$ zurück. Was man aber dem $\varkappa$ für eine specielle Bedeutung beilegen muss, damit die neue Function $\varphi(x, a + \varkappa)$ von dem fremdartigen Elemente $\varkappa$ wieder befreit wird, ist ausgesprochen durch die Gleichung

$$\text{I)}\quad \varphi(x, a + \varkappa) = \varphi(x, b)$$

Daraus folgt geradezu $a + \varkappa = b$, und $\varkappa = b - a$.

Die zweite Operation ist, die neue Function in zwei Theile zu zerlegen, deren erster die ursprüngliche Function und deren zweiter die Mutation ist. Dieses lässt sich am bequemsten an der Form $\varphi(x, a + \varkappa)$ ausführen. Weil nemlich in $\varphi(x, a + \varkappa)$ das a genau dieselbe Bedeutung, wie in $\varphi(x, a)$, hat; so ergibt sich aus $\varphi(x, a + \varkappa)$ eine mit $\varphi(x, a)$ anfangende und nach lauter ganzen positiven Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe.

Diese Wahrheit ist bereits aus dem Differentialcalcul bekannt.

Man kann aber diese Reihe entweder mittelst des Taylor'schen oder mittelst des Maclaurin'schen Satzes entwickeln. Entwickelt man mittelst des Taylor'schen Satzes, so bekommt man

$$\text{II)}\quad \varphi(x, a + \varkappa) = \varphi(x, a) + \varkappa \cdot \frac{d_a \varphi(x, a)}{d a} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d_a^2 \varphi(x, a)}{d a^2}$$

$$+ \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d_a^3 \varphi(x, a)}{d a^3} + \cdots\cdots\cdots$$

Die zu den verschiedenen Potenzen des $\varkappa$ gehörigen Coefficienten enthalten kein $\varkappa$ mehr, sind also entweder Functionen von x, oder constant, oder auch Null. Die Reihe selbst kann eine geschlossene oder unaufhörliche sein.

Das unten an d angehängte a bedeutet bekanntlich (§. 1) die nach a genommene partielle Differentiation.

Entwickelt man aber mittelst des Maclaurin'schen Satzes, so bekommt man

$$\text{III)}\quad \varphi(x, a+\varkappa) = \varphi(x, a) + \left(\frac{d_\varkappa \varphi(x, a+\varkappa)}{d\varkappa}\right)_0 + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\left(\frac{d^2_\varkappa\varphi(x, a+\varkappa)}{d\varkappa^2}\right)_0$$

$$+ \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\left(\frac{d^3_\varkappa\varphi(x, a+\varkappa)}{d\varkappa^3}\right)_0 + \ldots\ldots\ldots$$

Die Coefficienten der Reihe III sind bezüglich denen der Reihe II ganz vollkommen gleich; auch sie enthalten kein $\varkappa$ mehr, sind also Functionen von x, oder constant, oder auch Null. Die Reihe selbst kann eine geschlossene oder unaufhörliche sein.

Das unten an d angehängte $\varkappa$ bedeutet (§. 1) die nach $\varkappa$ genommene partielle Differentiation. Die ausserhalb der Klammern unten angehängte Null zeigt an, dass man zuerst die innerhalb der Klammern vorgeschriebenen Operationen ausgeführt, und dann Null an die Stelle des $\varkappa$ gesetzt habe.

Will man aber die Mutation wieder von dem fremdartigen Elemente $\varkappa$ befreien, so setze man den bereits gefundenen Ausdruck (b — a) an die Stelle des $\varkappa$ in die Reihen II und III, und sie gehen bezüglich über in

$$\text{IV)}\quad \varphi(x, b) = \varphi(x, a) + (b-a)\cdot\frac{d_a\varphi(x, a)}{d a} + \frac{(b-a)^2}{1.2}\cdot\frac{d^2_a\varphi(x, a)}{d a^2}$$

$$+ \frac{(b-a)^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3_a\varphi(x, a)}{d a^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und

$$\text{V)}\quad \varphi(x, b) = \varphi(x, a) + (b-a)\cdot\left(\frac{d_\varkappa\varphi(x, a+\varkappa)}{d\varkappa}\right)_0 + \frac{(b-a)^2}{1.2}\cdot\left(\frac{d^2_\varkappa\varphi(x, a+\varkappa)}{d\varkappa^2}\right)_0$$

$$+ \frac{(b-a)^3}{1.2.3}\cdot\left(\frac{d^3_\varkappa\varphi(x, a+\varkappa)}{d\varkappa^3}\right)_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Statt der, wie bereits bemerkt, einander vollkommen gleichen Reihen II und III schreibe man zur Abkürzung

$$\text{VI)}\quad \varphi(x, a+\varkappa) = \varphi(x, a) + \varkappa\cdot P + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot Q + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot R + \ldots\ldots\ldots$$

und statt der ebenfalls einander vollkommen gleichen Reihen IV und V schreibe man zur Abkürzung

$$\text{VII)}\quad \varphi(x, b) = \varphi(x, a) + (b-a)\cdot P + \frac{(b-a)^2}{1.2}\cdot Q + \frac{(b-a)^3}{1.2.3}\cdot R + \ldots\ldots$$

Für den Unterschied der neuen und ursprünglichen Function, d. h. für die Mutation, ergeben sich also bezüglich folgende zwei Ausdrücke:

$$\text{VIII)}\quad \varphi(x, a+\varkappa) - \varphi(x, a) = \varkappa\cdot P + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot Q + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} R + \ldots\ldots$$

und

$$\text{IX)}\quad \varphi(x, b) - \varphi(x, a) = (b-a)\cdot P + \frac{(b-a)^2}{1.2}\cdot Q + \frac{(b-a)^3}{1.2.3}\cdot R + \ldots\ldots$$

Ganz vorzügliche Berücksichtigung verdient der besondere Fall, wo a und b so wenig von einander verschieden sind, dass die Differenz (b — a) im Momente des Verschwindens befindlich ist, d. h. entweder als positiv oder als negativ der Null nächstanliegt. Da aber $\varkappa = b - a$, so ist jetzt auch $\varkappa$ im Momente des Verschwindens befindlich; und da sowohl $\varkappa$ als auch

(b — a) von den Werthen des x ganz unabhängig sind, so erkennt man an den Gleichungen VIII und IX, dass auch die Differenzen $[\varphi(x, a + \varkappa) - \varphi(x, a)]$ und $[\varphi(x, b) - \varphi(x, a)]$ bei jedem Werthe des x im Momente des Verschwindens befindlich sind. Man kann sich also auf folgende Weise aussprechen: »Weil die specielle Bedeutung, welche man nach ausgeführter Reihenentwickelung dem Operationsmittel $\varkappa$ beilegen muss, ein von x unabhängiger und im Momente des Verschwindens befindlicher Werth ist; so liegt bei jedem Werthe des x der Werth der neuen Function $\varphi(x, b)$ dem Werthe der ursprünglichen Function $\varphi(x, a)$ nächst an.«

§. 50. Hat man eine Function $\varphi(x \ldots\ldots w, a)$, worin eine beliebige Anzahl nichtmutabler Veränderlicher x w vorkommen; und setzt man an die Stelle des Constanten a einen andern Constanten b; so geht $\varphi(x \ldots\ldots w, a)$ über in $\varphi(x \ldots\ldots w, b)$.

Nun ist die erste Operation, dass man der neuen Function $\varphi(x \ldots\ldots w, b)$ ein bleibendes Merkmal beilegt, mittelst dessen man aus ihr die ursprüngliche Function $\varphi(x \ldots\ldots w, a)$ jederzeit wieder herstellen kann. Dieses wird erreicht, wenn man $(a + \varkappa)$ an die Stelle des b in $\varphi(x \ldots\ldots w, b)$ einsetzt; denn $\varphi(x \ldots\ldots w, a + \varkappa)$ zieht sich bei $\varkappa = 0$ jederzeit zurück auf $\varphi(x \ldots\ldots w, a)$. Was man aber dem $\varkappa$ für eine specielle Bedeutung beilegen muss, damit die neue Function $\varphi(x \ldots\ldots w, a + \varkappa)$ von dem fremdartigen Elemente $\varkappa$ wieder befreit wird, ist ausgesprochen durch die Gleichung

$$\text{I)} \quad \varphi(x \ldots\ldots w, a + \varkappa) = \varphi(x \ldots\ldots w, b)$$

Daraus folgt geradezu $a + \varkappa = b$, und $\varkappa = b - a$

Die zweite Operation ist, die neue Function in zwei Theile zu zerlegen, deren erster die ursprüngliche Function und deren zweiter die Mutation ist. Dieses lässt sich am bequemsten an der Form $\varphi(x \ldots\ldots w, a + \varkappa)$ ausführen. Weil nemlich in $\varphi(x \ldots\ldots w, a + \varkappa)$ das a genau dieselbe Bedeutung, wie in $\varphi(x \ldots\ldots w, a)$ hat; so gibt sich aus $\varphi(x \ldots\ldots w, a + \varkappa)$ eine mit $\varphi(x \ldots\ldots w, a)$ anfangende und nach lauter ganzen positiven Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe.

Dieses ist eine aus dem Differentialcalcul bekannte Wahrheit.

Man bekommt also auch hier, wie im vorigen §., entweder mittelst des Taylor'schen oder mittelst des Maclaurin'schen Satzes folgende Reihe:

$$\text{II)} \quad \varphi(x \ldots\ldots w, a + \varkappa) = \varphi(x \ldots\ldots w, a) + \varkappa \cdot P + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot Q + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot R + \cdots\cdots$$

Wenn man (b — a) an die Stelle des $\varkappa$ setzt, so gibt sich

$$\text{III)} \quad \varphi(x \ldots\ldots w, b) = \varphi(x \ldots\ldots w, a) + (b - a) \cdot P + \frac{(b-a)^2}{1.2} \cdot Q + \frac{(b-a)^3}{1.2.3} \cdot R + \cdots\cdots$$

Die Coefficienten P, Q, R enthalten kein $\varkappa$ mehr, sind also im Allgemeinen Functionen aller der Veränderlichen x w; sie können jedoch auch Functionen nur einiger dieser Veränderlichen, oder constant, oder auch Null sein. Die Reihen selbst können geschlossene oder unaufhörliche sein.

Ganz vorzügliche Berücksichtigung verdient der besondere Fall, wo a und b so wenig voneinander verschieden sind, dass die Differenz (b — a) im Momente des Verschwindens befindlich ist, d. h. entweder als positiv oder als negativ der Null nächstanliegt. Da aber $\varkappa = b - a$, so ist auch $\varkappa$ im Momente des Verschwindens befindlich; und da sowohl (b — a) als auch $\varkappa$ von den Werthen der nichtmutablen Veränderlichen x w unabhängig sind; so erkennt man an den Gleichungen II und III, dass man sich auch hier auf folgende Weise aussprechen kann: »Weil die specielle Bedeutung, welche man nach ausgeführter Reihenentwickelung dem Operationsmittel $\varkappa$ beilegen muss, ein von jedem der Elemente x w unabhängiger und im Momente des Verschwindens befindlicher Werth ist; so liegt bei jedem Werthe der Elemente x w der Werth der neuen Function $\varphi(x \ldots\ldots w, b)$ dem Werthe der ursprünglichen Function $\varphi(x \ldots\ldots w, a)$ nächst an.«

§. 51. Wenn man die Function $\varphi(x, a, \alpha)$ hat, welche nur den einzigen nichtmutablen Veränderlichen x enthält; und wenn man an die Stelle der Constanten a und α bezüglich zwei andere Constanten b und β setzt; so geht $\varphi(x, a, \alpha)$ über in $\varphi(x, b, \beta)$.

Die erste Operation ist, der neuen Function ein bleibendes Merkmal beizulegen, mittelst dessen es möglich ist, jederzeit aus ihr die ursprüngliche Function wieder herzustellen. Dieses erreicht man am bequemsten, wenn man $(a + \varkappa)$ an die Stelle des b, und $(\alpha + n \cdot \varkappa)$ an die Stelle des β einsetzt; denn $\varphi(x, a + \varkappa, \alpha + n \cdot \varkappa)$ zieht sich bei $\varkappa = 0$ jederzeit zurück auf $\varphi(x, a, \alpha)$. Was man aber dem Elemente $\varkappa$ und dem Producte $n \cdot \varkappa$ für specielle Bedeutungen beilegen muss, damit die neue Function $\varphi(x, a + \varkappa, \alpha + n \cdot \varkappa)$ von diesen fremdartigen Elementen wieder befreit wird; ist ausgesprochen durch die Gleichung

$$\text{I)} \quad \varphi(x, a + \varkappa, \alpha + n \cdot \varkappa) = \varphi(x, b, \beta)$$

Daraus folgt geradezu $a + \varkappa = b$, und $\alpha + n \cdot \varkappa = \beta$, d. h. es ist $\varkappa = b - a$, und $n \cdot \varkappa = \beta - \alpha$; und daraus folgt $n = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$

Die zweite Operation ist, die neue Function in zwei Theile zu zerlegen, deren erster die ursprüngliche Function und deren zweiter die Mutation ist. Dieses lässt sich am bequemsten an der Form $\varphi(x, a + \varkappa, \alpha + n \cdot \varkappa)$ ausführen; denn weil in $\varphi(x, a + \varkappa, \alpha + n \cdot \varkappa)$ das a und α bezüglich genau dieselbe Bedeutung haben, wie in $\varphi(x, a, \alpha)$; so ergibt sich aus $\varphi(x, a + \varkappa, \alpha + n \cdot \varkappa)$ eine mit $\varphi(x, a, \alpha)$ anfangende und nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe.

Diese Wahrheit ist bereits aus dem Differentialcalcul bekannt.

Man kann aber diese Reihe entweder mittelst des Taylor'schen oder mittelst des Maclaurin'schen Satzes entwickeln. Entwickelt man mittelst des Taylor'schen Satzes, so bekommt man

$$\text{II)} \quad \varphi(x, a + \varkappa, \alpha + n \cdot \varkappa) = \varphi(x, a, \alpha) + \varkappa \cdot \left(\frac{d_a \varphi(x, a, \alpha)}{d\, a} + \frac{d_\alpha \varphi(x, a, \alpha)}{d\, \alpha} \cdot n\right)$$

$$+ \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d_a^2 \varphi(x, a, \alpha)}{d\, a^2} + 2 \cdot \frac{d_a d_\alpha \varphi(x, a, \alpha)}{da \cdot d\alpha} \cdot n + \frac{d_\alpha^2 \varphi(x, a, \alpha)}{d\alpha^2} \cdot n^2\right)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Entwickelt man aber mittelst des Maclaurin'schen Satzes, so bekommt man

$$\text{III)} \quad \varphi(x, a + \varkappa, \alpha + n \cdot \varkappa) = \varphi(x, a, \alpha) + \varkappa \cdot \left(\frac{d_\varkappa \varphi(x, a + \varkappa, \alpha + n \cdot \varkappa)}{d\, \varkappa}\right)_0$$

$$+ \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d_\varkappa^2 \varphi(x, a + \varkappa, \alpha + n \cdot \varkappa)}{d\, \varkappa^2}\right)_0 + \cdots\cdots\cdots$$

Die zu den verschiedenen Potenzen des $\varkappa$ gehörigen Coefficienten enthalten kein $\varkappa$ mehr, sind also nur Functionen von x, oder constant, oder auch Null. Uebrigens sind die Coefficienten in der Reihe III bezüglich denen in der Reihe II vollkommen gleich. Die Reihen selbst können geschlossene oder unaufhörliche sein. Zur Abkürzung setze man

$$\text{IV)} \quad \varphi(x, a + \varkappa, \alpha + n \cdot \varkappa) = \varphi(x, a, \alpha) + \varkappa \cdot (P + P'.\, n)$$

$$+ \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (Q + 2Q'.\, n + Q''.\, n^2)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Bedeutung von P, P', Q, Q', Q'', ... erkennt man, wenn man die Reihe IV mit II oder III vergleicht. Will man aber die Mutation von dem fremdartigen Elemente $\varkappa$ wieder befreien, so setze man $(b - a)$ statt $\varkappa$, und $(\beta - \alpha)$ statt $n \cdot \varkappa$ in die Reihe IV ein, und sie geht über in

$$\text{V)}\quad \varphi(x, b, \beta) = \varphi(x, a, \alpha) + ((b - a) \cdot P + (\beta - \alpha) \cdot P')$$
$$+ \frac{1}{1.2} \cdot ((b - a)^2 \cdot Q + 2(b - a)(\beta - \alpha) \cdot Q' + (\beta - \alpha)^2 \cdot Q'')$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Ganz vorzügliche Berücksichtigung verdient der besondere Fall, wo a so wenig von b, und wo zugleich α so wenig von β verschieden ist, dass die Differenzen $(b-a)$ und $(\beta-\alpha)$ im Momente des Verschwindens befindlich sind, d. h. entweder als positiv oder als negativ der Null nächstanliegen. Da aber $\varkappa = b - a$ und $n \cdot \varkappa = \beta - \alpha$ ist, so sind auch das Element $\varkappa$ und das Product $n \cdot \varkappa$ im Momente des Verschwindens; und da sowohl das Element $\varkappa$ als auch die beiden Differenzen $(b - a)$ und $(\beta - \alpha)$ von den Werthen des x ganz unabhängig sind; so erkennt man an den Gleichungen IV und V, dass man sich auch hier auf folgende Weise aussprechen kann: „Weil die specielle Bedeutung, welche man nach ausgeführter Reihenentwickelung dem Operationsmittel $\varkappa$ beilegen muss, ein von x unabhängiger und im Momente des Verschwindens befindlicher Werth ist; so liegt bei jedem Werthe des x der Werth der neuen Function $\varphi(x, b, \beta)$ dem Werthe der ursprünglichen Function $\varphi(x, a, \alpha)$ nächst an.“

§. 52. Wenn man die Function $\varphi(x \ldots\ldots w, a, \alpha)$ hat, welche eine beliebige Anzahl nichtmutabler Veränderlicher $x \ldots\ldots w$ enthält; und wenn man an die Stelle der Constanten a und α bezüglich zwei andere Constanten b und β setzt; so geht die Function $\varphi(x \ldots\ldots w, a, \alpha)$ über in $\varphi(x \ldots\ldots w, b, \beta)$.

Nun ist die erste Operation, dass man der neuen Function $\varphi(x \ldots\ldots w, b, \beta)$ ein bleibendes Merkmal beilegt, mittelst dessen man aus ihr die ursprüngliche Function $\varphi(x \ldots\ldots w, a, \alpha)$ jederzeit wieder herstellen kann. Dieses erreicht man auch hier am bequemsten, wenn man $(a + \varkappa)$ an die Stelle des b, und $(\alpha + n \cdot \varkappa)$ an die Stelle des β einsetzt; denn $\varphi(x \ldots\ldots w, a + \varkappa, \alpha + n \cdot \varkappa)$ zieht sich bei $\varkappa = 0$ jederzeit auf $\varphi(x \ldots\ldots w, a, \alpha)$ zurück. Was man aber dem Elemente $\varkappa$ und dem Producte $n \cdot \varkappa$ für specielle Bedeutungen beilegen muss, um die neue Function von diesen fremdartigen Elementen wieder zu befreien, ist ausgesprochen durch die Gleichung

$$\text{I)}\quad \varphi(x \ldots\ldots w, a + \varkappa, \alpha + n \cdot \varkappa) = \varphi(x \ldots\ldots w, b, \beta)$$

Daraus folgt $a + \varkappa = b$, und $\alpha + n \cdot \varkappa = \beta$, d. h. es ist $\varkappa = b - a$, und $n \cdot \varkappa = \beta - \alpha$; und daraus folgt $n = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$

Die zweite Operation ist, die neue Function in zwei Theile zu zerlegen, deren erster die ursprüngliche Function und deren zweiter die Mutation ist. Dieses lässt sich am leichtesten an der Form $\varphi(x \ldots\ldots w, a + \varkappa, \alpha + n \cdot \varkappa)$ ausführen; und man bekommt, wie im vorigen §., entweder mittelst des Taylor'schen oder mittelst des Maclaurin'schen Satzes folgende Reihe:

$$\text{II)}\quad \varphi(x \ldots\ldots w, a + \varkappa, \alpha + n \cdot \varkappa) = \varphi(x \ldots\ldots w, a, \alpha) + \varkappa \cdot (P + P'. n)$$
$$+ \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (Q + 2 \cdot Q'. n + Q''. n^2) + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Wenn man $(b - a)$ und $(\beta - \alpha)$ bezüglich an die Stelle des $\varkappa$ und des $n \cdot \varkappa$ setzt, so gibt sich

$$\text{III)}\quad \varphi(x \ldots\ldots w, b, \beta) = \varphi(x \ldots\ldots w, a, \alpha) + ((b - a) \cdot P + (\beta - \alpha) \cdot P')$$
$$+ \frac{1}{1.2} \cdot ((b - a)^2 \cdot Q + 2(b - a) \cdot (\beta - \alpha) \cdot Q' + (\beta - \alpha)^2 \cdot Q'')$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Die Coefficienten $P, P', Q, Q', Q'' \ldots\ldots$ enthalten kein $\varkappa$ mehr, sind also im Allgemeinen Functionen aller der Veränderlichen $x \ldots\ldots\ldots w$; sie können jedoch auch Functionen nur einiger dieser Veränderlichen, oder constant, oder auch Null sein. Die Reihen selbst können geschlossene oder unaufhörliche sein.

Ganz vorzügliche Berücksichtigung verdient der besondere Fall,

wo a so wenig von b, und wo zugleich α so wenig von β verschieden ist, dass die Differenzen (b — a) und (β — α) im Momente des Verschwindens befindlich sind, d. h. als positiv oder negativ der Null nächstanliegen. Da aber $\varkappa = b - a$ und $n \cdot \varkappa = \beta - \alpha$ ist, so sind auch das Element $\varkappa$ und das Product $n \cdot \varkappa$ im Momente des Verschwindens; und da sowohl das Element $\varkappa$ als auch die beiden Differenzen (b — a) und (β — α) von den Werthen der nichtmutablen Veränderlichen x , . . w unabhängig sind; so erkennt man an den Gleichungen II und III, dass man sich auch hier auf folgende Weise aussprechen kann: „Weil die specielle Bedeutung, welche man nach ausgeführter Reihenentwickelung dem Operationsmittel $\varkappa$ beilegen muss, ein von jedem der Elemente x w unabhängiger und im Momente des Verschwindens befindlicher Werth ist; so liegt bei jedem Werthe der Elemente x . , ... w der Werth der neuen Function $\varphi(x \ldots\ldots w, b, \beta)$ dem Werthe der ursprünglichen Function $\varphi(x \ldots\ldots w, a, \alpha)$ nächst an."

Wie man in dergleichen Fällen weiter zu gehen hat, ist aus dem Vorhergehenden hinlänglich klar.

§. 53. Der weiteste Begriff einer unmittelbaren Mutation ist gegeben, wenn man eine aus gewissen nichtmutablen Veränderlichen gebildete Function in irgend eine andere aus denselben nichtmutablen Veränderlichen gebildete Function übergehen lässt.

Die erste Operation ist auch hier, das Element $\varkappa$ so in die neue Function einzuführen, dass die mit $\varkappa$ versehene neue Function sich bei $\varkappa = 0$ auf die ursprüngliche zurückzieht.

Die zweite Operation ist, die mit $\varkappa$ versehene neue Function in zwei Theile zu zerlegen, deren erster die ursprüngliche Function und deren zweiter die Mutation ist.

Wenn nun eine Function $\varphi(x \ldots\ldots w)$ in eine andere $F(x \ldots\ldots w)$ übergegangen ist, in welchen beiden Functionen genau dieselben nichtmutablen Veränderlichen x w vorkommen; und wenn in die neue Function das Element $\varkappa$ auf besagte Weise eingeführt worden ist; so kann man die mit $\varkappa$ versehene neue Function durch $\varphi(x \ldots\ldots w, \varkappa)$ bezeichnen. Die Bedingung, dass bei $\varkappa = 0$ sich $\varphi(x \ldots\ldots w, \varkappa)$ auf $\varphi(x \ldots\ldots w)$ zurückziehe, ist ausgesprochen durch die Gleichung

$$\text{I)} \quad \varphi(x \ldots\ldots w, 0) = \varphi(x \ldots\ldots w)$$

Das Zeichen $\varphi(x \ldots\ldots w, 0)$ deutet an, dass man in $\varphi(x \ldots\ldots w, \varkappa)$ Null an die Stelle des $\varkappa$ gesetzt habe. Auch braucht man nicht zu bemerken, dass das hiesige $\varphi(x \ldots\ldots w, \varkappa)$ nicht so zu nehmen ist, als hätten die nichtmutablen Veränderlichen x w eine Werthänderung erlitten; sondern das Zeichen $\varphi(x \ldots\ldots w, \varkappa)$ deutet an, dass der Werth der Elemente x w ungeändert geblieben sei, aber dass die Function $\varphi(x \ldots\ldots w)$ ein neues Element $\varkappa$ in sich aufgenommen habe, wobei noch weitere aus x . , ... w gebildete Zusammensetzungen mit eingegangen sein können oder nicht.

Was man aber dem $\varkappa$ für eine spezielle Bedeutung beilegen muss, damit die neue Function $\varphi(x \ldots\ldots w, \varkappa)$ von dem fremdartigen Elemente $\varkappa$ wieder befreit wird, ist ausgesprochen durch die Gleichung

$$\text{II)} \quad \varphi(x \ldots\ldots w, \varkappa) = F(x \ldots\ldots w)$$

Soll aber aus $\varphi(x \ldots\ldots w, \varkappa)$ die Function $F(x \ldots\ldots w)$ ganz vollkommen und unzweideutig wieder hervorgehen können; so ist durchaus nöthig, dass durch die Weise, wie man $\varkappa$ in $F(x \ldots\ldots w)$ einführt, die Vielförmigkeit der neuen Function nicht vermehrt wird. Dieser Punkt verdient die strengste Beachtung.

Die Zerlegung der neuen Function in ihre zwei Theile muss man an der Form $\varphi(x \ldots\ldots w, \varkappa)$ ausführen; denn $\varphi(x \ldots\ldots w, \varkappa)$ ist die allgemeinere Form, eben weil für eine specielle Bedeutnng des $\varkappa$ sich $F(x \ldots\ldots w)$ aus $\varphi(x \ldots\ldots w, \varkappa)$ ergibt. Man setze zunächst

$$\text{III)} \quad \varphi(x \ldots\ldots w, \varkappa) = \varphi(x \ldots\ldots w) + X$$

Soll nun $\varphi(x \ldots\ldots w, \varkappa)$ bei $\varkappa = 0$ sich wieder auf $\varphi(x \ldots\ldots w)$ zurückziehen, so muss der Theil X ein solcher Ausdruck sein, welcher irgend eine positive Potenz

des $\varkappa$ zum gemeinschaftlichen Factor hat, wobei X natürlich auch aus mehreren mit verschiedenen positiven Potenzen des $\varkappa$ multiplicirten Theilsätzen bestehen kann. Im Allgemeinen kann man setzen:

$$\text{IV)}\quad \varphi(x \ldots\ldots w, \varkappa) = \varphi(x \ldots\ldots w) + \varkappa^p \cdot P + \varkappa^q \cdot Q + \varkappa^r \cdot R + \cdots\cdots$$

wo P, Q, R kein $\varkappa$ mehr enthalten. Da aber, wie gesagt, alle Exponenten p, q, r positiv sein müssen; so kann die Reihe IV, wenn sie eine unaufhörliche ist, nur eine steigende sein. Der Gleichförmigkeit wegen wird man also auch diejenigen Mutationen, welche aus geschlossenen Reihen bestehen, nach steigenden Potenzen des $\varkappa$ ordnen.

Wenn also in der Reihe IV die Ausdrücke P, Q, R kein $\varkappa$ mehr enthalten, und die Exponenten p, q, r lauter positive Zahlen sind; so ist wirklich das $\varkappa$ so in die neue Function eingeführt, dass $\varphi(x \ldots\ldots w, \varkappa)$ bei $\varkappa = 0$ sich auf $\varphi(x \ldots w)$ zurückzieht. Dieser Zweck lässt sich zwar durch sehr verschiedene Einführungsweisen des $\varkappa$ erreichen; aber man erkennt doch geradezu, dass diese verschiedenen Einführungsweisen nicht ganz gleichgültig sind. Man erkennt nämlich:

A) Es ist nothwendig, das $\varkappa$ in die neue Function so einzuführen, dass die Zerlegung auch mit den in den früheren Zweigen der Analysis gebotenen Mitteln jedesmal ausführbar ist.

B) Es ist in Anbetracht der ferneren (mit der Mutation später noch vorzunehmenden) Geschäfte zweckmässig, das $\varkappa$ so einzuführen, dass die Mutation jedesmal die einfachste Form bekommt.

Diese beiden Punkte sind aber berücksichtigt, wenn man (man sehe noch §. 56) das $\varkappa$ in die neue Function so einführt, dass sich für die Mutation eine nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe ergiebt; denn

1) weiss man mit Sicherheit, dass eine (geschlossene oder unaufhörliche) Reihe nach lauter positiven ganzen Potenzen eines und desselben Fortschreitungselementes aufsteigt, so ist der Maclaurin'sche Satz das jedesmal zum Ziele führende Entwicklungsmittel; und wenn einmal in irgend einer Reihe eine der successiven Potenzen des Fortschreitungselementes nicht vorkommen kann, so zeigt es sich bekanntlich dadurch, dass deren Coefficient Null ist. Es hat ferner

2) die nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe auch die einfachste Form, und nimmt die wenigsten Mittel bei den noch später mit ihr vorzunehmenden Geschäften in Anspruch.

Somit hat man für alle unmittelbaren Mutationen nicht nur eine und dieselbe Form, sondern auch ein und dasselbe Entwicklungsmittel; und man stelle einmal für allemal die Forderung:

„Alle unmittelbaren Mutationen sollen, wenn möglich, geschlos-„sene, widrigenfalls unaufhörliche Reihen sein, welche nach lauter „positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigen."

Hier sind wir einmal im Falle, von der schon früher (gegen das Ende des §. 47) besprochenen Freiheit Gebrauch zu machen, weil wir den Zweck haben, die höchste Einfachheit zu erreichen. Wie man dabei zu Werke geht, sehe man in §. 56 und an den Beispielen des §. 58. Dass sich unter den mancherlei Einführungsweisen des $\varkappa$ auch jedesmal solche befinden müssen, welche der so eben gestellten Forderung genügen; dazu wird der Beweis später (im zehnten Beispiele des §. 58) nachgeliefert werden.

Ganz vorzügliche Berücksichtigung verdient aber der besondere Fall, wo bei jedem Werthe der nichtmutablen Veränderlichen der Werth der neuen Function dem Werthe der ursprünglichen Function nächstanliegt. In diesem Falle muss bei jedem Werthe der nichtmutablen Veränderlichen der Werth der Mutation sich im Momente des Verschwindens befinden, d. h. entweder als positiv oder als negativ der Null nächstanliegen. Diese Eigenschaft ist aber, wie man schon aus der Elementaranalysis weiss, einer unaufhör-

lichen Reihe jedenfalls dann gesichert, wenn gegen jedes beliebige Glied die Summe aller unendlichvielen nachfolgenden im Momente des Verschwindens befindlich ist; und dieser Bedingung genügen alle jene Reihen, die nach steigenden Potenzen eines und desselben in Momente des Verschwindens befindlichen Fortschreitungselementes fortlaufen. Man stelle also folgende zweite Forderung:

„In dem Falle, wo bei jedem Werthe der nichtmutablen Veränderlichen der Werth der Mutation sich im Momente des Verschwindens befinden muss, führe man in die neue Function das Operationsmittel „$\varkappa$ so ein, dass die ihm nach ausgeführter Reihenentwicklung beizulegende specielle Bedeutung ein im Momente des Verschwindens befindlicher Werth ist."

In dieser Hinsicht vergleiche man die Beispiele in der zweiten Abtheilung des §. 58, namentlich das zwanzigste Beispiel, welches in der erforderlichen Allgemeinheit gehalten ist.

Anhang. Blicken wir nun auf die allgemein bekannte Grundlage des Differenzencalculs und auf die hier in dieser Theorie bereits mitgetheilte Grundlage des (bis jetzt sogenannten) Variationscalculs zurück; so haben wir folgende Vergleichung:

I. Begründung des Differenzencalculs.

A. Der einfachste Fall, auf dem die allererste Begründung des Differenzencalculs beruht, ist folgender: Es ist eine Function $\varphi(x)$ mit dem einzigen unabhängigen Veränderlichen x gegeben, und man setzt $(x + \varkappa)$ an die Stelle des x, so dass $\varphi(x)$ in $\varphi(x + \varkappa)$ übergeht. Hier unterscheide man zweierlei:

1) Kann auch jetzt das x noch jeden beliebigen Werth annehmen, so ergibt sich, was auch $\varphi(x)$ für eine Function von x sein mag, aus $\varphi(x + \varkappa)$ keine andere, als eine mit $\varphi(x)$ anfangende und nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende, d. h. die Taylorsche Reihe; und dass sich nur diese Reihe ergibt, muss durchaus bewiesen werden.

2) Wenn aber, nachdem man $(x + \varkappa)$ an die Stelle des x in $\varphi(x)$ eingesetzt hat, das x alsdann einen bestimmten Werth a bekommt, so dass man eigentlich $(a + \varkappa)$ an die Stelle des x in $\varphi(x)$ einsetzt; dann kann man im Allgemeinen nichts von der Form der sich ergebenden Reihe behaupten, sondern man muss jeden speciellen Fall nach seinen Eigenthümlichkeiten untersuchen.

B. Wie dieses Verfahren auf Functionen mit zwei und noch mehr Veränderlichen ausgedehnt wird, ist bekannt.

II. Begründung des (bis jetzt sogenannten) Variationscalculs.

A. Der einfachste Fall, auf dem die allererste Begründung dieses Calculs beruht, ist folgender: eine Function $\varphi(x)$ mit dem einzigen nichtmutablen Veränderlichen x geht in eine andere Function $F(x)$ mit demselben nichtmutablen Veränderlichen x über. Hier führt man in $F(x)$ nach freier Wahl das Operationsmittel $\varkappa$ so ein, dass sich eine mit $\varphi(x)$ anfangende und nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe ergibt. Jede andere Einführungsweise des $\varkappa$ wird, weil weniger zweckmässig, verworfen, und man hat nur zu beweisen, dass eine solche Einführungsweise des $\varkappa$ jedesmal möglich ist (das dabei anzuwendende Verfahren wird in den nächsten §§. auseinandergesetzt werden).

B. Dieses Verfahren kann ohneweiteres auf Functionen mit zwei und noch mehr nichtmutablen Veränderlichen ausgedehnt werden (wird gleichfalls in den nächsten §§. auseinandergesetzt werden).

§. 54. Wenn eine Function $\varphi(x)$ in eine andere Function $F(x)$ übergegangen ist, wo sowohl $\varphi(x)$ als auch $F(x)$ nur den einzigen nichtmutablen Veränderlichen x enthalten; und wenn man, um der neuen Function die besprochene Eigenschaft beizulegen, das Element $\varkappa$ einführt; so kann man die mit $\varkappa$ versehene neue Function durch $\varphi(x, \varkappa)$ bezeichnen. Das $\varkappa$ muss nach der im vorigen §. gestellten Forderung so eingeführt

sein, dass $\varphi(x, \varkappa)$ sich in eine mit $\varphi(x)$ anfangende und nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln lässt, welche, wenn man sie mittelst des Maclaurin'schen Satzes entwickelt, folgende Form

$$\text{I)}\quad \varphi(x, \varkappa) = \varphi(x) + \varkappa \cdot \left(\frac{d_\varkappa \varphi(x, \varkappa)}{d\varkappa}\right)_0 + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d^2_\varkappa \varphi(x, \varkappa)}{d\varkappa^2}\right)_0 + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \left(\frac{d^2_\varkappa \varphi(x, \varkappa)}{d\varkappa^3}\right)_0 + \ldots$$

annimmt. Was man aber nach ausgeführter Reihenentwickelung dem Operationsmittel $\varkappa$ für eine specielle Bedeutung beilegen muss, ist ausgesprochen durch die Gleichung

$$\text{II)}\quad \varphi(x, \varkappa) = F(x)$$

Die Coefficienten der Reihe I enthalten kein $\varkappa$ mehr, sind also Functionen von x, oder constant, oder auch Null. Die Reihe selbst kann eine geschlossene oder unaufhörliche sein. Um die Kürze der Darstellung zu befördern, setze man $\delta\varphi(x)$ anstatt

$\left(\frac{d_\varkappa \varphi(x, \varkappa)}{d\varkappa}\right)_0$, $\delta^2\varphi(x)$ anstatt $\left(\frac{d^2_\varkappa \varphi(x, \varkappa)}{d\varkappa^2}\right)_0$, $\delta^3\varphi(x)$ anstatt $\left(\frac{d^3_\varkappa \varphi(x, \varkappa)}{d\varkappa^3}\right)_0$, etc.; und statt der Reihe I hat man

$$\text{III)}\quad \varphi(x, \varkappa) = \varphi(x) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x) + \ldots\ldots$$

Diese Bezeichnung ist der des Differentialcalculs analog und sehr passend, um die Operationen anzudeuten, mittelst welcher man aus $\varphi(x, \varkappa)$ successive die einzelnen Coefficienten bekommt. Besonders beachte man den Fall, wo sich $\varphi(x, \varkappa)$ nur in zwei Theilsätze zerlegt, so dass man die geschlossene Reihe

$$\text{IV)}\quad \varphi(x, \varkappa) = \varphi(x) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x)$$

bekommt. Wenn nun $y = \varphi(x)$ in irgend eine andere Function $F(x)$ übergeht, so ist $F(x) - \varphi(x)$ der Unterschied zwischen der neuen und ursprünglichen Function, welcher, wie gesagt, die Mutation heisst, und mit $\varDelta y$ bezeichnet werden mag, so dass $\varDelta y = F(x) - \varphi(x)$ oder $y + \varDelta y = F(x)$ ist. Dasselbe thut man auch, wenn $\varkappa$ in $F(x)$ eingeführt ist, indem man gleichfalls $\varDelta y = \varphi(x, \varkappa) - \varphi(x)$, oder $y + \varDelta y = \varphi(x, \varkappa)$ setzt.

Dieses ist nach Analogie des Differenzencalculs, wo man die Differenz $\varphi(x + \varkappa) - \varphi(x)$ mit Dy bezeichnet, und $Dy = \varphi(x + \varkappa) - \varphi(x)$ oder $y + Dy = \varphi(x + \varkappa)$ setzt.

So wie man aber $y = \varphi(x)$ und $y + \varDelta y = \varphi(x, \varkappa)$ setzt; so setzt man auch $\delta y = \delta\varphi(x)$, $\delta^2 y = \delta^2\varphi(x)$, $\delta^3 y = \delta^3\varphi(x)$, etc.; und man hat statt der Reihe III jetzt folgende:

$$\text{V)}\quad y + \varDelta y = \varphi(x) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

Daraus folgt:

$$\text{VI)}\quad \varDelta y = \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

Alle Coefficienten δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc., müssen, wie gesagt, im Allgemeinen Functionen von x, können aber auch constant oder Null sein; und will man diese für $\varDelta y$ hergestellte Reihe wieder von $\varkappa$ befreien, so hat man ihm die specielle Bedeutung zu geben, welche aus Gleichung II entnommen werden muss.

§. 55. Wenn eine Function $\varphi(x, w)$ in eine andere $F(x, w)$ übergegangen ist, wo sowohl in $\varphi(x, w)$ als auch in $F(x, w)$ nur die beiden nichtmutablen Veränderlichen x und w enthalten sind; und wenn man, um der neuen Function die nöthige Eigenschaft beizulegen, das Element $\varkappa$ einführt; so kann man die mit $\varkappa$ versehene neue Function durch $\varphi(x, w, \varkappa)$ bezeichnen. Das $\varkappa$ muss aber nach der in §. 53 gestellten Forderung so eingeführt sein, dass $\varphi(x, w, \varkappa)$ sich in eine mit $\varphi(x, w)$ anfangende und nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln lässt, welche, wenn man sie mittelst des Maclaurin'schen Satzes entwickelt, folgende Form

$$\text{I)}\quad \varphi(x, w, \varkappa) = \varphi(x, w) + \varkappa \cdot \left(\frac{d_\varkappa \varphi(x, w, \varkappa)}{d\varkappa}\right)_0 + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d^2_\varkappa \varphi(x, w, \varkappa)}{d\varkappa^2}\right)_0$$

$$+ \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \left(\frac{d^3_\varkappa \varphi(x, w, \varkappa)}{d\varkappa^3}\right)_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

annimmt. Was man aber nach ausgeführter Reihenentwickelung dem Operationselemente $\varkappa$ für eine specielle Bedeutung beilegen muss, ist ausgesprochen durch die Gleichung

$$\text{II)}\quad \varphi(x, w, \varkappa) = F(x, w)$$

Die Coefficienten der Reihe I enthalten kein $\varkappa$ mehr, sind also im Allgemeinen Functionen von x und w zugleich; sie können aber auch Functionen von nur einem einzigen dieser Elemente, oder constant, oder auch Null sein. Die Reihe selbst kann eine geschlossene oder unaufhörliche sein. Um die Kürze der Darstellung zu befördern, setze man auch hier $\delta\varphi(x, w)$ anstatt $\left(\frac{d_\varkappa \varphi(x, w, \varkappa)}{d\varkappa}\right)_0$, $\delta^2\varphi(x, w)$ anstatt $\left(\frac{d^2_\varkappa \varphi(x, w, \varkappa)}{d\varkappa^2}\right)_0$, $\delta^3\varphi(x, w)$ anstatt $\left(\frac{d^3_\varkappa \varphi(x, w, \varkappa)}{d\varkappa^3}\right)_0$, etc.; und statt der Reihe I hat man

$$\text{III)}\quad \varphi(x, w, \varkappa) = \varphi(x, w) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x, w) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x, w) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x, w) + \cdot \cdot \cdot$$

Besonders beachte man den Fall, wo sich $\varphi(x, w, \varkappa)$ nur in zwei Theilsätze zerlegt, so dass man die geschlossene Reihe

$$\text{IV)}\quad \varphi(x, w, \varkappa) = \varphi(x, w) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x, w)$$

bekommt. Wenn nun $y = \varphi(x, w)$ in irgend eine andere Function $F(x, w)$ übergeht; so bezeichnet man auch hier die Mutation mit Δy, und setzt $\Delta y = F(x, w) - \varphi(x, w)$, oder $y + \Delta y = F(x, w)$. Dasselbe thut man auch, wenn $\varkappa$ in die neue Function eingeführt ist, indem man gleichfalls $\Delta y = \varphi(x, w, \varkappa) - \varphi(x, w)$, oder $y + \Delta y = \varphi(x, w, \varkappa)$ setzt. Sowie man aber $y = \varphi(x, w)$, und $y + \Delta y = \varphi(x, w, \varkappa)$ setzt; so setzt man auch $\delta y = \delta\varphi(x, w)$, $\delta^2 y = \delta^2\varphi(x, w)$, $\delta^3 y = \delta^3\varphi(x, w)$, etc; und man hat statt der Reihe III jetzt folgende:

$$\text{V)}\quad y + \Delta y = y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

Daraus folgt:

$$\text{VI)}\quad \Delta y = \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

Hier müssen aber, wie gesagt, alle Coefficienten δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc., im Allgemeinen Functionen von x und w zugleich sein; sie können aber auch Functionen von nur einem einzigen dieser Elemente, oder constant, oder Null sein; und will man diese für Δy hergestellte Reihe wieder von $\varkappa$ befreien, so hat man ihm diejenige specielle Bedeutung zu geben, welche aus Gleichung II entnommen werden muss.

§. 56. Nicht immer ist es möglich, der neuen Function die erforderliche Eigenschaft dadurch zu geben, dass man das einzige Element $\varkappa$ einführt; sondern oft muss man das $\varkappa$ noch mit einem Factor begleiten, und Producte, wie $n \cdot \varkappa$, $m \cdot \varkappa$, etc. einführen. Zwei derartige Fälle sind schon in §. 51 und §. 52 vorgekommen; andere werden in §. 58 vorkommen.

Wenn nun die Function $\varphi(x)$ in eine andere $F(x)$ übergegangen ist, wo sowohl $\varphi(x)$ als auch $F(x)$ nur den einzigen nichtmutablen Veränderlichen x enthalten; und wenn man, um der neuen Function die erforderlichen Eigenschaften beizulegen, ausser dem Elemente $\varkappa$ noch die Producte $n \cdot \varkappa$, $m \cdot \varkappa$, etc. einführen muss; so mag die mit $\varkappa$ versehene neue Function $F(x)$ durch $\varphi(x, \varkappa, n \cdot \varkappa, m \cdot \varkappa \ldots\ldots\ldots)$ bezeichnet werden.

Auch hier muss das $\varkappa$ so eingeführt sein, dass sich die durch den Maclaurin'schen Satz zu entwickelnde Reihe

$$\text{I)}\quad \varphi(x, \varkappa, n\cdot\varkappa, m\cdot\varkappa, \ldots\ldots) = \varphi(x) + \varkappa\cdot\delta\varphi(x) + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2\varphi(x) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3\varphi(x) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ergibt. Und wenn man $y = \varphi(x)$ setzt, so kann man statt dieser Reihe auch

$$\text{II)}\quad y + \Delta y = \varphi(x) + \varkappa\cdot\delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

setzen. Was man nach ausgeführter Reihenentwickelung dem Elemente $\varkappa$ und den Producten $n\cdot\varkappa$, $m\cdot\varkappa$, etc., für specielle Bedeutungen beilegen muss, ist ausgesprochen durch die Gleichung

$$\text{III)}\quad \varphi(x, \varkappa, n\cdot\varkappa, m\cdot\varkappa, \ldots\ldots) = F(x)$$

Wenn eine Function $\varphi(x, w)$ in eine andere $F(x, w)$ übergegangen ist, wo sowohl $\varphi(x, w)$ als auch $F(x, w)$ nur die zwei nichtmutablen Veränderlichen x und w enthalten; und wenn man, um der neuen Function die erforderlichen Eigenschaften beizulegen, ausser dem Elemente $\varkappa$ noch die Producte $n\cdot\varkappa$, $m\cdot\varkappa$, etc. einführen muss; so mag die mit $\varkappa$ versehene neue Function $F(x, w)$ durch $\varphi(x, w, \varkappa, n\cdot\varkappa, m\cdot\varkappa, \ldots\ldots)$ bezeichnet werden. Auch hier muss das $\varkappa$ so eingeführt sein, dass sich die durch den Maclaurin'schen Satz zu entwickelnde Reihe

$$\text{IV)}\quad \varphi(x, w, \varkappa, n\cdot\varkappa, m\cdot\varkappa, \ldots\ldots) = \varphi(x, w) + \varkappa\cdot\delta\varphi(x, w) + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2\varphi(x, w) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3\varphi(x, w) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ergibt. Und wenn man $y = \varphi(x, w)$ setzt, so kann man statt dieser Reihe auch

$$\text{V)}\quad y + \Delta y = \varphi(x, w) + \varkappa\cdot\delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

setzen. Was man nach ausgeführter Reihenentwickelung dem Elemente $\varkappa$ und den Producten $n\cdot\varkappa$, $m\cdot\varkappa$, etc. für spezielle Bedeutungen beilegen muss, ist ausgesprochen durch die Gleichung

$$\text{VI)}\quad \varphi(x, w, \varkappa, n\cdot\varkappa, m\cdot\varkappa, \ldots\ldots) = F(x, w)$$

Besonders in den Fällen, wo gleichzeitig mehrere Functionen $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, etc. bezüglich in andere Functionen $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, etc. übergehen, oder wo gleichzeitig mehrere Functionen $\varphi(x, w)$, $\varphi'(x, w)$, $\varphi''(x, w)$, etc. bezüglich in andere Functionen $F(x, w)$, $F'(x, w)$, $F''(x, w)$, etc. übergehen, und so fort, ist es nicht immer möglich, das einzige Element $\varkappa$ in alle diese neuen Functionen so einzuführen, dass es dann in allen dieselbe Bedeutung hat, wenn man nicht ausser dem einfachen $\varkappa$ auch noch Producte $n\cdot\varkappa$, $m\cdot\varkappa$, etc. zu Hilfe nimmt.

§. 57. Wie man bis jetzt ersehen hat, ist es bei den unmittelbaren Mutationen einerlei, ob die mutable Function nur einen oder beliebig viele nichtmutable Veränderliche enthält, da die Operation des Mutirens nur ein einfaches Differentiiren nach $\varkappa$ ist. Es soll aber noch bemerkt werden, dass man die Reihe

$$y + \varkappa\cdot\delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

sehr oft durch $y_\varkappa$ darstellt, insofern man $y_\varkappa$ als Function des einzigen Veränderlichen $\varkappa$ ansieht. Von dieser Bezeichnung wird wegen ihrer Bequemlichkeit besonders dann Gebrauch gemacht werden, wenn man die ganze durch $y_\varkappa$ dargestellte Reihe als einziges Element in einen Ausdruck setzt. In der Reihe

$$\Delta y = \varkappa\cdot\delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

werden alle mit $\varkappa$ behafteten Glieder zusammen oder das ihrer Summe gleiche Δy die (unmittelbare reine) Gesammtmutation genannt; die einzelnen Glieder

$\varkappa \cdot \delta y$, $\frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y$, $\frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y$, etc. nennt man (unmittelbare reine) Mutationstheile, und zwar bezüglich ersten, zweiten, dritten etc.; die Coefficienten δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. nennt man (unmittelbare reine) Mutationscoefficienten, und zwar bezüglich ersten, zweiten, dritten, etc.

§. 58. Nun sollen zu dem Bisherigen einige Beispiele folgen, und zwar in zwei Abtheilungen.

Erste Abtheilung. Beispiele, wo eine Function in eine andere übergeht, deren Werth nicht gerade ein dem Werthe der ursprünglichen Function nächstanliegender zu sein braucht.

Erstes Beispiel. Es sei $y = \varphi(x)$ gegeben, und diese Function gehe über in

$$\text{I)}\quad y + \Delta y = F(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

Man setze ohneweiters

$$\text{II)}\quad y + \Delta y = \varphi(x, \varkappa) = \varphi(x) + \varkappa \cdot \psi(x)$$

Hieraus gibt sich wieder $y = \varphi(x)$, wenn man $\varkappa = 0$ setzt; und wenn man $\varkappa = 1$ setzt, so geht $\varphi(x, \varkappa)$ über in $F(x) = \varphi(x) + \psi(x)$.

Zweites Beispiel. Es sei $y = \varphi(x)$ gegeben, und diese Function gehe über in

$$\text{I)}\quad y + \Delta y = F(x) = \varphi(x + \psi(x))$$

Man setze ohneweiters

$$\text{II)}\quad y + \Delta y = \varphi(x, \varkappa) = \varphi(x + \varkappa \cdot \psi(x))$$

so bekommt man durch den Maclaurin'schen Satz folgende Reihe:

$$\text{III)}\quad y + \Delta y = \varphi(x) + \varkappa \cdot \left(\frac{d_\varkappa \varphi(x, \varkappa)}{d\varkappa}\right)_0 + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d_\varkappa^2 \varphi(x, \varkappa)}{d\varkappa^2}\right)_0 + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \left(\frac{d_\varkappa^3 \varphi(x, \varkappa)}{d\varkappa^3}\right)_0 + \ldots$$

Nun ist hier in diesem Beispiele $\left(\frac{d_\varkappa \varphi(x, \varkappa)}{d\varkappa}\right)_0 = \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot (\psi(x))$, $\left(\frac{d_\varkappa^2 \varphi(x, \varkappa)}{d\varkappa^2}\right)_0 = \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \cdot (\psi(x))^2$, etc.; letztere Reihe ist also gleichbedeutend mit folgender:

$$\text{IV)}\quad y + \Delta y = \varphi(x) + \varkappa \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot (\psi(x)) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \cdot (\psi(x))^2 + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} \cdot (\psi(x))^3 + \cdots\cdots$$

Hieraus gibt sich wieder $y = \varphi(x)$, wenn man $\varkappa = 0$ setzt; und wenn man $\varkappa = 1$ setzt, so geht $\varphi(x, \varkappa)$ über in

$$\text{V)}\quad F(x) = \varphi(x) + \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot \psi(x) + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \cdot (\psi(x))^2 + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} \cdot (\psi(x))^3 + \cdots\cdots = \varphi(x + \psi(x))$$

Drittes Beispiel. Es sei $y = \varphi(x) = \lg \operatorname{nat} x$ gegeben, und diese Function gehe über in

$$\text{I)}\quad y + \Delta y = F(x) = \lg \operatorname{nat} x^3$$

Erstens. Man setze

$$\text{II)}\quad y + \Delta y = \varphi(x, \varkappa) = \lg \operatorname{nat} x \cdot x^\varkappa$$

so bekommt man

$$\text{III)}\quad y + \Delta y = \varphi(x, \varkappa) = \lg \operatorname{nat} x + \varkappa \cdot \lg \operatorname{nat} x$$

Hieraus ergibt sich wieder $y = \varphi(x) = \lg \operatorname{nat} x$, wenn man $\varkappa = 0$ setzt; und wenn man $\varkappa = 2$ setzt, so geht $\varphi(x, \varkappa)$ über in $F(x) = \lg \operatorname{nat} x + 2 \cdot \lg \operatorname{nat} x = \lg \operatorname{nat} x^3$.

Zweitens. Man setze

$$IV)\quad y + \Delta y = \varphi'(x, \varkappa) = \lg\ \text{nat}\ x \cdot x^{-\varkappa}$$

so bekommt man

$$V)\quad y + \Delta y = \varphi'(x, \varkappa) = \lg\ \text{nat}\ x - \varkappa \cdot \lg\ \text{nat}\ x$$

Hieraus gibt sich wieder $y = \varphi(x) = \lg\ \text{nat}\ x$, wenn man $\varkappa = 0$ setzt; und wenn man $\varkappa = -2$ setzt, so geht $\varphi'(x, \varkappa)$ über in $F(x) = \lg\ \text{nat}\ x + 2 \cdot \lg\ \text{nat}\ x = \lg\ \text{nat}\ x^3$.

Viertes Beispiel. Es sei $y = \varphi(x) = x^m$ gegeben, und diese Function gehe über in

$$I)\quad y + \Delta y = F(x) = (x + a)^m$$

Erstens. Man setze ohneweiters

$$II)\quad y + \Delta y = \varphi(x, \varkappa) = (x + \varkappa \cdot a)^m$$

so bekommt man

$$III)\quad y + \Delta y = \varphi(x, \varkappa) = x^m + \varkappa \cdot m \cdot a \cdot x^{m-1} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot m(m - 1) \cdot a^2 \cdot x^{m-2}$$
$$+ \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot a^3 \cdot x^{m-3} + \cdots\cdots\cdots$$

Bei $\varkappa = 0$ gibt sich hieraus wieder $y = \varphi(x) = x^m$; und bei $\varkappa = 1$ geht $\varphi(x, \varkappa)$ über in

$$F(x) = x^m + m \cdot a \cdot x^{m-1} + \frac{1}{1.2} \cdot m \cdot (m - 1) \cdot a^2 \cdot x^{m-2}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3} \cdot m(m - 1) \cdot (m - 2) \cdot a^3 \cdot x^{m-3} + \cdots\cdots\cdots$$
$$= (x + a)^m$$

Zweitens. Man kann aber auch setzen

$$IV)\quad y + \Delta y = \varphi'(x, \varkappa) = (x - \varkappa \cdot a)^m$$

und so bekommt man

$$V)\quad y + \Delta y = \varphi'(x, \varkappa) = x^m - \varkappa \cdot m \cdot a \cdot x^{m-1} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot m(m - 1) \cdot a^2 \cdot x^{m-2}$$
$$- \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot m(m - 1) \cdot (m - 2) \cdot a^3 \cdot x^{m-3} + \cdots\cdots$$

Hieraus gibt sich wieder $y = \varphi(x) = x^m$, wenn man $\varkappa = 0$ setzt; und wenn man $\varkappa = -1$ setzt, so geht $\varphi'(x, \varkappa)$ über in

$$F(x) = x^m + m \cdot a \cdot x^{m-1} + \frac{1}{1.2} \cdot m \cdot (m - 1) \cdot a^2 \cdot x^{m-2}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3} \cdot m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot a^3 \cdot x^{m-3} + \cdots\cdots$$
$$= (x + a)^m$$

Fünftes Beispiel. Es sei wieder $y = \varphi(x) = x^m$ gegeben, und diese Function gehe über in

$$I)\quad y + \Delta y = F(x) = x^{m+n}$$

Erstens. Man setze

$$II)\quad y + \Delta y = \varphi(x, \varkappa) = x^{m+\varkappa}$$

so bekommt man

$$III)\quad y + \Delta y = \varphi(x, \varkappa) = x^m \cdot \left(1 + \varkappa \cdot (\lg\ \text{nat}\ x) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\lg\ \text{nat}\ x)^2 \right.$$
$$\left. + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot (\lg\ \text{nat}\ x)^3 + \cdots\cdots\cdots \right)$$

Hieraus gibt sich wieder $y = \varphi(x) = x^m$, wenn man $\varkappa = 0$ setzt; und wenn man $\varkappa = n$ setzt, so geht $\varphi(x, \varkappa)$ über in

$$F(x) = x^m \cdot \left(1 + n \cdot (\lg\ \text{nat}\ x) + \frac{n^2}{1.2} \cdot (\lg\ \text{nat}\ x)^2 \right.$$
$$\left. + \frac{n^3}{1.2.3} \cdot (\lg\ \text{nat}\ x)^3 + \cdots\cdots\cdots \right)$$
$$= x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

Zweitens. Man setze

$$\text{IV)}\quad y + \Delta y = \varphi'(x, \varkappa) = \frac{x^m}{\varkappa^n}$$

so bekommt man

$$\text{V)}\quad y + \Delta y = \varphi'(x, \varkappa) = x^m \cdot \Big(1 - \varkappa \cdot (\lg \text{nat } x) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\lg \text{nat } x)^2 - \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot (\lg \text{nat } x)^3 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\Big)$$

Hieraus folgt wieder $y = \varphi(x) = x^m$, wenn man $\varkappa = 0$ setzt; und wenn man $\varkappa = -n$ setzt, so geht $\varphi'(x, \varkappa)$ über in

$$F(x) = x^m \cdot \Big(1 + n \cdot (\lg \text{nat } x) + \frac{n^2}{1.2} \cdot (\lg \text{nat } x)^2 + \frac{n^3}{1.2.3} \cdot (\lg \text{nat } x)^3 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\Big)$$
$$= x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

Sechstes Beispiel. Wenn $y = \varphi(x) = \lg \text{nat } (x^2)^n$ übergeht in

$$\text{I)}\quad y + \Delta y = F(x) = \lg \text{nat } (x^2)^m$$

so kann man

$$\text{II)}\quad y + \Delta y = \varphi(x, \varkappa) = \lg \text{nat } (x^2)^{n+\varkappa}$$

setzen. Daraus folgt

$$\text{III)}\quad y + \Delta y = \varphi(x, \varkappa) = \lg \text{nat } (x^2)^n + \varkappa \cdot \lg \text{nat } (x^2)$$

Hieraus gibt sich wieder $y = \varphi(x) = \lg \text{nat } (x^2)^n$, wenn man $\varkappa = 0$ setzt; und wenn man $\varkappa = (m - n)$ setzt, so geht $\varphi(x, \varkappa)$ über in $F(x) = \lg \text{nat } (x^2)^n + (m - n) \cdot \lg \text{nat } (x^2) = \lg \text{nat } (x^2)^m$.

Siebentes Beispiel. Wenn $y = \varphi(x) = \sin x$ übergeht in

$$\text{I)}\quad y + \Delta y = F(x) = (\sin x) \cdot (\cos x)$$

so kann man

$$\text{II)}\quad y + \Delta y = \varphi(x, \varkappa) = (\sin x) \cdot (\cos \varkappa \cdot x)$$

setzen; denn daraus folgt

$$\text{III)}\quad y + \Delta y = \varphi(x, \varkappa) = (\sin x) \cdot \Big(1 - \frac{\varkappa^2}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{\varkappa^4}{1.2.3.4} \cdot x^4 - \frac{\varkappa^6}{1.2.3.\ldots 6} \cdot x^6 + \frac{\varkappa^8}{1.2.3\ldots 8} \cdot x^8 - + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\Big)$$

In dieser Reihe fehlen alle ungraden Potenzen des $\varkappa$. Bei $\varkappa = 0$ gibt sich wieder $y = \varphi(x) = \sin.\ x$; und bei $\varkappa = 1$ geht $\varphi(x, \varkappa)$ über in

$$y + \Delta y = F(x) = (\sin x) \cdot \Big(1 - \frac{1}{1.2} \cdot x^2 + \frac{1}{1.2.3.4} \cdot x^4 - \frac{1}{1.2.3\ldots 6} \cdot x^6 + \frac{1}{1.2.3\ldots 8} \cdot x^8 - + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\Big)$$
$$= (\sin x) \cdot (\cos x)$$

Achtes Beispiel. Wenn $y = \varphi(x, w) = \cos (x + w)$ gegeben ist, und übergeht in

$$\text{I)}\quad y + \Delta y = F(x, w) = (\cos x) \cdot (\cos w)$$

so kann man setzen

entweder

$$\text{II)}\quad y + \Delta y = \varphi(x, w, \varkappa) = \cos (x + w) + \varkappa \cdot (\sin x) \cdot (\sin w)$$

oder

$$\text{III)}\quad y + \Delta y = \varphi'(x, w, \varkappa) = \cos (x + w) + (\sin x) \cdot (\sin \varkappa \cdot w)$$

oder

$$\text{IV)}\quad y + \Delta y = \varphi''(x, w, \varkappa) = \cos (x + w) + (\sin \varkappa \cdot x) \cdot (\sin \varkappa \cdot w)$$

und so fort. Aus allen diesen Ausdrücken folgt wieder $\varphi(x, w) = \cos(x + w)$, wenn man $\varkappa = 0$ setzt; aus allen diesen Ausdrücken lässt sich eine mit $\cos(x + w)$ anfangende und nach ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln, aber diese Reihen werden verschieden ausfallen, je nach der verschiedenen Einführungsweise des $\varkappa$; alle diese Ausdrücke haben das Gemeinsame, dass sie bei $\varkappa = 1$ ganz unbedingt in

$$F(x, w) = \cos(x + w) + (\sin x) \cdot (\sin w) = (\cos x) \cdot (\cos w)$$

übergehen.

Neuntes Beispiel. Wenn $y = \varphi(x, w) = \lg \text{nat}(x + w)$ gegeben ist, und übergeht in

$$\text{I)} \quad y + \Delta y = F(x, w) = \cos(x - w)$$

so kann man entweder setzen

$$\text{III)} \quad y + \Delta y = \varphi(x, w, \varkappa) = \lg \text{nat}(x + w) \cdot \left(\frac{\cos(x - w)}{\lg \text{nat}(x + w)}\right)^{\varkappa}$$

Daraus lässt sich nemlich eine mit $\lg \text{nat}(x + w)$ anfangende und nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln. Auch gibt sich bei $\varkappa = 0$ wieder $\varphi(x, w) = \lg \text{nat}(x + w)$, und bei $\varkappa = 1$ gibt sich $F(x, w) = \cos(x - w)$.

Man kann aber auch setzen

$$\text{IV)} \quad y + \Delta y = \varphi'(x, w, \varkappa) = \lg \text{nat}(x + w) \cdot \left(\frac{\lg \text{nat}(x + w)}{\cos(x - w)}\right)^{\varkappa}$$

Daraus kann man nemlich wieder eine mit $\lg \text{nat}(x + w)$ anfangende und nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln. Auch gibt sich bei $\varkappa = 0$ wieder $\varphi(x, w) = \lg \text{nat}(x + w)$, und bei $\varkappa = -1$ gibt sich $F(x, w) = \cos(x - w)$.

Zehntes Bespiel. Wenn $y = \varphi(x \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot w)$ gegeben ist, und übergeht in $y + \Delta y = F(x \ldots w)$, wo man weder von $\varphi(x \ldots w)$ noch von $F(x \ldots w)$ irgend eine Eigenschaft kennt; so fragt sich allerdings, ob unter den mancherlei Einführungsweisen des $\varkappa$ sich auch jedesmal solche befinden müssen, welche eine nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe liefern. Die Antwort hierauf ist bejahend, wie sogleich bewiesen werden soll.

Erstens. Man setze gradezu

$$\text{I)} \quad \varphi(x \ldots\ldots w, \varkappa) = \varphi(x \ldots\ldots w) + \varkappa \cdot (F(x \ldots\ldots w) - \varphi(x \ldots\ldots w))$$

Bei $\varkappa = 0$ bekommt man $\varphi(x \ldots\ldots w, 0) = \varphi(x \ldots\ldots w)$; und bei $\varkappa = 1$ bekommt man $\varphi(x \ldots\ldots w, 1) = F(x \ldots\ldots w)$. Die Reihe I ist eine geschlossene. Wenn sie gleich in allen Fällen gebraucht werden kann, so wird sie ihre Vorzüge doch besonders in den Fällen haben, wo sich $\varphi(x \ldots\ldots w)$ auch wirklich von $F(x \ldots\ldots w)$ subtrahiren lässt. (Man sehe zurück auf das erste, dritte und sechste Beispiel.)

Zweitens. Man setze $\varphi'(x \ldots\ldots w, \varkappa) = \varphi(x \ldots\ldots w) \cdot \left(\frac{F(x \ldots\ldots w)}{\varphi(x \ldots\ldots w)}\right)^{\varkappa}$, so bekommt man

$$\text{II)} \; \varphi'(x \ldots w, \varkappa) = \varphi(x \ldots w) \cdot \left(1 + \varkappa \cdot \left(\lg\text{nat}\frac{F(x \ldots w)}{\varphi(x \ldots w)}\right) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\lg\text{nat}\frac{F(x \ldots w)}{\varphi(x \ldots w)}\right)^2 + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \left(\lg\text{nat}\frac{F(x \ldots w)}{\varphi(x \ldots w)}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots\right)$$

Drittens. Und dergleichen Einführungsweisen mehr, namentlich solche, welche sich der Beschaffenheit der jedesmaligen Function anpassen, und von welchen einige in den bisherigen Beispielen vorgekommen sind, einige in den gerade jetzt nachfolgenden Beispielen vorkommen werden. (Man sehe zurück auf §. 56. Sehr beachtenswerth ist auch §. 61.)

Zweite Abtheilung. Beispiele, wo eine Function in eine andere übergeht, deren Werth unter allen Umständen ein dem Werthe der ursprünglichen Function nächstanliegender sein muss.

Elftes Beispiel. Es sei $y = \varphi(x)$ gegeben, und diese Function gehe über in

$$\text{I)} \quad y + \Delta y = F(x) = \varphi(x) + \eta \cdot \psi(x)$$

wo das Element η von x unabhängig und im Momente des Verschwindens befindlich ist, also bei jedem Werthe des x der Werth des F(x) dem Werthe des $\varphi(x)$ nächstanliegt. Man setze gradezu

$$\text{II)}\quad y + \Delta y = \varphi(x, \varkappa) = \varphi(x) + \varkappa \cdot \psi(x)$$

Hieraus ergibt sich wieder $y = \varphi(x)$, wenn man $\varkappa = 0$ setzt; und wenn man $\varkappa = \eta$ setzt, so geht $\varphi(x, \varkappa)$ über in $\varphi(x, \eta) = F(x) = \varphi(x) + \eta \cdot \psi(x)$.

Zwölftes Beispiel. Es sei $y = \varphi(x) = \cos x$ gegeben, und gehe über in

$$\text{I)}\quad y + \Delta y = F(x) = A^{\eta} \cdot \cos x$$

wo das Element η von x unabhängig und im Momente des Verschwindens befindlich ist, also bei jedem Werthe des x der Werth des F(x) dem Werthe des $\varphi(x)$ nächstanliegt. Man setze

$$\text{II)}\quad y + \Delta y = \varphi(x, \varkappa) = A^{\varkappa} \cdot \cos x$$

so folgt daraus nachstehende Reihe

$$\text{III)}\quad \varphi(x, \varkappa) = (\cos x) \cdot \left(1 + \varkappa \cdot (\lg \operatorname{nat} A) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\lg \operatorname{nat} A)^2 + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot (\lg \operatorname{nat} A)^3 + \cdots\cdots\cdots\right)$$

Bei $\varkappa = 0$ gibt sich daraus $\varphi(x, 0) = \varphi(x) = \cos x$; und bei $\varkappa = \eta$ geht $\varphi(x, \varkappa)$ über in

$$\text{IV)}\quad \varphi(x, \eta) = F(x) = (\cos x) \cdot \left(1 + \eta \cdot (\lg \operatorname{nat} A) + \frac{\eta^2}{1.2} \cdot (\lg \operatorname{nat} A)^2 + \frac{\eta^3}{1.2.3} \cdot (\lg \operatorname{nat} A)^3 + \cdots\cdots\cdots\right)$$

$$= A^{\eta} \cdot \cos x$$

Dreizehntes Beispiel. Es sei $y = \varphi(x) = \lg \operatorname{nat} x$ gegeben, und gehe über in

$$\text{I)}\quad y + \Delta y = F(x) = \lg \operatorname{nat} \left(x + \sqrt{\eta}\right)$$

wo das Element η von x unabhängig und im Momente des Verschwindens befindlich ist, also bei jedem Werthe des x der Werth des F(x) dem Werthe des $\varphi(x)$ nächstanliegt. Man forme zuerst die neue Function um in

$$\text{II)}\quad y + \Delta y = F(x) = \lg \operatorname{nat} \left(x + (\sqrt{\eta}) \cdot \sqrt{1}\right)$$

wo nur der Factor $\sqrt{1}$ zweideutig ist, und setze

$$\text{III)}\quad y + \Delta y = \varphi(x, \varkappa) = \lg \operatorname{nat} \left(x + \varkappa \cdot \sqrt{1}\right)$$

Hieraus lässt sich eine mit lg nat x anfangende und nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln. Auch gibt sich wieder $\varphi(x) = \lg \operatorname{nat} x$, wenn man $\varkappa = 0$ setzt; und wenn man $\varkappa = \sqrt{\eta}$ setzt, so geht $\varphi(x, \varkappa)$ über in

$$\varphi(x, \eta) = F(x) = \lg \operatorname{nat} \left(x + (\sqrt{\eta}) \cdot \sqrt{1}\right) = \lg \operatorname{nat} \left(x + \sqrt{\eta}\right)$$

Vierzehntes Beispiel. Es sei $y = \varphi(x) = \cos x$ gegeben, und diese Function gehe über in

$$\text{I)}\quad y + \Delta y = F(x) = \cos \left(x + \sqrt{\eta \cdot x} + \sqrt[3]{\xi \cdot x^2}\right)$$

wo die beiden Elemente η und ξ sowohl unter sich als auch von x unabhängig und im Momente des Verschwindens befindlich sind, also bei jedem Werthe des x der Werth des F(x) dem Werthe des $\varphi(x)$ nächstanliegt. Man forme zuerst die neue Function um in

$$\text{II)}\quad y + \Delta y = F(x) = \cos \left(x + (\sqrt{\eta}) \cdot \sqrt{x} + \left(\sqrt[3]{\xi}\right) \cdot \sqrt[3]{x^2}\right)$$

und wenn man $\varkappa$ statt $\sqrt{\eta}$ und $n \cdot \varkappa$ statt $\sqrt[3]{\xi}$ setzt, so bekommt man

$$\text{III)}\quad y + \Delta y = \varphi(x, \varkappa, n \cdot \varkappa) = \cos \left(x + \varkappa \cdot \sqrt{x} + n \cdot \varkappa \cdot \sqrt[3]{x^2}\right)$$

Daraus lässt sich eine mit cos x anfangende und nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln. Setzt man $\varkappa = 0$, so gibt sich wieder $\varphi(x) = \cos x$; setzt man aber $\varkappa = \sqrt{\eta}$ und $n = \frac{\sqrt[3]{\xi}}{\sqrt{\eta}}$, so geht $\varphi(x, \varkappa, n \cdot \varkappa)$ über in

$$F(x) = \cos\left(x + (\sqrt{\eta}) \cdot \sqrt[4]{x} + \left(\sqrt[3]{\xi}\right) \cdot \sqrt[3]{x^2}\right) = \cos\left(x + \sqrt[4]{\eta \cdot x} + \sqrt[3]{\xi \cdot x^2}\right)$$

Man beachte, dass man, weil die beiden Elemente η und ξ voneinander unabhängig sind, grade desshalb nicht behaupten kann, die höhere Dimension $\sqrt{\eta}$ sei gegen die niedrigere $\sqrt[3]{\xi}$ im Momente des Verschwindens.

Fünfzehntes Beispiel. Es sei $y = \varphi(x, w) = \sin(x + w)$ gegeben, und gehe über in

$$\text{I)}\quad y + \Delta y = F(x, w) = (\lg \text{nat}(x - w))^{\eta} \cdot \left(\cos \sqrt[4]{\xi}\right) \cdot \sin\left(x + w - \frac{x}{w} \cdot \sqrt[3]{\mu}\right)$$

wo die drei Elemente η, ξ, μ sowohl unter sich als auch von x und w unabhängig, und im Momente des Verschwindens befindlich sind, also bei jedem Werthe der nichtmutablen Veränderlichen x und w der Werth des $F(x, w)$ dem Werthe des $\varphi(x, w)$ nächstanliegt. Man setze $\varkappa$ statt η, $n \cdot \varkappa$ statt $\sqrt[4]{\xi}$ und $m \cdot \varkappa$ statt $\sqrt[3]{\mu}$; so formt sich $F(x, w)$ um in

$$\text{II)}\quad y + \Delta y = \varphi(x, w, \varkappa, n \cdot \varkappa, m \cdot \varkappa)$$
$$= (\lg \text{nat}(x - w))^{\varkappa} \cdot (\cos n \cdot \varkappa) \cdot \sin\left(x + w - \frac{x}{w} \cdot m \cdot \varkappa\right)$$

Daraus lässt sich eine mit $\sin(x + w)$ anfangende und nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln, etc. etc. Hier ist $n = \frac{\sqrt[4]{\xi}}{\eta}$ und $m = \frac{\sqrt[3]{\mu}}{\eta}$. Man beachte aber auch hier, dass man, weil die drei Elemente η, ξ, μ ganz unabhängig voneinander sind, grade desshalb nicht behaupten kann, die höhere Dimension η sei gegen jede der beiden niedrigeren $\sqrt[3]{\mu}$ und $\sqrt[4]{\xi}$ im Momente des Verschwindens, oder die höhere Dimension $\sqrt[3]{\mu}$ sei gegen die niedrigere $\sqrt[4]{\xi}$ im Momente des Verschwindens.

Sechszehntes Beispiel. Es sei $y = \varphi(x) = \cos x$ gegeben, und gehe über in

$$\text{I)}\quad y + \Delta y = F(x) = A^{\sqrt[3]{\eta}} \cdot \cos\left(x + x^2 \cdot \sqrt{\eta} - x^3 \cdot \sqrt[4]{\eta}\right)$$

wo das Element η von x unabhängig und im Momente des Verschwindens befindlich ist, also bei jedem Werthe des x der Werth des $F(x)$ dem Werthe des $\varphi(x)$ nächstanliegt. Die Radicale $\sqrt{\eta}$, $\sqrt[3]{\eta}$, $\sqrt[4]{\eta}$ haben alle nur eine und zwar ihre einfachste Bedeutung.

Man setze $\sqrt{\eta} = \sqrt[12]{\eta^6} = \varkappa^6$

Man setze $\sqrt[3]{\eta} = \sqrt[12]{\eta^4} = \varkappa^4$

Man setze $\sqrt[4]{\eta} = \sqrt[12]{\eta^3} = \varkappa^3$

so bekommt man

$$\text{II)}\quad y + \Delta y = \varphi(x, \varkappa) = A^{\varkappa^4} \cdot \cos(x + \varkappa^6 \cdot x^2 - \varkappa^3 \cdot x^3)$$

Hieraus lässt sich eine mit cos x anfangende und nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln; jedoch werden in dieser Reihe viele von den successiven Potenzen

$$\varkappa^1, \varkappa^2, \varkappa^3, \varkappa^4, \varkappa^5, \varkappa^6, \varkappa^7, \varkappa^8, \varkappa^9, \cdots\cdots$$

fehlen.

Siebzehntes Beispiel. Es sei $y = \varphi(x) = \cos x$ gegeben, und gehe über in

$$\text{I)}\quad y + \varDelta y = F(x) = A^{\sqrt[3]{\eta}} \cdot B^{\sqrt[4]{\xi}} \cdot \cos\left(x + W\eta + \overset{3}{W}\xi + x \cdot \overset{4}{W}\mu\right)$$

wo die drei Elemente η, ξ, μ sowohl unter sich als auch von x unabhängig, und im Momente des Verschwindens befindlich sind, also bei jedem Werthe des x der Werth der reellen Formen des F(x) dem Werthe des $\varphi(x)$ nächstanliegt.

Man setze $\sqrt[3]{\eta} = \eta^{\frac{2}{6}} = \varkappa^2$

Man setze $W\eta = (\sqrt{\eta}) \cdot W1 = \eta^{\frac{3}{6}} \cdot W1 = \varkappa^3 \cdot W1$

Man setze $\sqrt[4]{\xi} = \xi^{\frac{3}{12}} = n^3 \cdot \varkappa^3$

Man setze $\overset{3}{W}\xi = \left(\sqrt[3]{\xi}\right) \cdot \overset{3}{W}1 = \xi^{\frac{4}{12}} \cdot \overset{3}{W}1 = n^4 \cdot \varkappa^4 \cdot \overset{3}{W}1$

Man setze $\overset{4}{W}\mu = \left(\sqrt[4]{\mu}\right) \cdot \overset{4}{W}1 = m \cdot \varkappa \cdot \overset{4}{W}1$

so bekommt man

$$\text{II)}\quad y + \varDelta y = \varphi(x;\ \varkappa,\ n \cdot \varkappa,\ m \cdot \varkappa)$$

$$= A^{\varkappa^2} \cdot B^{n^3 \cdot \varkappa^3} \cdot \cos\left(x + \varkappa^3 \cdot W1 + n^4 \cdot \varkappa^4 \cdot \overset{3}{W}1 + m \cdot \varkappa \cdot \overset{4}{W}1\right)$$

Daraus lässt sich eine mit cos x anfangende und nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln; etc. etc. Hier ist $\varkappa = \sqrt[6]{\eta}$, $n = \dfrac{\sqrt[12]{\xi}}{\sqrt[6]{\eta}}$ und

$m = \dfrac{\sqrt[4]{\mu}}{\sqrt[6]{\eta}}$

Achtzehntes Beispiel. Es sei $y = \varphi(x) = \lg \operatorname{nat} x$ gegeben und gehe über in

$$\text{I)}\quad y + \varDelta y = F(x) = \lg \operatorname{nat}\left(x \cdot A^{\sin \eta} + \lg \operatorname{nat}(1 + \eta) + \sqrt[3]{\eta}\right)$$

wo das Element η von x ganz unabhängig und im Momente des Verschwindens befindlich ist, also bei jedem Werthe des x der Werth des F(x) dem Werthe des $\varphi(x)$ nächstanliegt. Man setze $\sqrt[3]{\eta} = \varkappa$, so bekommt man

$$\text{II)}\quad y + \varDelta y = \varphi(x, \varkappa) = \lg \operatorname{nat}\left(x \cdot A^{\sin(\varkappa^3)} + \lg \operatorname{nat}(1 + \varkappa^3) + \varkappa\right)$$

Daraus lässt sich eine mit lg nat x anfangende und nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln, etc. etc.

Neunzehntes Beispiel. Es sei $y = \varphi(x) = \lg \operatorname{nat}(ax)$ gegeben, und gehe über in

$$\text{I)}\quad y + \varDelta y = F(x) = \lg \operatorname{nat}\left(bx + \xi + \sqrt{\eta}\right)$$

Um hier eine mit lg nat (ax) anfangende Reihe entwickeln zu können, forme man Gleichung I zuerst um in

$$\text{II)}\quad y + \varDelta y = F(x) = \lg \operatorname{nat}\left(ax + (b - a) \cdot x + \xi + \sqrt{\eta}\right)$$

Wenn nun die Differenz (b — a) sowie die beiden Elemente ξ und η von x unabhängig und im Momente des Verschwindens befindlich sind; so ist es der Fall, dass bei jedem Werthe des x der Werth des F(x) dem Werthe des $\varphi(x)$ nächstanliegt. Man setze $\varkappa$ statt (b — a), $n \cdot \varkappa$ statt ξ und $m \cdot \varkappa$ statt $\sqrt{\eta}$; so geht II über in

$$\text{III)}\quad y + \varDelta y = \lg \operatorname{nat}\left(ax + \varkappa(1 + n + m)\right)$$

Hieraus lässt sich eine mit lg nat (ax) anfangende und nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln, etc. etc.

Zwanzigstes Beispiel. Man lasse ganz allgemein eine Function $\varphi(x \ldots\ldots w)$, von welcher man durchaus keine Eigenschaft kennt, in eine andere

$$\text{I)}\quad y + \Delta y = F(x \ldots\ldots w)$$

übergehen. Wenn man nun auch von dieser neuen Function nichts weiter weiss, als dass bei jedem Werthe der Veränderlichen x w der Werth des F(x w) dem Werthe des φ(x w) nächstanliegt; so kann man doch das Operationsmittel $\varkappa$ in F(x w) jedesmal so einführen, dass

1. sich eine mit φ(x w) anfangende und nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln lässt; und dass

2. die nach vollendeter Reihenentwickelung dem $\varkappa$ beizulegende specielle Bedeutung ein im Momente des Verschwindens befindlicher Werth ist.

Der Grund hiervon ist folgender: Die Eigenschaft „Es soll bei jedem Werthe der Veränderlichen x w der Werth des F(x w) dem Werthe des φ(x w) nächstanliegen" ist nur unter einer von folgenden zwei Bedingungen möglich:

α) entweder wenn die neue Function F(x w) gradezu so beschaffen ist, dass sie in eine Reihe entwickelt werden kann, welche mit φ(x w) anfängt, und nach lauter positiven Potenzen solcher Fortschreitungselemente aufsteigt, die von allen Veränderlichen x w unabhängig und im Momente des Verschwindens befindlich sind;

β) oder wenn die neue Function F(x w) noch so eingerichtet werden kann, dass sich hierauf eine Reihe, wie eben beschrieben, entwickeln lässt.

Erster Fall. Es sei die neue Function F(x w) gradezu so beschaffen, dass sich eine Reihe, wie eben beschrieben, entwickeln lässt.

A) Die neue Function F(x w) sei nur mit einem einzigen von den Veränderlichen x w unabhängigen und im Momente des Verschwindens befindlichen Elemente η versehen, so dass sich eine steigende Reihe von folgender Form

$$\text{I)}\quad F(x \ldots\ldots w) = \varphi(x \ldots\ldots w) + \eta^{p} \cdot P + \eta^{q} \cdot Q + \eta^{r} \cdot R + \cdots\cdots$$

entwickeln lässt. Hier sind die Exponenten p, q, r lauter positive Zahlen; denn nur unter dieser Bedingung ist bei jedem Werthe der Veränderlichen x w die Summe aller Glieder

$$\text{II)}\quad \eta^{p} \cdot P + \eta^{q} \cdot Q + \eta^{r} \cdot R + \cdots\cdots$$

im Momente des Verschwindens befindlich. Man unterscheide nun:

𝔄) Erkennt man, dass dieses Element η so in F(x w) enthalten ist, dass sich eine Reihe I ergeben wird, wo die positiven Exponenten p, q, r auch lauter ganze Zahlen sein werden; so kann man gradezu $\varkappa$ an die Stelle des η in F(x w) einsetzen, und die Reihenentwickelung nach $\varkappa$ ausführen.

𝔅) Erkennt man aber, dass dieses Element η so in F(x w) enthalten ist, dass sich eine Reihe I ergeben wird, wo die positiven Exponenten p, q, r nicht auch lauter ganze Zahlen sein werden; so muss man einen aus η gebildeten Ausdruck aufsuchen, welcher so beschaffen ist, dass, wenn man an dessen Stelle das $\varkappa$ substituirt, sich alsdann eine nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe ergibt. In den Beispielen der zweiten Abtheilung dieses §. sind dergleichen (schon vor der Reihenentwickelung nöthigen) Substitutionen mehrere vorgekommen, welche darin bestehen, dass man $\varkappa$ an die Stelle einer gebrochenen Potenz des η gesetzt hat. Es könnte aber auch der Fall eintreten, dass man, ehe die Reihenentwickelung vorgenommen werden darf, $\varkappa$ an die Stelle eines transcendenten Ausdruckes von η setzen muss.

B) Ist die neue Function F(x w) mit zwei sowohl untereinander als auch von x w unabhängigen und im Momente des Verschwindens befindlichen Elementen η und ξ versehen, so muss sich nothwendig eine steigende Reihe von folgender Form

$$\begin{aligned}\text{III)}\quad F(x \ldots w) = \varphi(x \ldots w) &+ \eta^{p} \cdot P + \eta^{q} \cdot Q + \eta^{r} \cdot R + \cdots\cdots \\ &+ \xi^{p} \cdot \mathfrak{P} + \xi^{q} \cdot \mathfrak{Q} + \xi^{r} \cdot \mathfrak{R} + \cdots\cdots \\ &+ \eta^{p'} \cdot \xi^{p'} \cdot \Pi + \eta^{q'} \cdot \xi^{q'} \cdot \Xi + \cdots\cdots\end{aligned}$$

entwickeln lassen. Hier sind die Exponenten p, 𝔭, p', 𝔭', q, 𝔮, q', 𝔮', ... lauter positive Zahlen; denn nur unter dieser Bedingung ist bei jedem Werthe der Veränderlichen x.... w der Werth der Gesammtmutation im Momente des Verschwindens befindlich. Man unterscheide nun:

𝔄) Erkennt man, dass die Elemente η und ξ so in F(x...... w) enthalten sind, dass sich eine Reihe III ergeben wird, wo die positiven Exponenten p, 𝔭, p', 𝔭', q, 𝔮, q', 𝔮', ... auch lauter ganze Zahlen sein werden; so kann man gradezu $\varkappa$ an die Stelle des η, und $n \cdot \varkappa$ an die Stelle des ξ in F(x.. w) einsetzen, und die Reihenentwickelung nach $\varkappa$ ausführen.

𝔅) Erkennt man aber, dass die Elemente η und ξ so in F(x...... w) enthalten sind, dass sich eine Reihe III ergeben wird, wo die positiven Exponenten p, 𝔭, p', 𝔭', q, 𝔮, q', 𝔮', ... nicht lauter ganze Zahlen sein werden; so muss man, wie bei dem (unter A behandelten) einfacheren Falle, untersuchen:
 1. ob man $\varkappa$ an die Stelle des η setzen darf, oder ob man $\varkappa$ an die Stelle eines aus η gebildeten Ausdruckes setzen muss; und
 2. ob man $n \cdot \varkappa$ an die Stelle des ξ setzen darf, oder ob man $n \cdot \varkappa$ an die Stelle eines aus ξ gebildeten Ausdruckes setzen muss.

C) Die bisherige Betrachtung lässt sich ohneweiteres auf die Fälle ausdehnen, wo in F(x..... w) mehr als zwei Elemente vorkommen, welche sowohl untereinander als auch von allen Veränderlichen x...... w unabhängig und im Momente des Verschwindens befindlich sind.

D) Wenn in F(x..... w) zwei von den Veränderlichen x...... w unabhängige und im Momente des Verschwindens befindliche Elemente η und ξ vorkommen, wo ξ von η abhängig ist; so versteht sich von selbst, dass man vorerst das abhängige Element eliminirt, und dann erst $\varkappa$ an die Stelle des η oder an die Stelle eines aus η gebildeten Ausdruckes setzt, um eine nach positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln zu können.
Und so fort.

Zweiter Fall. Wenn die neue Function F(x.... w) noch so eingerichtet werden muss, dass sie dann in eine Reihe entwickelt werden kann, welche mit φ(x...w) anfängt, und nach lauter positiven Potenzen solcher Fortschreitungselemente aufsteigt, die von allen Veränderlichen x.... w unabhängig und im Momente des Verschwindens befindlich sind; so können, sobald einmal diese Einrichtung getroffen ist, keine andern Eigenthümlichkeiten mehr möglich sein, als solche, die bereits (in dem ersten Falle dieses Beispiels) erledigt sind. (Man sehe das neunzehnte Beispiel dieses §. Auch die §§. 49, 50, 51 und 52.)

§. 59. Es sei z = φ(x...... w), d. h. eine Function von irgend einer Anzahl nichtmutabler Veränderlicher, und gehe über in F(x...... w), d. h. in eine andere Function von den nemlichen nichtmutablen Veränderlichen; und φ(x...... w, $\varkappa$) bezeichne den Zustand, wo die neue Function F(x..... w) mit $\varkappa$ versehen ist.

Nun gelten folgende drei Hauptsätze:

Erstens. Aus dem Differentialcalcul ist bekannt, dass

$$\frac{d^n_\varkappa\left(\frac{d^m_\varkappa\varphi(x\ldots\ldots w,\varkappa)}{d\varkappa^m}\right)}{d\varkappa^n} = \frac{d^{m+n}_\varkappa\varphi(x\ldots\ldots w,\varkappa)}{d\varkappa^{m+n}}$$

Setzt man beiderseits $\varkappa = 0$, so gibt sich daraus

$$\text{I)}\quad \delta^n\,(\delta^m\varphi(x\ldots w)) = \delta^{m+n}\,\varphi(x\ldots w)$$

oder, was das nemliche ist

$$\text{II)}\quad \delta^n(\delta^m z) = \delta^{m+n} z$$

Diese Gleichung sagt: „Es ist einerlei, ob man zuerst m-mal und hierauf noch n-mal, „oder ob man gleichzeitig (m + n) mal mutirt.“

Zweitens. Ferner muss, wie gleichfalls aus dem Differentialcalcul bekannt ist, stattfinden:

$$\frac{d_\varkappa^m\left(\dfrac{d_x^n\varphi(x,\ y\ \ldots\ w,\ \varkappa)}{dx^n}\right)}{d\varkappa^m} = \frac{d_x^n\left(\dfrac{d_\varkappa^m\varphi(x,\ y\ \ldots\ w,\ \varkappa)}{d\varkappa^m}\right)}{dx^n}$$

und

$$\frac{d_\varkappa^m\left(\dfrac{d_x^n\ d_y^p\varphi(x,\ y\ \ldots\ w,\ \varkappa)}{dx^n\cdot dy^p}\right)}{d\varkappa^m} = \frac{d_x^n\ d_y^p\left(\dfrac{d_\varkappa^m\varphi(x,\ y\ \ldots\ w,\ \varkappa)}{d\varkappa^m}\right)}{dx^n\cdot dy^p}$$

und so fort.

Setzt man beiderseits $\varkappa = 0$, so gibt sich

$$\text{III)}\quad \delta^m\left(\frac{d_x^n\varphi(x,\ y\ \ldots\ w)}{dx^n}\right) = \frac{d_x^n\ \delta^m\varphi(x.\ y\ \ldots\ w)}{dx^n}$$

und

$$\text{IV)}\quad \delta^m\left(\frac{d_x^n\ d_y^p\varphi(x,\ y\ \ldots\ w)}{dx^n\cdot dy^p}\right) = \frac{d_x^n\ d_y^p\ \delta^m\varphi(x,\ y\ \ldots\ w)}{dx^n\cdot dy^p}$$

und so fort.

Statt III und IV kann man auch setzen

$$\text{V)}\quad \delta^m\left(\frac{d_x^n\ z}{dx^n}\right) = \frac{d_x^n\ \delta^m z}{dx^n}$$

$$\text{VI)}\quad \delta^m\left(\frac{d_x^n\ d_y^p\ z}{dx^n\,.\,dy^p}\right) = \frac{d_x^n\ d_y^p\ \delta^m z}{dx^n\cdot dy^p}$$

und so fort.

Diese Gleichungen sagen: „Es ist einerlei, ob man zuerst differentiirt und dann „mutirt, oder ob man zuerst mutirt und dann differentiirt."

Die (in diesem §. aufgestellten) zwei Sätze gelten, wenn die mutable Function eine ganz unbestimmte Anzahl nichtmutabler Veränderlicher enthält; sie gelten also auch in dem einfachen Falle, wo die mutable Function eine bestimmte Anzahl nichtmutabler Veränderlicher, z. B. nur einen einzigen, enthält.

Drittens. Wenn die Elemente a, x, b, y, c, w....... alle von $\varkappa$ unabhängig sind, und wenn wiederum $\varkappa$ von allen diesen Elementen a, x, b, y, c, w, ... unabhängig ist; so muss (man sehe §. 7 und 8) stattfinden:

$$\frac{d_\varkappa^m\left(\overset{(n)}{\int_a^x}\varphi(x,\ \varkappa)\cdot dx^n\right)}{d\varkappa^m} = \overset{(n)}{\int_a^x}\frac{d_\varkappa^m\ \varphi(x,\ \varkappa)}{d\varkappa^m}\cdot dx^n$$

$$\frac{d_\varkappa^m\left(\overset{(n)}{\int_a^x}\overset{(p)}{\int_b^y}\varphi(x,\ y,\ \varkappa)\cdot dy^p\cdot dx^n\right)}{d\varkappa^m} = \overset{(n)}{\int_a^x}\overset{(p)}{\int_b^y}\frac{d_\varkappa^m\varphi(x,\ y,\ \varkappa)}{d\varkappa^m}\cdot dy^p\cdot dx^n$$

und so fort.

Setzt man beiderseits $\varkappa = 0$, so gibt sich

$$\text{VII)}\quad \delta^m\overset{(n)}{\int_a^x}\varphi(x)\cdot dx^n = \overset{(n)}{\int_a^x}\delta^m\varphi(x)\cdot dx^n$$

$$\text{VIII)}\quad \delta^m \overset{(n)}{\int_a^x} \overset{(p)}{\int_b^y} \varphi(x, y) \cdot dy^p \cdot dx^n = \overset{(n)}{\int_a^x} \overset{(p)}{\int_b^y} \delta^m \varphi(x, y) \cdot dy^p \cdot dx^n$$

und so fort.

Statt VII und VIII kann man auch setzen:

$$\text{IX)}\quad \delta^m \overset{(n)}{\int_a^x} z \cdot dx^n = \overset{(n)}{\int_a^x} \delta^m z \cdot dx^n$$

$$\text{X)}\quad \delta^m \overset{(n)}{\int_a^x} \overset{(p)}{\int_b^y} z \cdot dy^p \cdot dx^n = \overset{(n)}{\int_a^x} \overset{(p)}{\int_b^y} \delta^m z \cdot dy^p \cdot dx^n$$

und so fort.

Diese Gleichungen sagen; „Es ist einerlei, ob man zuerst integrirt und dann mu-„tirt, oder ob man zuerst mutirt und dann integrirt."

Bei diesen drei Sätzen erinnere man sich der (in §. 57 gemachten) Bemerkung, dass das Mutiren weiter nichts, als ein einfaches Differentiiren nach $\varkappa$ ist.

§. 60. Wenn irgend eine bestimmt gegebene Function $y = \varphi(x \ldots\ldots w)$ der nichtmutablen Veränderlichen $x \ldots\ldots w$ in eine andere schon so, wie bisher festgesetzt, mit $\varkappa$ versehene neue Function $\varphi(x \ldots\ldots w, \varkappa)$ übergeht, aus welcher also bei $\varkappa = 0$ sich die ursprüngliche Function $\varphi(x \ldots\ldots w)$ wieder ergibt; wenn aber die Form einer dazugehörigen von $\varkappa$ freien neuen Function nicht vorgeschrieben ist; so kann man wohl aus $\varphi(x \ldots\ldots w, \varkappa)$ die Reihe

$$\text{I)}\quad \varphi(x \ldots\ldots w, \varkappa) = \varphi(x \ldots\ldots w) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x \ldots\ldots w) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x \ldots\ldots w) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x \ldots\ldots w) + \ldots\ldots\ldots$$

entwickeln, wo jeder der Coefficienten $\delta\varphi(x \ldots . w)$, $\delta^2\varphi(x \ldots . w)$, $\delta^3\varphi(x \ldots . w)$, etc. vollkommen bestimmt ist. Dagegen kann man sich keine Gleichung

$$\text{II)}\quad \varphi(x \ldots . w, \varkappa) = F(x \ldots . w)$$

bilden, also auch eine specielle Bedeutung des $\varkappa$ nicht ermitteln, wenn nicht irgend eine andere Bedingung vorgeschrieben ist oder aufgesucht werden kann, welcher dasselbe genügen soll. Eine solche Bedingung wäre z. B. die, welche vorschreibt, dass der Werth des $\varkappa$ entweder als positiv oder als negativ im Momente des Verschwindens befindlich sei.

Wenn aber die Function $\varphi(x \ldots . w)$ der nichtmutablen Veränderlichen $x \ldots . w$ in jede beliebige Function $F(x \ldots . w)$ genau derselben Veränderlichen übergehen soll; so hat man, wenn man in die neue Function $F(x \ldots\ldots w)$ das Element $\varkappa$ so, wie man bisher festsetzte, eingeführt denkt, unter $\varphi(x \ldots\ldots w, \varkappa)$ zwar immer noch eine beliebige aber dennoch so geeigenschaftete Zusammensetzung zu denken, dass aus ihr eine mit der Function $\varphi(x \ldots . w)$ anfangende und nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe, d. h. eine Reihe von folgender Form

$$\text{III)}\quad \varphi(x \ldots . w, \varkappa) = \varphi(x \ldots . w) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x \ldots . w) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x \ldots . w) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x \ldots . w) + \ldots\ldots\ldots$$

entwickelt werden kann. Weil aber $F(x \ldots . w)$ jede beliebige Function von $x \ldots . w$ vorstellt; so ist, es mag $\varphi(x \ldots . w)$ eine gegebene oder nichtgegebene Function von $x \ldots . w$ sein, die Gesammtmutation

$$\text{IV)}\quad \Delta y = F(x \ldots . w) - \varphi(x \ldots . w)$$

gleichfalls noch eine ganz beliebige Function von $x \ldots . w$; es muss also auch die mit $\varkappa$ versehene Gesammtmutation, d. h. die Reihe

$$\text{V)}\quad \Delta y = \varkappa \cdot \delta\varphi(x \ldots . w) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x \ldots . w) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x \ldots . w)$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

eine ganz beliebige Function der Veränderlichen $x \ldots . w$ sein. Dieses ist aber nur der Fall, wenn man

A) dem $\varkappa$ jede beliebige specielle Bedeutung beilegen, und

B) sich unter jedem der Coefficienten $\delta\varphi(x \ldots . w)$, $\delta^2\varphi(x \ldots . w)$, $\delta^3\varphi(x \ldots . w)$, etc. etc. eine für sich beliebige Function aller der Veränderlichen $x \ldots . w$ denken kann und wenn

C) die für Δy hergestellte Reihe V eine unaufhörliche ist; denn

1. da man keine Gleichung

$$\text{VI)}\quad \varphi(x \ldots . w, \varkappa) = F(x \ldots . w)$$

hat, aus der sich für $\varkappa$ eine specielle Bedeutung ermitteln lässt, so ist diese zunächst unbestimmt; und würde man dem $\varkappa$ irgend eine bestimmte Bedeutung h nach Belieben beilegen, so dass die Reihe V überginge in

$$\text{VII)}\quad \Delta y = h \cdot \delta\varphi(x \ldots . w) + \frac{h^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x \ldots . w) + \frac{h^3}{1.2.3}\delta^3\varphi(x \ldots . w)$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

so kann, wenn gleich jeder der Coefficienten $\delta\varphi(x \ldots . w)$, $\delta^2\varphi(x \ldots . w)$, etc. eine für sich beliebige Function ist, durch die Reihe VII doch nicht jede beliebige Mutation dargestellt sein, eben weil noch alle jene Fälle vorhanden sind, wo dem $\varkappa$ eine von h verschiedene Bedeutung beigelegt werden kann. Würde man aber

2. die Bedeutung des $\varkappa$ willkürlich lassen, dagegen unter $\delta\varphi(x \ldots w)$, $\delta^2\varphi(x \ldots w)$, $\delta^3\varphi(x \ldots . w)$, etc. sich bezüglich die bestimmten Functionen $f'(x \ldots . w)$, $f''(x \ldots . w)$, $f'''(x \ldots . w)$ etc. denken, so dass die Reihe V überginge in

$$\text{VIII)}\quad \Delta y = \varkappa \cdot f'(x \ldots . w) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot f''(x \ldots . w) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot f'''(x \ldots . w)$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

so kann, wenn gleich dem $\varkappa$ jede beliebige Bedeutung beigelegt werden darf, auch durch die Reihe VIII nicht jede beliebige Mutation dargestellt sein, eben weil noch alle jene Fälle vorhanden sind, die sich ergeben, wenn jeder der Ausdrücke $\delta\varphi(x \ldots . w)$, $\delta^2\varphi(x \ldots . w)$, $\delta^3\varphi(x \ldots . w)$, etc. eine für sich beliebige Function ist. Sowie nun die mittelst des Maclaurin'schen Satzes auszuführende Entwickelung einer ganz beliebigen Mutation eine bloss fingirte Operation ist; ebenso ist hierbei auch die Beziehung, in welcher die für die Coefficienten gewählten Bezeichnungen $\delta\varphi(x \ldots . w)$, $\delta^2\varphi(x \ldots . w)$, $\delta^3\varphi(x \ldots . w)$, etc. zusammenstehen, eine bloss fingirte, jeder ist ja für sich willkürlich. Endlich muss eine ganz willkürliche Mutation

3. aus einer Reihe mit unendlichvielen Gliedern bestehen; denn die unaufhörliche Reihe ist der allgemeine Begriff, und fasst (siehe §. 21) die geschlossene als den besonderen in sich.

Ganz vorzügliche Berücksichtigung verdient der besondere Fall, in welchem eine Function $\varphi(x \ldots\ldots . w)$ in alle diejenigen möglichen Functionen $F(x \ldots . . w)$ übergehen soll, wo bei jedem Werthe der nichtmutablen Veränderlichen der Werth des $F(x \ldots\ldots w)$ dem Werthe des $\varphi(x \ldots . . w)$ nächstanliegt. Hier kann man

1) für die Mutation nicht mehr alle beliebigen Functionen nehmen, sondern man muss aus allen diesen jene unendlichvielen herauswählen, welche bei jedem Werthe der nichtmutablen Veränderlichen $x \ldots . . w$ im Momente des Verschwindens befindlich sind. Auch muss

2) die Mutation aus einer unaufhörlichen Reihe bestehen; denn die unaufhörliche Reihe ist der allgemeine Begriff, und fasst, wie kurz vorher schon einmal bemerkt wurde, die geschlossene als den besonderen in sich. Soll aber

3) die Summe aller unendlichvielen Glieder einer unaufhörlichen Reihe im Momente des Verschwindens befindlich sein; so muss, wie schon früher (z. B. im §. 53

und §. 58) auseinandergesetzt worden, gegen jedes beliebige Glied der Reihe die Summe aller unendlichvielen nachfolgenden Glieder im Momente des Verschwindens befindlich sein.

Alle diese Eigenschaften sind den hier in Rede stehenden Mutationen bei jedem Werthe der nichtmutablen Veränderlichen x w gesichert, wenn man die unaufhörliche Reihe

$$\text{IX)}\quad \Delta y = \varkappa \cdot \delta\varphi(x\ .\ .\ .\ .\ .\ w) + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2\varphi(x\ .\ .\ .\ .\ .\ w) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3\varphi(x\ .\ .\ .\ .\ w)$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

nimmt, wo jeder der Ausdrücke $\delta\varphi(x\ .\ .\ .\ .\ w)$, $\delta^2\varphi(x\ .\ .\ .\ .\ w)$, etc. eine für sich beliebige Function vorstellt, und zugleich die specielle Bedeutung des $\varkappa$ ein der Null nächstanliegender nach Belieben entweder positiver oder negativer Werth ist (man vergleiche die Beispiele der zweiten Abtheilung des §. 58; und ausserdem noch §. 49, 50, 51, 52).

§. 61. Mit dem, was bis jetzt über die Theorie der unmittelbaren Mutationen vorgetragen worden, ist die Grundlage des gesammten Calculs, welcher hier vorliegt, gegeben. Folgende drei Bemerkungen scheinen noch beachtenswerth.

Erste Bemerkung. Nach Euler*) und Lagrange**) ist unter einer unmittelbar mutirten Function $\varphi(x)$ eine Function $\varphi(x, \varkappa)$ zu verstehen, welche bei $\varkappa = 0$ sich wieder auf $\varphi(x)$ zurückzieht. Dagegen lässt sich einwenden:

1) Dieses Verfahren geht, während doch offenbar das $\varkappa$ nur als Operationsmittel behandelt wird, dennoch so zu Werke, als wenn es gar nicht nöthig wäre, sich auch nur in der Idee eine neue von $\varkappa$ freie Function $F(x)$ vorzustellen.

2) Wenn der Function $\varphi(x, \varkappa)$ bloss beigelegt wird, dass sie bei $\varkappa = 0$ sich auf $\varphi(x)$ zurückziehe; so folgt daraus im Allgemeinen die steigende Reihe

$$\varphi(x, \varkappa) = \varphi(x) + \varkappa^p \cdot P + \varkappa^q \cdot Q + \varkappa^r \cdot R +\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

von welcher Reihe weiter nichts verlangt wird, als dass die Exponenten p, q, r positive (seien es nun ganze oder gebrochene) Zahlen seien. Dessen ungeachtet wenden beide (Euler und Lagrange) ohneweiters den Maclaurin'schen Satz an, als wenn sich $\varphi(x, \varkappa)$ in eine mit $\varphi(x)$ anfangende und nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln lassen müsse, und erwähnen nicht im Geringsten, dass es auch Zusammensetzungen $\varphi(x, \varkappa)$ gibt, die sich nicht nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ entwickeln lassen. Ganz anderst verhält sich die Sache, wenn man schon von vorneherein verlangt, das $\varkappa$ nur so einzuführen, dass sich aus $\varphi(x, \varkappa)$ eine mit $\varphi(x)$ anfangende und nach lauter ganzen positiven Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe ergeben muss; denn weiss man dieses, so bedarf es keines Beweises, dass der Maclaurin'sche Satz angewendet werden kann, eine solche Reihe lässt sich immer durch den Maclaurinschen Satz entwickeln. (Man vergleiche §. 53.)

Zweite Bemerkung. Alle Aufgaben, welche sich durch die bestimmte Reihenform

$$\varphi(x) + \varkappa \cdot \mathfrak{P} + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\mathfrak{Q} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\mathfrak{R} +\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

auflösen lassen, lassen sich allerdings auch durch die unbestimmte Reihenform

$$\varphi(x) + \varkappa^p \cdot P + \varkappa^q \cdot Q + \varkappa^r \cdot R +\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

wo p, q, r, etc. noch durchaus unbestimmte (ganze oder gebrochene) Zahlen sind, auflösen. Allein sowie man schon bei einfachen Aufgaben sich durch diese allgemeine Reihenform nur unnöthige Weitläufigkeiten aufbürdet, ebenso wird man bei

*) Novi commentarii Acad. Petrop. T. XVI. pag 35. In der von Salomon besorgten Uebersetzung der Eulers'chen Integralrechnung. Bd. IV. §. 5. Seite 552 und 553.

**) Leçons sur le Calcul des fonctions. 1806. Leçon XXII. In der von Crelle besorgten Uebersetzung der Lagrange'schen Werke. 1823. Bd. II. Seite 866.

zusammengesetzten Aufgaben sich in Schwierigkeiten verwickeln, deren Beseitigung oft sehr ausgedehnte und nutzlose Nebenuntersuchungen verursacht, von denen keine einzige nöthig ist, wenn man die bestimmte, d. h. die nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihenform anwendet. (Man vergl. den zweiten theoretischen Nachtrag.)

Dritte Bemerkung. Es gibt Lehrer und Schriftsteller, welche sich begnügen, auch in den Fällen, wo eine Function $\varphi(x \ldots . w)$ eine ganz allgemeine (d. h. noch ganz unbestimmte) unmittelbare Mutation erleiden soll, bloss die allereinfachste geschlossene Reihenform

$$\varphi(x \ldots . w) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x \ldots . w)$$

zu setzen. Dass aber dieses ein Irrthum ist, ist nicht allein aus allem Vorhergehenden schon hinlänglich klar, sondern der §. 110 wird noch einige allgemeine Fälle aufzählen, aus denen man erkennt, wie ein solches Verfahren durch eine Menge Ungereimtheiten und Widersprüche von selbst bestraft wird.

bb) Mittelbare reine Mutationen.

§. 62. Eine Function wird (nach §. 47) mittelbar mutirt, wenn eine andere Function, von welcher sie abhangt, mutirt wird, oder wenn andere Functionen, von welchen sie abhangt, mutirt werden; und sie wird mittelbar rein mutirt, wenn dabei die nichtmutablen Veränderlichen keine Werthänderung erleiden.

Ist nun U ein auf irgend eine aber ganz bestimmte Weise aus den Elementen $y, x \ldots . w$ gebildeter Ausdruck, wo y selbst wieder eine Function aller der Elemente $x \ldots . w$ ist; und erleidet y eine unmittelbare Mutation, d. h. geht y über in die Reihe

$$\text{I)} \quad y_\varkappa \text{ oder } y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdots \cdots$$

so erleidet U eine mittelbare Mutation. Nun weiss man aus dem Differentialcalcul, dass, wenn das erste Glied y der Reihe I eine noch ganz allgemeine Bedeutung hat, sich auch für die Mutation des U eine nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe ergibt, so dass man

$$\text{II)} \quad U + \Delta U = U + \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U + \cdots \cdots$$

bekommt. Das Verfahren, wodurch diese Reihe II direct hergestellt wird, ist der Maclaurin'sche Lehrsatz. Wenn aber das erste Glied y der Reihe I eine bestimmte Bedeutung hat, d. h. eine bestimmte Function von $x \ldots . w$ ist; so muss sich für ΔU nicht nothwendig die Reihenform II ergeben, sondern es können auch Glieder vorkommen, wo der Exponent des $\varkappa$ keine positive ganze Zahl ist. Solche Fälle zeigen sich, wie gleichfalls aus dem Differentialcalcul bekannt ist, dadurch an, dass ein Glied, oder dass mehrere Glieder, oder dass alle Glieder der durch den Maclaurin'schen Satz hergestellten Reihe Null in den Nenner bekommen; aber alle Glieder, die dem, welches zuerst Null in den Nenner bekommt, vorangehen, sind noch richtig, und erst von hier an muss die Reihe eine andere Form annehmen. Eine solche Reihe muss man jedesmal nach den Eigenthümlichkeiten des gerade vorliegenden speciellen Falles auf directem Wege entwickeln (man sehe den Anhang zu §. 73, wo sich Beispiele befinden, welche hieher gehören).

Somit ergibt sich ganz von selbst folgende Regel: Man entwickle jedesmal die Reihe II unter der Voraussetzung, dass das erste Glied y der Reihe I noch ganz allgemein sei, und sehe dann zu, ob ein mit dem mutablen Elemente y versehener Ausdruck in den Nenner kommen kann. Ist dieses möglich, so setze man die Reihe so weit fort, bis man überzeugt ist, dass kein späteres Glied mehr in den Nenner einen das mutable Element y enthaltenden Ausdruck bekommen kann, welcher nicht schon in dem Nenner eines bereits hergestellten Gliedes vorkommt. Hierauf kann man diese Nenner alle zu Null werden lassen, und so für das mutable Element y schon im Voraus alle jene bestimmten Functionen kennen lernen, bei welchen die Mutation des U nicht die Form der Reihe II behält.

Da man nun hieraus erkennt, dass die Anzahl der für y möglichen Functionen, bei denen die hiesige durch den Maclaurin'schen Satz entwickelte mittelbare Mutation Null in den Nenner irgend eines Gliedes bekommen, also die Form der Reihe II

nicht stattfinden kann, jedesmal eine angebbare geschlossene Anzahl ist, während die Anzahl der für y möglichen Functionen, bei denen die Maclaurin'sche Reihe ihre Giltigkeit behält, eine unendlichgrosse ist; so sind die Fälle, wo die hiesige mittelbare Mutation nicht eine nach lauter positiven ganzen Potenzen aufsteigende Reihe ist, nur Ausnahmsfälle.

§. 63. Ist U ein auf irgend eine aber ganz bestimmte Weise aus den Elementen y, z, x w gebildeter Ausdruck, wo y und z selbst wieder Functionen der Elemente x w sind; und erleiden y und z unmittelbare Mutationen, d. h. gehen sie bezüglich in die Reihen

$$\text{I)}\quad y_\varkappa \text{ oder } y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und

$$\text{II)}\quad z_\varkappa \text{ oder } z + \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 z + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

über, so erleidet U eine mittelbare Mutation. Wenn nun die ersten Glieder y und z der Reihen I und II noch ganz allgemeine Bedeutung haben, so ergibt sich auch hier für die Mutation des U eine nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe

$$\text{III)}\quad U + \Delta U = U + \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Wenn aber die ersten Glieder y und z der Reihen I und II bestimmte Bedeutung haben, d. h. bestimmte Functionen von x w sind, so muss sich für ΔU nicht nothwendig die Reihenform III ergeben, sondern es können auch Glieder vorkommen, wo der Exponent des $\varkappa$ keine positive ganze Zahl ist. Man wird also auch hier verfahren, wie schon im vorigen §. vorgeschrieben ist, d. h. man wird auch hier mittelst des Maclaurin'schen Satzes die Reihe III unter der Voraussetzung entwickeln, als wenn die ersten Glieder y und z der Reihen I und II noch ganz allgemein wären; dabei wird man zusehen, ob die mutablen Elemente y und z in den Nenner kommen können; und die Reihe wird man so weit fortsetzen, bis man überzeugt ist, dass kein späteres Glied mehr in den Nenner einen Ausdruck bekommen kann, welcher nicht schon in dem Nenner eines bereits hergestellten Gliedes vorkommt. Man kann also auch hier schon im Voraus alle jene Fälle kennen lernen, bei welchen die Mutation des U nicht die Form der Reihe III behält (man sehe den Anhang zu §. 73, wo sich Beispiele befinden, welche hieher gehören).

Somit erkennt man abermals, dass die Fälle, wo eine mittelbare Mutation nicht eine nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe ist, nur Ausnahmsfälle sind. Eine solche ausnahmsweise Reihenform muss man aber jedesmal nach den Eigenthümlichkeiten des grade vorliegenden speciellen Falles entwickeln.

Es ist nun nicht mehr nöthig, diese Betrachtung auf Ausdrücke auszudehnen, in welchen mehr als zwei mutable Elemente enthalten sind.

Da in der allgemeinen Theorie von jeder bestimmten Zusammensetzungsweise der unmittelbar mutablen Functionen abstrahirt werden muss; so kann die allgemeine Theorie auch weiter nichts thun, als die allgemeine Form der mittelbaren Mutationen herstellen, mit der Ermahnung, in der Anwendung jedesmal darauf zu achten, ob und wann Ausnahmsfälle stattfinden.

Wie schon bei den unmittelbaren reinen Mutationen (siehe §. 57) geschehen ist, so wird auch hier die Reihe

$$U + \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

sehr oft durch $U_\varkappa$ dargestellt werden, insofern man $U_\varkappa$ als Function des einzigen Veränderlichen $\varkappa$ ansieht. In der Reihe

$$\Delta U = \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

werden alle mit $\varkappa$ behafteten Glieder zusammen oder das ihrer Summe gleiche ΔU die (mittelbare reine) Gesammtmutation genannt; die einzelnen Glieder $\varkappa \cdot \delta U$, $\frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U$,

$\frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U$, etc. nennt man (mittelbare reine) Mutationstheile und zwar bezüglich ersten, zweiten, dritten, etc.; die Coefficienten δU, $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc. nennt man (mittelbare reine) Mutationscoefficienten, und zwar bezüglich ersten, zweiten, dritten, etc.

§. 64. Es sei $U = \psi(x \ldots\ldots w, y)$ ein auf bestimmte Weise aus den Elementen $x \ldots\ldots w, y$ gebildeter Ausdruck, welcher nur das einzige unmittelbar mutable Element y enthält; und y sei eine Function der nichtmutablen Veränderlichen $x \ldots w$. Wenn nun y in die Reihe

$$\text{I)}\quad y_\varkappa \text{ oder } y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdots\cdots\cdots$$

übergeht, wo alle die Coefficienten δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. wegen der Allgemeinheit als Functionen aller der nichtmutablen Veränderlichen $x \ldots\ldots w$ betrachtet werden mögen; so geht U über in $U_\varkappa = \psi(x \ldots\ldots w, y_\varkappa)$. Diese neue Function kann man bekanntlich, wenn das erste Glied y der Reihe I noch ganz allgemein ist, mittelst des Maclaurin'schen Satzes in eine nach lauter ganzen positiven Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe verwandeln, so dass man hat

$$\text{II)}\quad U_\varkappa = U + \varkappa \cdot \left(\frac{dU_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0 + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d^2 U_\varkappa}{d\varkappa^2}\right)_0 + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \left(\frac{d^3 U_\varkappa}{d\varkappa^3}\right)_0 + \cdots\cdots\cdots$$

oder

$$\text{III)}\quad U_\varkappa = U + \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U + \cdots\cdots$$

Es sind nun noch die Coefficienten δU, $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc. zu bestimmen. Wenn man $y_\varkappa$ nur als Function des einzigen $\varkappa$ betrachtet, so bekommt man der Reihe nach

$$\text{IV)}\quad y_\varkappa = y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdots\cdots$$

$$\text{V)}\quad \frac{dy_\varkappa}{d\varkappa} = \delta y + \varkappa \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^3 y + \cdots\cdots$$

$$\text{VI)}\quad \frac{d^2 y_\varkappa}{d\varkappa^2} = \delta^2 y + \varkappa \cdot \delta^3 y + \cdots\cdots$$

$$\text{VII)}\quad \frac{d^3 y_\varkappa}{d\varkappa^3} = \delta^3 y + \cdots\cdots$$

etc. etc.

Nun ist $U_\varkappa$ eine Function von $y_\varkappa$, und $y_\varkappa$ ist eine Function von $\varkappa$; also ist $U_\varkappa$ eine mittelbare Function von $\varkappa$. Man bekommt daher (nach §. 1—4)

$$1)\quad U_\varkappa = \psi(x \ldots\ldots w, y_\varkappa)$$

$$2)\quad \frac{dU_\varkappa}{d\varkappa} = \frac{d_y U}{dy} \cdot \frac{dy_\varkappa}{d\varkappa}$$

$$3)\quad \frac{d^2 U_\varkappa}{d\varkappa^2} = \frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa}\right)^2 + \frac{d_y U}{dy} \cdot \frac{d^2 y_\varkappa}{d\varkappa^2}$$

$$4)\quad \frac{d^3 U_\varkappa}{d\varkappa^3} = \frac{d_y^3 U}{dy^3} \cdot \left(\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa}\right)^3 + 3 \cdot \frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \frac{dy_\varkappa}{d\varkappa} \cdot \frac{d^2 y_\varkappa}{d\varkappa^2} + \frac{d_y U}{dy} \cdot \frac{d^3 y_\varkappa}{d\varkappa^3}$$

etc. etc.

Bei $\varkappa = 0$ ziehen die Gleichungen IV, V, VI, VII, etc. sich zurück auf $(y_\varkappa)_0 = y$, $\left(\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0 = \delta y$, $\left(\frac{d^2 y_\varkappa}{d\varkappa^2}\right)_0 = \delta^2 y$, $\left(\frac{d^3 y_\varkappa}{d\varkappa^3}\right)_0 = \delta^3 y$, etc. Aus den Gleichungen 1), 2), 3), 4), etc. bekommt man also

$$(U_\varkappa)_0 = U = \psi(x \ldots\ldots w, y)$$

$$\left(\frac{dU_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0 = \delta U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y$$

$$\left(\frac{d^2U_\varkappa}{d\varkappa^2}\right)_0 = \delta^2U = \frac{d_y^2U}{dy^2}\cdot\delta y^2 + \frac{d_yU}{dy}\cdot\delta^2 y$$

$$\left(\frac{d^3U_\varkappa}{d\varkappa^3}\right)_0 = \delta^3U = \frac{d_y^3U}{dy^3}\cdot\delta y^3 + 3\cdot\frac{d_y^2U}{dy^2}\cdot\delta y\cdot\delta^2 y + \frac{d_yU}{dy}\cdot\delta^3 y$$

etc. etc.

Aus dem hier angewandten Verfahren ergibt sich nun folgende Regel:

„Man differentiire $U = \psi(x \ldots\ldots w, y)$ nach y grade so, wie wenn die Differen-„tiale von y selbst wieder veränderlich sind, setze aber dann statt dy, d^2y, d^3y, etc. „bezüglich δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc."

Da nun $\varDelta U = \varkappa\cdot\delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3U \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ ist, so bekommt man die mittelbare Gesammtmutation $\varDelta U$, wenn man die oben für δU, δ^2U, δ^3U, etc. gefundenen Ausdrücke substituirt.

Unter den hierher gehörigen speciellen Fällen beachte man besonders den, wo die unmittelbare Gesammtmutation des y bloss $\varkappa\cdot\delta y$ ist, wo also von den Coefficienten $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. jeder für sich selbst Null, und $\varDelta y = \varkappa\cdot\delta y$ ist.

Wäre bloss $U = \psi(y)$ gegeben, so würde das Verfahren ganz dasselbe bleiben, wie bisher, da die nichtmutablen Elemente ohnehin während des Mutirens als constant behandelt werden müssen.

Wie man nach ausgeführter Reihenentwickelung die specielle Bedeutung des $\varkappa$ ermittelt, ist schon (in §§. 49—55, besonders in §. 56) auseinandergesetzt.

§. 65. Es sei $U = \psi(x \ldots\ldots w, y, z)$ ein auf bestimmte Weise aus den Elementen $x \ldots\ldots w, y, z$ gebildeter Ausdruck, welcher die zwei unter sich ganz unabhängigen unmittelbar mutablen Elemente y und z enthält; und y und z seien Functionen der nichtmutablen Veränderlichen $x \ldots\ldots w$. Wenn nun y und z in die Reihen

$$\text{I)}\quad y_\varkappa = y + \varkappa\cdot\delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 y + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$\text{II)}\quad z_\varkappa = z + \varkappa\cdot\delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 z + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

übergehen, wo alle die Coefficienten δy, δz, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, $\delta^3 y$, $\delta^3 z$, etc. wegen der Allgemeinheit als Functionen aller der nichtmutablen Elemente $x \ldots\ldots w$ betrachtet werden mögen, und wo die Coefficienten der Reihe I von denen der Reihe II ganz unabhängig sind, und umgekehrt; so geht U in $U_\varkappa = \psi(x \ldots\ldots w, y_\varkappa, z_\varkappa)$ über. Diese neue Function kann man bekanntlich, wenn die ersten Glieder y und z der Reihen I und II noch ganz allgemein sind, mittelst des Maclaurin'schen Satzes in eine nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe verwandeln, so dass man hat

$$\text{III)}\quad U_\varkappa = U + \varkappa\cdot\left(\frac{dU_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0 + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\left(\frac{d^2U_\varkappa}{d\varkappa^2}\right)_0 + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\left(\frac{d^3U_\varkappa}{d\varkappa^3}\right)_0 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

oder

$$\text{IV)}\quad U_\varkappa = U + \varkappa\cdot\delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3U + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Nun ist $U_\varkappa$ eine Function von $z_\varkappa$ und $y_\varkappa$ zugleich, und $y_\varkappa$ und $z_\varkappa$ sind Functionen von $\varkappa$; also ist $U_\varkappa$ eine mittelbare Function von $\varkappa$. Man bekommt nun (nach §. 1—4)

$$1)\quad U_\varkappa = \psi(x \ldots\ldots w, y_\varkappa, z_\varkappa)$$

$$2)\quad \frac{dU_\varkappa}{d\varkappa} = \frac{d_yU}{dy}\cdot\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa} + \frac{d_zU}{dz}\cdot\frac{dz_\varkappa}{d\varkappa}$$

$$3)\quad \frac{d^2U_\varkappa}{d\varkappa^2} = \frac{d_y^2U}{dy^2}\cdot\left(\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa}\right)^2 + 2\cdot\frac{d_yd_zU}{dy.dz}\cdot\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa}\cdot\frac{dz_\varkappa}{d\varkappa} + \frac{d_z^2U}{dz^2}\cdot\left(\frac{dz_\varkappa}{d\varkappa}\right)^2$$
$$+ \frac{d_yU}{dy}\cdot\frac{d^2y_\varkappa}{d\varkappa^2} + \frac{d_zU}{dz}\cdot\frac{d^2z_\varkappa}{d\varkappa^2}$$

$$4)\quad \frac{d^3U_\varkappa}{d\varkappa^3} = \frac{d_y^3U}{dy^3}\cdot\left(\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa}\right)^3 + 3\cdot\frac{d_y^2d_zU}{dy^2.dz}\cdot\left(\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa}\right)^2\cdot\frac{dz_\varkappa}{d\varkappa} + 3\cdot\frac{d_yd_z^2U}{dy.dz^2}\cdot\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa}\cdot\left(\frac{dz_\varkappa}{d\varkappa}\right)^2$$
$$+ \frac{d_z^3U}{dz^3}\cdot\left(\frac{dz_\varkappa}{d\varkappa}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{d_y^2U}{dy^2}\cdot\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa} + \frac{d_yd_zU}{dy.dz}\cdot\frac{dz_\varkappa}{d\varkappa}\right)\cdot\frac{d^2y_\varkappa}{d\varkappa^2}$$
$$+ 3\cdot\left(\frac{d_yd_zU}{dy.dz}\cdot\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa} + \frac{d_z^2U}{dz^2}\cdot\frac{dz_\varkappa}{d\varkappa}\right)\cdot\frac{d^2z_\varkappa}{d\varkappa^2} + \frac{d_yU}{dy}\cdot\frac{d^3y_\varkappa}{d\varkappa^3} + \frac{d_zU}{dz}\cdot\frac{d^3z_\varkappa}{d\varkappa^3}$$

etc. etc.

Nun folgt aus den Gleichungen I und II gradezu $\left(\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0 = \delta y$, $\left(\frac{dz_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0 = \delta z$, $\left(\frac{d^2y_\varkappa}{d\varkappa^2}\right)_0 = \delta^2 y$, $\left(\frac{d^2z_\varkappa}{d\varkappa^2}\right)_0 = \delta^2 z$, $\left(\frac{d^3y_\varkappa}{d\varkappa^3}\right)_0 = \delta^3 y$, $\left(\frac{d^3z_\varkappa}{d\varkappa^3}\right)_0 = \delta^3 z$, etc.; und man hat

$$(U_\varkappa)_0 = U = \psi(x\,.\,.\,.\,.\,.\,w,\ y,\ z)$$

$$\left(\frac{dU_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0 = \delta U = \frac{d_yU}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_zU}{dz}\cdot\delta z$$

$$\left(\frac{d^2U_\varkappa}{d\varkappa^2}\right)_0 = \delta^2 U = \frac{d_y^2U}{dy^2}\cdot\delta y^2 + 2\cdot\frac{d_yd_zU}{dy.dz}\cdot\delta y\cdot\delta z + \frac{d_z^2U}{dz^2}\cdot\delta z^2$$
$$+ \frac{d_yU}{dy}\cdot\delta^2 y + \frac{d_zU}{dz}\cdot\delta^2 z$$

$$\left(\frac{d^3U_\varkappa}{d\varkappa^3}\right)_0 = \delta^3 U = \frac{d_y^3U}{dy^3}\cdot\delta y^3 + 3\cdot\frac{d_y^2d_zU}{dy^2.dz}\cdot\delta y^2\cdot\delta z + 3\cdot\frac{d_yd_z^2U}{dy.dz^2}\cdot\delta y\cdot\delta z^2$$
$$+ \frac{d_z^3U}{dz^3}\cdot\delta z^3 + 3\cdot\left(\frac{d_y^2U}{dy^2}\cdot\delta y + \frac{d_yd_zU}{dy.dz}\cdot\delta z\right)\cdot\delta^2 y$$
$$+ 3\cdot\left(\frac{d_yd_zU}{dy.dz}\cdot\delta y + \frac{d_z^2U}{dz^2}\cdot\delta z\right)\cdot\delta^2 z + \frac{d_yU}{dy}\cdot\delta^3 y + \frac{d_zU}{dy}\cdot\delta^3 z$$

etc. etc.

In diesem Falle ergibt sich also, wie im vorigen, eine ganz gleiche Regel:

„Man differentiire $U = \psi(x\,.\,.\,.\,.\,.\,w,\ y.\ z)$ sowohl nach y als auch nach z grade „so, wie wenn die Differentiale von y und z selbst wieder veränderlich sind; setze „aber nachher statt dy, dz, d^2y, d^2z, etc. bezüglich δy, δz, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, etc."

Da nun $\varDelta U = \varkappa\cdot\delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 U + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ ist, so bekommt man die mittelbare Gesammtmutation $\varDelta U$, wenn man die oben für δU, $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc. gefundenen Ausdrücke substituirt.

Unter den hierher gehörigen speciellen Fällen beachte man besonders den, wo die unmittelbare Gesammtmutation des y und des z bezüglich bloss $\varkappa\cdot\delta y$ und $\varkappa\cdot\delta z$ ist, wo also von den Coefficienten $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, $\delta^3 y$, $\delta^3 z$, etc. jeder für sich selbst Null, und bloss $\varDelta y = \varkappa\cdot\delta y$ und $\varDelta z = \varkappa\cdot\delta z$ ist.

Wie man nach ausgeführter Reihenentwickelung die specielle Bedeutung des $\varkappa$ ermittelt, ist schon (in §§. 49—55, besonders in §. 56) auseinandergesetzt.

Man erkennt nun, dass es nicht mehr nöthig ist, noch diejenigen Ausdrücke vorzunehmen, in welchen mehr als zwei unter sich unabhängige mutable Elemente vorkommen.

§. 66. Ist U nicht entwickelt sondern unentwickelt durch die Gleichung $F(x\ldots w,y,U) = 0$ gegeben, wo allein y als eine unmittelbar mutable Function der nichtmutablen Elemente $x\,.\,.\,.\,.\,.\,w$ zu behandeln ist; und geht y in die Reihe

$$\text{I)}\quad y_\varkappa = y + \varkappa\cdot\delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 y + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

über, wo alle die Coefficienten δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. wegen der Allgemeinheit als Functionen der nichtmutablen Elemente x w betrachtet werden mögen; so geht U, so lange das erste Glied y der Reihe I noch allgemein ist, gleichfalls in eine nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe $U_\varkappa$ über, welche von der Art ist, dass unter allen Umständen der Gleichung $F(x \ldots\ldots w, y_\varkappa, U_\varkappa) = 0$ genügt wird.

Hier ist $U_\varkappa$ eine Function von $y_\varkappa$, und $y_\varkappa$ ist eine Function von $\varkappa$; $U_\varkappa$ ist also eine mittelbare Function von $\varkappa$. Unsere Aufgabe ist jetzt, die Quotienten $\frac{dU_\varkappa}{d\varkappa}$, $\frac{d^2U_\varkappa}{d\varkappa^2}$, $\frac{d^3U_\varkappa}{d\varkappa^3}$, etc. zu bestimmen, und dann $\varkappa = 0$ zu setzen, um dadurch bezüglich δU, $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc. zu bekommen. Dazu gibt es folgende drei Wege:

Erstens. Man entwickle U aus $F(x \ldots\ldots\ldots w, y, U) = 0$, so dass man $U = \psi(x \ldots\ldots w, y)$ bekommt. Dadurch ist die jetzige Aufgabe auf die des §. 64 gebracht.

Zweitens. Aus dem Differentialcalcul ist bekannt, dass diese Entwickelung nicht nöthig ist; sondern man hat, weil schon $y_\varkappa$ von $\varkappa$ abhangt, folgende Differentialgleichungen herzustellen:

$$\frac{d_U F}{dU} \cdot \frac{dU_\varkappa}{d\varkappa} + \frac{d_y F}{dy} \cdot \frac{dy_\varkappa}{d\varkappa} = 0$$

$$\frac{d_U^2 F}{dU^2} \cdot \left(\frac{dU_\varkappa}{d\varkappa}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_U d_y F}{dU \cdot dy} \cdot \frac{dU_\varkappa}{d\varkappa} \cdot \frac{dy_\varkappa}{d\varkappa} + \frac{d_y^2 F}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa}\right)^2 + \frac{d_U F}{dU} \cdot \frac{d^2U_\varkappa}{d\varkappa^2} + \frac{d_y F}{dy} \cdot \frac{d^2y_\varkappa}{d\varkappa^2} = 0$$

etc. etc.

Indem man hier $\varkappa = 0$ setzt, bekommt man bezüglich

$$\frac{d_U F}{dU} \cdot \delta U + \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta y = 0$$

$$\frac{d_U^2 F}{dU^2} \cdot \delta U^2 + 2 \cdot \frac{d_U d_y F}{dU \cdot dy} \cdot \delta U \cdot \delta y + \frac{d_y^2 F}{dy^2} \cdot \delta y^2 + \frac{d_U F}{dU} \cdot \delta^2 U + \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta^2 y = 0$$

etc. etc.

Aus diesen Gleichungen lassen sich die mittelbaren Mutationscoefficienten δU, $\delta^2 U$, etc. der Reihe nach bestimmen, so dass man die mittelbare Gesammtmutation

$$\varDelta U = \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U + \ldots\ldots$$

bekommt, indem man für δU, $\delta^2 U$, etc. die Ausdrücke substituirt.

Drittens. Man setze der Kürze wegen F statt $F(x \ldots\ldots w, y, U)$, und $F_\varkappa$ statt $F(x \ldots\ldots w. y_\varkappa, U_\varkappa)$; so bekommt man

$$F_\varkappa = F + \varkappa \cdot \delta F + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 F + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 F + \ldots\ldots = 0$$

Während aber die Gleichung $F_\varkappa = 0$ stattfinden soll, ist damit zugleich die Bedingung verbunden, dass $\varkappa$ ein blosses Operationsmittel ist, d. h. dass $F_\varkappa$ bei jedem beliebigen Werthe des $\varkappa$ zu Null werde; und so muss jeder einzelne Coefficient der letzteren Reihe für sich selbst verschwinden, und man hat $F = 0$, $\delta F = 0$, $\delta^2 F = 0$, $\delta^3 F = 0$, etc. oder

$$F(x \ldots\ldots w, y, U) = 0$$

$$\frac{d_U F}{dU} \cdot \delta U + \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta y = 0$$

$$\frac{d_U^2 F}{dU^2} \cdot \delta U^2 + 2 \cdot \frac{d_U d_y F}{dU . dy} \cdot \delta U \cdot \delta y + \frac{d_y^2 F}{dy^2} \cdot \delta y^2 + \frac{d_U F}{dU} \cdot \delta^2 U + \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta^2 y = 0$$

etc. etc.

Man hat also ganz dieselben Resultate, wie vorher.

§. 67. Wenn in der Gleichung $F(x \ldots\ldots w, y, z, U) = 0$ die zwei unter sich

ganz unabhängigen unmittelbar mutablen Elemente y und z, welche Functionen der nichtmutablen Elemente x w sind, vorkommen; und wenn diese zwei Elemente in die Reihen

$$\text{I)}\quad y_\varkappa = y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \dots\dots$$

$$\text{II)}\quad z_\varkappa = z + \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 z + \dots\dots$$

übergehen, wo alle die Coefficienten δy, δz, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, $\delta^3 y$, $\delta^3 z$, etc. wegen der Allgemeinheit als Functionen der nichtmutablen Elemente x w betrachtet werden mögen, und wo die Coefficienten der Reihe I von denen der Reihe II ganz unabhängig sind, und umgekehrt; so geht U, so lange die ersten Glieder der Reihe I und II noch ganz allgemein sind, gleichfalls in eine nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe $U_\varkappa$ über, welche von der Art ist, dass unter allen Umständen der Gleichung $F(x \ldots\ldots w, y_\varkappa, z_\varkappa, U_\varkappa) = 0$ genügt wird.

Hier ist $U_\varkappa$ eine Function von $y_\varkappa$ und $z_\varkappa$ zugleich, und $y_\varkappa$ und $z_\varkappa$ sind Functionen von $\varkappa$, so dass $U_\varkappa$ eine mittelbare Function von $\varkappa$ ist. Unsere Aufgabe ist jetzt, die Quotienten $\frac{\overline{\overline{dU_\varkappa}}}{d\varkappa}$, $\frac{\overline{\overline{d^2U_\varkappa}}}{d\varkappa^2}$, $\frac{\overline{\overline{d^3U_\varkappa}}}{d\varkappa^3}$, etc. zu bestimmen, und dann $\varkappa = 0$ zu setzen, um bezüglich δU, $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc. zu bekommen. Dazu gibt es, wie schon im vorigen §. der Fall war, folgende drei Wege:

Erstens. Man entwickle U aus $F(x \ldots\ldots\ldots w, y, z, U) = 0$, so dass man $U = \psi(x \ldots\ldots\ldots w, y, z)$ bekommt. Dadurch ist die jetzige Aufgabe auf die des §. 65 gebracht.

Zweitens. Aus dem Differentialcalcul ist bekannt, dass diese Entwicklung nicht nöthig ist, sondern man hat, weil schon $y_\varkappa$ und $z_\varkappa$ von $\varkappa$ abhangen, folgende Differentialgleichungen

$$\frac{d_U F}{dU} \cdot \frac{\overline{\overline{dU_\varkappa}}}{d\varkappa} + \frac{d_y F}{dy} \cdot \frac{dy_\varkappa}{d\varkappa} + \frac{d_z F}{dz} \cdot \frac{dz_\varkappa}{d\varkappa} = 0$$

$$\frac{d_U^2 F}{dU^2} \cdot \left(\frac{\overline{\overline{dU_\varkappa}}}{d\varkappa}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_U d_y F}{dU . dy} \cdot \frac{\overline{\overline{dU_\varkappa}}}{d\varkappa} \cdot \frac{dy_\varkappa}{d\varkappa} + 2 \cdot \frac{d_U d_z F}{dU . dz} \cdot \frac{\overline{\overline{dU_\varkappa}}}{d\varkappa} \cdot \frac{dz_\varkappa}{d\varkappa} + \frac{d_y^2 F}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy_\varkappa}{dy^2}\right)^2$$

$$+ 2 \cdot \frac{d_y d_z F}{dy . dz} \cdot \frac{dy_\varkappa}{d\varkappa} \cdot \frac{dz_\varkappa}{d\varkappa} + \frac{d_z^2 F}{dz^2} \cdot \left(\frac{dz_\varkappa}{d\varkappa}\right)^2 + \frac{d_U F}{dU} \cdot \frac{\overline{\overline{d^2U_\varkappa}}}{d\varkappa^2} + \frac{d_y F}{dy} \cdot \frac{d^2 y_\varkappa}{d\varkappa^2} + \frac{d_z F}{dz} \cdot \frac{d^2 z_\varkappa}{d\varkappa^2} = 0$$

etc. etc.

Indem man hier $\varkappa = 0$ setzt, bekommt man

$$\frac{d_U F}{dU} \cdot \delta U + \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_z F}{dz} \cdot \delta z = 0$$

$$\frac{d_U^2 F}{dU^2} \cdot \delta U^2 + 2 \cdot \frac{d_U d_y F}{dU.dy} \cdot \delta U \cdot \delta y + 2 \cdot \frac{d_U d_z F}{dU.dz} \cdot \delta U \cdot \delta z + \frac{d_y^2 F}{dy^2} \cdot \delta y^2$$

$$+ 2 \cdot \frac{d_y d_z F}{dy.dz} \cdot \delta y \cdot \delta z + \frac{d_z^2 F}{dz^2} \cdot \delta z^2 + \frac{d_U F}{dU} \cdot \delta^2 U + \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_z F}{dz} \cdot \delta^2 z = 0$$

etc. etc.

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Coefficienten δU, $\delta^2 U$, etc. der Reihe nach bestimmen, so dass man die mittelbare Gesammtmutation

$$\Delta U = \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.2} \cdot \delta^3 U + \dots\dots$$

bekommt, wenn man hierin die für δU, $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc. sich ergebenden Ausdrücke substituirt.

Drittens. Man setze zur Abkürzung F statt $F(x \ldots w, y, z, U)$, und $F_\varkappa$ statt $F(x \ldots\ldots w, y_\varkappa, z_\varkappa, U_\varkappa)$; so bekommt man

$$F_\varkappa = F + \varkappa \cdot \delta F + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 F + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 F + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = 0$$

Während aber die Gleichung $F_\varkappa = 0$ stattfinden soll, ist damit zugleich die Bedingung verbunden, dass $\varkappa$ ein blosses Operationsmittel ist, d. h. dass $F_\varkappa$ bei jedem beliebigen Werthe des $\varkappa$ zu Null werde; und somit muss jeder einzelne Coefficient der letzteren Reihe für sich selbst verschwinden, und man hat $F = 0$, $\delta F = 0$, $\delta^2 F = 0$, $\delta^3 F = 0$ etc.; oder

$$F(x \ldots\ldots w, y, z, U) = 0$$

$$\frac{d_U F}{dU} \cdot \delta U + \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_z F}{dz} \cdot \delta z = 0$$

$$\frac{d_U^2 F}{dU^2} \cdot \delta U^2 + 2 \cdot \frac{d_U d_y F}{dU.dy} \cdot \delta U \cdot \delta y + 2 \cdot \frac{d_U d_z F}{dU.dz} \cdot \delta U \cdot \delta z + \frac{d_y^2 F}{dy^2} \cdot \delta y^2$$

$$+ 2 \cdot \frac{d_y d_z F}{dy.dz} \cdot \delta y \cdot \delta z + \frac{d_z^2 F}{dz^2} \cdot \delta z^2 + \frac{d_U F}{dU} \cdot \delta^2 U + \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_z F}{dz} \cdot \delta^2 z = 0$$

etc. etc.

Man hat also ganz dieselben Resultate, wie vorher.

Man erkennt nun, dass es in Beziehung auf das Mutiren völlig einerlei ist, ob eine Function entwickelt oder unentwickelt gegeben ist. Desshalb soll dieser Umstand in der Folge gar kein Unterscheidungsmerkmal mehr abgeben, sondern man wird nach Bequemlichkeit bald die entwickelte bald die unentwickelte Form wählen.

§. 68. Wenn die gleichzeitig bestehenden Functionen $U = \psi(x \ldots\ldots w, y, z)$ und $F(x \ldots\ldots w, y, z) = 0$ zwei mutable Elemente y und z enthalten; so können, eben wegen der Gleichung $F(x \ldots\ldots w, y, z) = 0$, nicht mehr alle beide Elemente y und z unmittelbar mutabel sein. Man behandle y als mittelbar mutabel. Geht nun z über in die Reihe

$$z_\varkappa = z + \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 z + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

so geht $F(x \ldots\ldots w, y, z) = 0$ über in $F(x \ldots\ldots w, y_\varkappa, z_\varkappa) = 0$, woran man erkennt, dass die Coefficienten der Reihe $y_\varkappa$ von denen der Reihe $z_\varkappa$ abhängig sind.

Um die Mutation des U in eine solche zu verwandeln, welche bloss die Coefficienten der Reihe $z_\varkappa$ enthält; kann man wieder zwei Wege einschlagen, welche aber zu ganz gleichbedeutenden Resultaten führen.

Erstens. Man entwickle aus $F(x \ldots\ldots w, y, z) = 0$ das y, so dass man $y = f(x \ldots w, z)$ bekommt. Diese Function substituire man in $U = \psi(x \ldots w, y, z)$, wodurch sich $U = \psi[x \ldots w, f(x \ldots w, z), z]$ ergibt; und man hat die jetzige Aufgabe auf die des §. 64 gebracht.

Zweitens. Aus dem Differentialcalcul ist bekannt, dass diese Entwicklung und nachfolgende Substitution nicht nöthig ist; sondern man hat nur folgende Differentialgleichungen herzustellen:

$$1)\quad \frac{dU_\varkappa}{d\varkappa} = \frac{d_y U}{dy} \cdot \frac{dy_\varkappa}{d\varkappa} + \frac{d_z U}{dz} \cdot \frac{dz_\varkappa}{d\varkappa}$$

$$2)\quad \frac{d^2 U_\varkappa}{d\varkappa^2} = \frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_z U}{dy.dz} \cdot \frac{dy_\varkappa}{d\varkappa} \cdot \frac{dz_\varkappa}{d\varkappa} + \frac{d_z^2 U}{dz^2} \cdot \left(\frac{dz_\varkappa}{d\varkappa}\right)^2$$

$$+ \frac{d_y U}{dy} \cdot \frac{d^2 y_\varkappa}{d\varkappa^2} + \frac{d_z U}{dz} \cdot \frac{d^2 z_\varkappa}{d\delta^2}$$

etc. etc.; und

$$1)\quad \frac{d_y F}{dy} \cdot \frac{dy_\varkappa}{d\varkappa} + \frac{d_z F}{dz} \cdot \frac{dz_\varkappa}{d\varkappa} = 0$$

$$\text{II)}\quad \frac{d_y^2F}{dy^2}\cdot\left(\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa}\right)^2 + 2\cdot\frac{d_yd_zF}{dy.dz}\cdot\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa}\cdot\frac{dz_\varkappa}{d\varkappa} + \frac{d_z^2F}{dz^2}\cdot\left(\frac{dz_\varkappa}{d\varkappa}\right)^2$$

$$+\frac{d_yF}{dy}\cdot\frac{d^2y_\varkappa}{d\varkappa^2} + \frac{d_zF}{dz}\cdot\frac{d^2z_\varkappa}{d\varkappa^2} = 0$$

etc. etc.

Eliminirt man nun aus den Gleichungen der ersten Art die Quotienten $\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa}$, $\frac{d^2y_\varkappa}{d\varkappa^2}$, etc., was mittelst der Gleichungen der zweiten Art geschieht; so ergeben sich bekanntlich für die Quotienten $\frac{dU_\varkappa}{d\varkappa}$, $\frac{d^2U_\varkappa}{d\varkappa^2}$, etc. ganz gleichbedeutende Ausdrücke, wie wenn man gleich anfangs aus $U = \psi(x \ldots\ldots w,\ y,\ z)$ das y eliminirt hätte. Hierauf hat man $\varkappa = 0$ zu setzen, und es ergeben sich δU, $\delta^2 U$, etc. und die ihnen entsprechenden Ausdrücke. Schaut man aber auf die Gleichungen 1, 2, etc., und I, II, etc. zurück, so erkennt man, dass es keine Aenderung macht, wenn man schon vor der Elimination $\varkappa = 0$ setzt; und dadurch gehen die Gleichungen 1, 2, etc., und I, II, etc. bezüglich über in

$$\text{a.1)}\quad \delta U = \frac{d_yU}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_zU}{dz}\cdot\delta z$$

$$\text{a.2)}\quad \delta^2 U = \frac{d_y^2U}{dy^2}\cdot\delta y^2 + 2\cdot\frac{d_yd_zU}{dy.dz}\cdot\delta y\cdot\delta z + \frac{d_z^2U}{dz^2}\cdot\delta z^2$$

$$+\frac{d_yU}{dy}\cdot\delta^2 y + \frac{d_zU}{dz}\cdot\delta^2 z$$

etc. etc.; und

$$\text{a.I)}\quad \frac{d_yF}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_zF}{dz}\cdot\delta z = 0$$

$$\text{a.II)}\quad \frac{d_y^2F}{dy^2}\cdot\delta y^2 + 2\cdot\frac{d_yd_zF}{dy.dz}\cdot\delta y\cdot\delta z + \frac{d_z^2F}{dz^2}\cdot\delta z^2 + \frac{d_yF}{dy}\cdot\delta^2 y + \frac{d_zF}{dz}\cdot\delta^2 z = 0$$

etc. etc.

Man hat also aus den Gleichungen der ersten Art δy, $\delta^2 y$, etc. zu eliminiren, welches entweder direct geschehen kann oder mittelst eines Multiplicators. Das letztere Verfahren ist nemlich folgendes: Man multiplicire Gleichung a.I) mit einer (vorerst noch unbestimmten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{M}$ von $x \ldots\ldots w$, dann ist auch noch das Product

$$\mathfrak{M}\cdot\left(\frac{d_yF}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_zF}{dz}\cdot\delta z\right) = 0$$

Diese Gleichung kann man nun zu a.1) addiren, ohne dass sich dadurch δU ändert. Man bekommt also

$$\delta U = \frac{d_yU}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_zU}{dz}\cdot\delta z + \mathfrak{M}\cdot\left(\frac{d_yF}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_zF}{dz}\cdot\delta z\right)$$

Ordnet man anderst, so ist

$$\delta U = \left(\frac{d_yU}{dy} + \mathfrak{M}\cdot\frac{d_yF}{dy}\right)\cdot\delta y + \left(\frac{d_zU}{dz} + \mathfrak{M}\cdot\frac{d_zF}{dz}\right)\cdot\delta z$$

Nun denke man sich unter $\mathfrak{M}$ eine solche Function von $x \ldots\ldots w$, dass der mit δy behaftete Theilsatz wegfällt, und setze zu diesem Ende

$$\text{A)}\quad \frac{d_yU}{dy} + \mathfrak{M}\cdot\frac{d_yF}{dy} = 0$$

so bleibt nur noch

$$\text{B)}\quad \delta U = \left(\frac{d_zU}{dz} + \mathfrak{M}\cdot\frac{d_zF}{dz}\right)\cdot\delta z$$

Aus Gleichung A ergibt sich nun, was $\mathfrak{M}$ für eine Function von x w ist; nemlich es ist

$$\text{C)}\quad \mathfrak{M} = -\frac{d_y U}{dy} : \frac{d_y F}{dy}$$

Indem man diesen Ausdruck statt $\mathfrak{M}$ in Gleichung B einsetzt, ergibt sich dasselbe Resultat, wie wenn man δy direct eliminirt hätte, d. h. es gibt sich

$$\text{D)}\quad \delta U = \left[\left(\frac{d_z U}{dz} \times \frac{d_y F}{dy} - \frac{d_y U}{dy} \times \frac{d_z F}{dz}\right) : \frac{d_y F}{dy}\right] \cdot \delta z$$

Diese Methode, durch welche indirect eliminirt wird, heisst die Multiplicatorenmethode. Wann sie vor der directen Elimination Vorzüge hat, wird man am speciellen Falle erkennen.

Zur Herstellung von $\delta^2 U$ multiplicire man Gleichung a.II mit derselben Function $\mathfrak{M}$ von x w, und addire dieses Product zu a.2; so gibt sich

$$\text{E)}\quad \delta^2 U = \left(\frac{d_y U}{dy} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_y F}{dy}\right) \cdot \delta^2 y + \left(\frac{d_z U}{dz} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_z F}{dz}\right) \cdot \delta^2 z$$
$$+ \left(\frac{d_y^2 U}{dy^2} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_y^2 F}{dy^2}\right) \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \left(\frac{d_y d_z U}{dy.dz} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_y d_z F}{dy.dz}\right) \cdot \delta y \cdot \delta z$$
$$+ \left(\frac{d_z^2 U}{dz^2} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_z^2 F}{dz^2}\right) \cdot \delta z^2$$

In Folge der Gleichung A reducirt sich die Gleichung E auf

$$\text{F)}\quad \delta^2 U = \left(\frac{d_z U}{dz} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_z F}{dz}\right) \cdot \delta^2 z + \left(\frac{d_y^2 U}{dy^2} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_y^2 F}{dy^2}\right) \cdot \delta y^2$$
$$+ 2 \cdot \left(\frac{d_y d_z U}{dy.dz} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_y d_z F}{dy.dz}\right) \cdot \delta y \cdot \delta z + \left(\frac{d_z^2 U}{dz^2} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_z^2 F}{dz^2}\right) \cdot \delta z^2$$

Man hat nun $\mathfrak{M}$ mittelst der Gleichung A oder C, und dann δy mittelst der Gleichung a.I zu eliminiren.

Wenn man nun successive δU, $\delta^2 U$, etc. bestimmt hat, so hat man nur die dafür sich ergebenden Ausdrücke in

$$\Delta U = \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

einzuführen, und bekommt so die mittelbare Gesammtmutation, welche mit der aus $U = \psi[x \ldots\ldots w,\ f(x \ldots\ldots w,\ z),\ z]$ zu entwickelnden ganz gleichbedeutend ist.

Bei der Multiplicatorenmethode kann man auch auf folgende Weise verfahren: Weil in F(x w, y, z) = 0 die Elemente y und z Functionen von x w sind, so ist F(x w, y, z) = 0 eine identische Gleichung, d. h. gilt bei jedem Werthe der nichtmutablen Veränderlichen x w. Desshalb ist, was auch $\mathfrak{M}$ für eine Function von x w sein mag, auch das Product

$$\mathfrak{M} \cdot F(x \ldots\ldots w,\ y,\ z) = 0$$

noch eine identische Gleichung. Addirt man dieses Product zu $U = \psi(x \ldots w, y, z)$, so wird U nicht im Geringsten geändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$U = \psi(x \ldots\ldots w,\ y,\ z) + \mathfrak{M} \cdot F(x \ldots\ldots w,\ y,\ z)$$

Denkt man sich nun unter $\mathfrak{M}$ eine nichtmutable Function von x w, so gibt sich aus letzterer Gleichung

$$\delta U = \left(\frac{d_y U}{dy} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_y F}{dy}\right) \cdot \delta y + \left(\frac{d_z U}{dz} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_z F}{dz}\right) \cdot \delta z$$

welche Gleichung wieder in die Gleichungen A und B zu zerlegen ist, so dass hinsichtlich der Bestimmung des δU Alles bleibt wie bisher.

Würde man letztere Gleichung abermals mutiren, so würde man wieder Gleichung E bekommen, etc.

§. 69. Ein specieller Fall vom vorhergehenden ist folgender: Es sollen die Functionen $U = \psi(x \ldots\ldots w, y)$ und $F(x \ldots\ldots w, y, z) = 0$ gleichzeitig bestehen, und jedenfalls auch $F(x \ldots\ldots w, y_\varkappa, z_\varkappa) = 0$ bleiben.

Hier steht es nicht in unserer Wahl, welches der Elemente y und z man als mittelbar mutabel behandeln will; sondern y muss als mittelbar mutabel und z muss als unmittelbar mutabel behandelt werden, weil sonst die Mutation des z keinen Einfluss auf U hätte.

Will man nur δU bestimmen, und sucht man $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc. nicht; so nehme man die Multiplicatorenmethode. Was nun auch $\mathfrak{M}$ für eine Function von $x \ldots\ldots w$ sein mag, so ist doch immer das Product $\mathfrak{M} \cdot F(x \ldots\ldots w, y, z) = 0$ eine identische Gleichung, welche man zu $U = \psi(x \ldots\ldots w, y)$ addiren kann, so dass doch noch vollkommen genau ist

$$U = \psi(x \ldots\ldots w, y) + \mathfrak{M} \cdot F(x \ldots\ldots w, y, z)$$

Denkt man sich aber unter $\mathfrak{M}$ eine nichtmutable Function von $x \ldots\ldots w$, so bekommt man aus letzterer Gleichung

$$\delta U = \left(\frac{d_y U}{dy} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_y F}{dy}\right) \cdot \delta y + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_z F}{dz} \cdot \delta z$$

Nun denke man sich unter $\mathfrak{M}$ eine solche Function von $x \ldots\ldots w$, dass der mit δy behaftete Theilsatz wegfällt, und setze zu diesem Ende

$$\text{A)} \quad \frac{d_y U}{dy} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_y F}{dy} = 0$$

so bleibt nur noch

$$\text{B)} \quad \delta U = \mathfrak{M} \cdot \frac{d_z F}{dz} \cdot \delta z$$

Eliminirt man nun $\mathfrak{M}$, so ergibt sich dasselbe Resultat, wie wenn man δy direct eliminirt hätte, d. h. es gibt sich

$$\delta U = \left[\left(-\frac{d_y U}{dy} \times \frac{d_z F}{dz}\right) : \frac{d_y F}{dy}\right] \cdot \delta z$$

§. 70. Wenn die gleichzeitig bestehenden Functionen $U = \psi(x \ldots\ldots w, y, z, v)$ und $F(x \ldots\ldots w, y, z, v) = 0$ die drei mutablen Elemente y, z, v enthalten; so können, eben wegen der Gleichung $F(x \ldots\ldots w, y, z, v) = 0$, nicht mehr alle drei Elemente y, z, v unmittelbar mutabel sein, sondern das eine derselben ist mittelbar mutabel. Man behandle y als mittelbar mutabel, so sind z und v unmittelbar mutabel. Gehen nun z und v über in die Reihen

$$z_\varkappa = z + \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 z + \cdots\cdots$$

$$v_\varkappa = v + \varkappa \cdot \delta v + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 v + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 v + \cdots\cdots$$

so geht $F(x \ldots\ldots w, y, z, v) = 0$ über in $F(x \ldots\ldots w, y_\varkappa, z_\varkappa, v_\varkappa) = 0$, woran man erkennt, dass die Coefficienten der Reihe $y_\varkappa$ von denen der Reihen $z_\varkappa$ und $v_\varkappa$ abhängig sind, während die Coefficienten der Reihe $z_\varkappa$ von denen der Reihe $v_\varkappa$ ganz unabhängig sind, und umgekehrt.

Um aber die Mutation des U in eine solche zu verwandeln, welche bloss die Coefficienten der Reihen $z_\varkappa$ und $v_\varkappa$ enthält; kann man, wie bisher, zwei Wege einschlagen, welche aber zu ganz gleichbedeutenden Resultaten führen.

Erstens. Man entwickle aus $F(x \ldots\ldots w, y, z, v) = 0$ das y, so dass man $y = f(x \ldots\ldots w, z, v)$ bekommt. Diese Function substituire man in $U = \psi(x \ldots w, y, z, v)$, wodurch sich $U = \psi[x \ldots\ldots w, f(x \ldots\ldots w, z, v), z, v]$ ergibt; und man hat die jetzige Aufgabe auf die des §. 65 gebracht.

Zweitens. Aus dem Differentialcalcul ist bekannt, dass diese Entwicklung und

nachfolgende Substitution nicht nöthig ist; sondern man hat nur folgende Differentialgleichungen herzustellen:

$$1)\quad \frac{dU_\varkappa}{d\varkappa} = \frac{d_yU}{dy}\cdot\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa} + \frac{d_zU}{dz}\cdot\frac{dz_\varkappa}{d\varkappa} + \frac{d_vU}{dv}\cdot\frac{dv_\varkappa}{d\varkappa}$$

$$\text{I.}\quad \frac{d_yF}{dy}\cdot\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa} + \frac{d_zF}{dz}\cdot\frac{dz_\varkappa}{d\varkappa} + \frac{d_vF}{dv}\cdot\frac{dv_\varkappa}{d\varkappa} = 0$$

Eliminirt man hieraus den Quotienten $\frac{dy_\varkappa}{d\varkappa}$, so ergibt sich bekanntlich für $\frac{dU_\varkappa}{d\varkappa}$ ein Resultat, welches mit dem völlig gleichbedeutend ist, welches man aus $U = \psi[x \ldots\ldots w, f(x \ldots\ldots w, z, v), z, v]$ bekommt. Setzt man dann $\varkappa = 0$, so bekommt man für δU einen Ausdruck, welcher nur δz und δv enthält.

Schaut man aber auf die Gleichungen I und 1 zurück, so erkennt man, dass es keine Aenderung macht, wenn man schon vor dem Eliminiren das $\varkappa = 0$ setzt; und dadurch gehen die Gleichungen I und 1 über in

$$\text{a.1)}\quad \delta U = \frac{d_yU}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_zU}{dz}\cdot\delta z + \frac{d_vU}{dv}\cdot\delta v$$

$$\text{a.I)}\quad \frac{d_yF}{dv}\cdot\delta y + \frac{d_zF}{dz}\cdot\delta z + \frac{d_vF}{dv}\cdot\delta v = 0$$

Eliminirt man nun δy direct oder mittelst eines Multiplicators, so bekommt man jedesmal das nemliche Resultat.

Will man $\delta^2 U$ herstellen, so braucht man nur die beiden letzten Gleichungen abermals zu mutiren, und dann δy und $\delta^2 y$ zu eliminiren.

Und so fort.

Hat man dann successive δU, $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc. bestimmt, so ergibt sich die mittelbare Gesammtmutation

$$\varDelta U = \varkappa\cdot\delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 U + \cdots\cdots$$

wenn man die für δU, $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc. gefundenen Ausdrücke substituirt.

Kommt es nur darauf an, δU zu bestimmen, und sucht man $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc. nicht; so kann man auch auf folgende Weise verfahren: Weil in $F(x \ldots\ldots w, y, z, v) = 0$ die Elemente y, z, v Functionen von $x \ldots\ldots w$ sind, so ist $F(x \ldots\ldots w, y, z, v) = 0$ eine identische Gleichung, d. h. gilt bei jedem Werthe der nichtmutablen Veränderlichen $x \ldots\ldots w$. Desshalb ist, was auch $\mathfrak{M}$ für eine Function von $x \ldots\ldots w$ sein mag, auch das Product

$$\mathfrak{M}\cdot F(x \ldots\ldots w, y, z, v) = 0$$

noch eine identische Gleichung. Addirt man dieses Product zu $U = \psi(x \ldots w, y, z, v)$, so wird U nicht im Geringsten geändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$U = \psi(x \ldots\ldots w, y, z, v) + \mathfrak{M}\cdot F(x \ldots\ldots w, y, z, v)$$

Denkt man sich nun unter $\mathfrak{M}$ eine nichtmutable Function von $x \ldots\ldots w$, so gibt sich aus letzterer Gleichung

$$\delta U = \left(\frac{d_yU}{dy} + \mathfrak{M}\cdot\frac{d_yF}{dy}\right)\cdot\delta y + \left(\frac{d_zU}{dz} + \mathfrak{M}\cdot\frac{d_zF}{dz}\right)\cdot\delta z + \left(\frac{d_vU}{dv} + \mathfrak{M}\cdot\frac{d_vF}{dv}\right)\cdot\delta v$$

Nun denke man sich unter $\mathfrak{M}$ eine solche Function von $x \ldots\ldots w$, dass der mit δy behaftete Theilsatz wegfällt; und setze zu diesem Ende

$$\frac{d_yU}{dy} + \mathfrak{M}\cdot\frac{d_yF}{dy} = 0$$

Sonach bleibt nur noch

$$\delta U = \left(\frac{d_zU}{dz} + \mathfrak{M}\cdot\frac{d_zF}{dz}\right)\cdot\delta z + \left(\frac{d_vU}{dv} + \mathfrak{M}\cdot\frac{d_vF}{dv}\right)\cdot\delta v$$

Da nun hier $\mathfrak{M} = -\frac{d_yU}{dy} : \frac{d_yF}{dy}$, so wird

$$\delta U = \left[\left(\frac{d_zU}{dz} \times \frac{d_yF}{dy} - \frac{d_yU}{dy} \times \frac{d_zF}{dz}\right) : \frac{d_yF}{dy}\right] \cdot \delta z + \left[\left(\frac{d_vU}{dv} \times \frac{d_yF}{dy} - \frac{d_yU}{dy} \times \frac{d_vF}{dv}\right) : \frac{d_yF}{dy}\right] \cdot \delta v$$

Ein specieller Fall hiervon ist der, wo die gleichzeitig bestehenden Functionen $U = \psi(x \ldots\ldots w, y)$ und $F(x \ldots\ldots w, y, z, v) = 0$ gegeben sind, und unter allen Umständen auch noch $F(x \ldots\ldots w, y_x, z_x, v_x) = 0$ bleiben muss.

Hier muss nothwendig y mittelbar mutabel, und z und v müssen unmittelbar mutabel sein, weil sonst die Mutationen der beiden letztern Elemente keinen Einfluss auf U hätten.

§. 71. Wenn die gleichzeitig bestehenden Functionen $U = \psi(x \ldots\ldots w, y, z, v)$, $F(x \ldots\ldots w, y, z, v) = 0$ und $\mathfrak{F}(x \ldots\ldots w, y, z, v) = 0$ die drei mutablen Elemente y, z, v enthalten; so können, eben wegen der beiden Gleichungen $F(x \ldots\ldots w, y, z, v) = 0$ und $\mathfrak{F}(x \ldots\ldots w, y, z, v) = 0$ nicht mehr alle drei Elemente y, z, v unmittelbar mutabel sein, sondern zwei derselben sind mittelbar mutabel, während nur eines unmittelbar mutabel ist. Man behandle die beiden Elemente y und z als mittelbar mutabel.

Erstens. Man kann hier y und z als Functionen von v bestimmen, so dass man $y = f(x \ldots\ldots w, v)$ und $z = f'(x \ldots\ldots w, v)$ bekommt. Diese Functionen substituire man nun in $U = \psi(x \ldots w, y, z, v)$, so bekommt man $U = \psi[x \ldots w, f(x \ldots w, v), f'(x \ldots w, v), v]$; und die hiesige Aufgabe ist auf die des §. 64 gebracht.

Zweitens. Man mutire die Functionen ψ, F, $\mathfrak{F}$, und bekommt so der Ordnung nach

$$\delta U = \frac{d_yU}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_zU}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_vU}{dv} \cdot \delta v$$

$$\frac{d_yF}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_zF}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_vF}{dv} \cdot \delta v = 0$$

$$\frac{d_y\mathfrak{F}}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_z\mathfrak{F}}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_v\mathfrak{F}}{dv} \cdot \delta v = 0$$

etc. etc.

Hieraus eliminire man δy, δz, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, etc., so bekommt man für δU, $\delta^2 U$, etc. Ausdrücke, welche nur die unmittelbaren Mutationscoefficienten δv, $\delta^2 v$, etc. enthalten.

Kommt es nur darauf an, δU zu bestimmen, und sucht man $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc. nicht; so kann man auch auf folgende Weise verfahren: Weil in $F(x \ldots\ldots w, y, z, v) = 0$ und in $\mathfrak{F}(x \ldots\ldots w, y, z, v) = 0$ die Elemente y, z, v Functionen von $x \ldots\ldots w$ sind, so sind $F(x \ldots\ldots w, y, z, v) = 0$ und $\mathfrak{F}(x \ldots\ldots w, y, z, v) = 0$ identische Gleichungen, d. h. sie gelten bei jedem Werthe der nichtmutablen Veränderlichen $x \ldots\ldots w$. Desshalb sind, was auch $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ für Functionen von $x \ldots\ldots w$ sein mögen, die beiden Producte

$$\mathfrak{M} \cdot F(x \ldots\ldots w, y, z, v) = 0$$
$$\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{F}(x \ldots\ldots w, y, z, v) = 0$$

auch noch identische Gleichungen. Addirt man diese beiden Producte zu $U = \psi(x, \ldots w, y, z, v)$, so wird U nicht im Geringsten geändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$U = \psi(x \ldots\ldots w, y, z, v) + \mathfrak{M} \cdot F(x \ldots\ldots w, y, z, v) + \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{F}(x \ldots\ldots w, y, z, v)$$

Denkt man sich nun unter $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei nichtmutable Functionen von $x \ldots\ldots w$, so gibt sich aus letzterer Gleichung

$$\delta U = \left(\frac{d_yU}{dy} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_yF}{dy} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_y\mathfrak{F}}{dy}\right) \cdot \delta y + \left(\frac{d_zU}{dz} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_zF}{dz} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_z\mathfrak{F}}{dz}\right) \cdot \delta z + \left(\frac{d_vU}{dv} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_vF}{dv} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_v\mathfrak{F}}{dv}\right) \cdot \delta v$$

Nun denke man sich unter $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ solche Functionen von $x \ldots\ldots w$, dass die mit δy und δz behafteten Theilsätze wegfallen; und zu diesem Ende setze man

$$\text{A)}\quad \frac{d_yU}{dy} + \mathfrak{M}\cdot\frac{d_yF}{dy} + \mathfrak{N}\cdot\frac{d_y\mathfrak{F}}{dy} = 0$$

$$\text{B)}\quad \frac{d_zU}{dz} + \mathfrak{M}\cdot\frac{d_zF}{dz} + \mathfrak{N}\cdot\frac{d_z\mathfrak{F}}{dz} = 0$$

Es bleibt also nur noch

$$\text{C)}\quad \delta U = \left(\frac{d_vU}{dv} + \mathfrak{M}\cdot\frac{d_vF}{dv} + \mathfrak{N}\cdot\frac{d_v\mathfrak{F}}{dv}\right)\cdot\delta v$$

Aus den Gleichungen A und B ergibt sich, was $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ für Functionen von $x \ldots w$ sind, welche man dann in Gleichung C zu substituiren hat.

§. 72. Aus allem Vorhergehenden ist ersichtlich, dass es nun nicht mehr nöthig ist, hier noch zusammengesetztere Fälle vorzunehmen.

Die mutablen Elemente können auch Differentiale oder Integrale sein; dieses ändert nichts an dem bis jetzt befolgten Verfahren, wenn man sich nur der in §. 59 aufgestellten Sätze bedient.

Ist z. B.

$$U = \psi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots\ldots\right)$$

zu mutiren, so setze man nur p statt $\frac{dy}{dx}$, q statt $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc.; und man hat

$$U = \psi(x,\ y,\ p,\ q\ \ldots\ldots)$$

Daraus folgt

$$\delta U = \frac{d_yU}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_pU}{dp}\cdot\delta p + \frac{d_qU}{dq}\cdot\delta q\ \ldots\ldots$$

oder

$$\delta U = \frac{d_yU}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_pU}{dp}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_qU}{dq}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2}\ \ldots\ldots$$

Ist ferner

$$U = \psi\left(x,\ w,\ \frac{d_xy}{dy},\ \frac{d_wy}{dw},\ \frac{d_x^2y}{dx^2},\ \frac{d_xd_wy}{dx.dw},\ \frac{d_w^2y}{dw^2},\ \ldots\ldots\right)$$

zu mutiren, so setze man p statt $\frac{d_xy}{dx}$, q statt $\frac{d_wy}{dw}$, r statt $\frac{d_x^2y}{dx^2}$, s statt $\frac{d_xd_wy}{dx.dw}$, t statt $\frac{d_w^2y}{dw^2}$, etc.; und man hat

$$U = \psi(x,\ w,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t\ \ldots\ldots)$$

Daraus folgt

$$\delta U = \frac{d_yU}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_pU}{dp}\cdot\delta p + \frac{d_qU}{dq}\cdot\delta q + \frac{d_rU}{dr}\cdot\delta r + \frac{d_sU}{ds}\cdot\delta s + \frac{d_tU}{dt}\cdot\delta t\ \ldots\ldots$$

oder

$$\delta U = \frac{d_yU}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_pU}{dp}\cdot\frac{d_x\delta y}{dx} + \frac{d_qU}{dq}\cdot\frac{d_w\delta y}{dw} + \frac{d_rU}{dr}\cdot\frac{d_x^2\delta y}{dx^2}$$
$$+ \frac{d_sU}{ds}\cdot\frac{d_yd_w\delta y}{dx.dw} + \frac{d_tU}{dt}\cdot\frac{d_w^2\delta y}{dw^2} + \ldots\ldots$$

Ist ferner

$$U = \psi\left(x,\ y,\ \int_a^x v\cdot dx,\ \int_a^x w\cdot dx\ \ldots\ldots\right)$$

zu mutiren, so setze man wieder p statt $\int_a^x v \cdot dx$, q statt $\int_a^x w \cdot dx$, etc.; und man hat

$$U = \psi(x, y, p, q \ldots.)$$

Daraus folgt

$$\delta U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p U}{dp} \cdot \delta p + \frac{d_q U}{dq} \cdot \delta q + \ldots\ldots.$$

oder

$$\delta U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p U}{dp} \cdot \int_a^x \delta v \cdot dx + \frac{d_q U}{dq} \cdot \int_a^x \delta w \cdot dx + \ldots\ldots$$

Ist ebenso

$$U = \psi\left(x, w, y, \int_a^x \int_b^w z \cdot dw \cdot dx \ldots\ldots\right)$$

zu mutiren, so setze man p anstatt $\int_a^x \int_b^w z \cdot dw \cdot dx$, etc.; und man hat

$$U = \psi(x, w, y, p \ldots\ldots)$$

Daraus folgt

$$\delta U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p U}{dp} \cdot \delta p + \ldots\ldots$$

oder

$$\delta U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p U}{dp} \cdot \int_a^x \int_b^w \delta z \cdot dw \cdot dx + \ldots\ldots$$

Und so fort.

§. 73. Im Allgemeinen mag sich das bisherige Verfahren auf folgende Weise darstellen lassen:

1) Ist $U = \psi(x \ldots. w, y, z \ldots. v)$ zu mutiren, wo die Elemente $y, z \ldots. v$ unmittelbar mutabel und unter sich ganz unabhängig sind; so bekommt man die einzelnen Mutationscoefficienten δU, $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc., wenn man U nach allen mutablen Elementen differentiirt, die Differentiale derselben als veränderlich behandelt, und hierauf δy, $\delta z \ldots. \delta v$, $\delta^2 y$, $\delta^2 z \ldots. \delta^2 v$, etc. bezüglich anstatt dy, $dz \ldots. dv$, $d^2 y$, $d^2 z \ldots d^2 v$, etc. setzt.

Ist U nicht entwickelt, sondern durch die Gleichung $F(x \ldots w, y, z \ldots v, U) = 0$ gegeben, wo die Elemente $y, z \ldots. v$ unmittelbar mutabel und unter sich ganz unabhängig sind; so mutirt man diese Gleichung nach den Elementen $y, z \ldots. v$, U grade so, wie eine entwickelte Function. Dabei setzt man aber die Mutationsgleichungen jeder einzelnen Ordnung für sich gleich Null, und bestimmt hierauf successive δU, $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, etc. mittelst Elimination.

2) Ist aber $U = \psi(x \ldots. w, y, z \ldots. v)$ gegeben, während noch die Bedingungsgleichungen

$$F_1(x \ldots. w, y, z \ldots. v) = 0$$
$$F_2(x \ldots. w, y, z \ldots. v) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_n(x \ldots. w, y, z \ldots. v) = 0$$

bestehen sollen; so sind die Coefficienten so vieler der Reihen $y_\varkappa$, $z_\varkappa \ldots. v_\varkappa$ abhängig, als einzelne Bedingungsgleichungen vorhanden sind. Die mutablen Elemente $y, z \ldots. v$ brauchen aber weder in der Hauptfunction $U = \psi(x \ldots. w, y, z \ldots. v)$ alle zugleich vorzukommen, noch müssen sie alle in jeder einzelnen Bedingungsgleichung vorkommen; sondern sie können so vertheilt sein, wie es grade der specielle Fall mit sich bringt. Der specielle Fall mag dann auch entscheiden, welche der Elemente $y, z \ldots. v$ mittelbar und welche unmittelbar mutabel sind, oder ob es gleich-

giltig ist, welche man als mittelbar und welche man als unmittelbar mutabel behandelt.

Auch hier kann die Hauptfunction U unentwickelt gegeben sein, sowie auch U in mehreren der gleichzeitig nebeneinander bestehenden Gleichungen vorkommen kann. Das Mutiren bleibt sich immer gleich, nur der Eliminationsprocess wird in den verschiedenen Fällen verschieden sein.

Anhang. Nun sollen einige Beispiele zu §. 62 und §. 63 nachfolgen.

Erstes Beispiel. Es sei $U = a + \sqrt{bx - cy}$ gegeben, wo durch y jede beliebige Function von x dargestellt ist; und y gehe in eine andere Function

$$y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

über, wo durch das erste Glied y ebenfalls noch jede beliebige Function von x dargestellt ist. Hier geht U über in

$$U + \varDelta U = a + \sqrt{bx - cy} - \varkappa \cdot \frac{c}{2 \cdot \sqrt{bx - cy}} \cdot \delta y$$

$$- \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{c}{2 \cdot \sqrt{by - cx}} \cdot \delta^2 y + \frac{c^2}{4 \cdot (bx - cy)^{\frac{3}{2}}} \cdot \delta y^2 \right)$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Da kein anderer mit y versehener Ausdruck in den Nenner dieser Reihe kommen kann, als $(b \cdot x - c \cdot y)$; so bleibt die allgemeine, d. h. nach lauter ganzen positiven Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihenform in allen Fällen richtig, nur nicht wenn $b \cdot x - c \cdot y = 0$, d. h. wenn $y = \frac{b}{c} \cdot x$. Um diese ausnahmsweise Reihenform für $\varDelta U$ zu finden, setze man

$$\frac{b}{c} \cdot x + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

an die Stelle des y in $U = a + \sqrt{b \cdot x - c \cdot y}$ ein, und man bekommt

$$U' + \varDelta U = a + \varkappa^{\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt{-c}) \cdot \left(\delta y + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \right)^{\frac{1}{2}}$$

Hier ist $U' = a$, und $\varDelta U = \varkappa^{\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt{-c}) \cdot \left(\delta y + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \right)^{\frac{1}{2}}$ und man kann das Polynom auf bekannte Weise in eine Reihe verwandeln.

Zweites Beispiel. Es sei $U = a + (bx - cy)^{\frac{1}{2}} + (e \cdot x^2 - g^2 \cdot y)^{\frac{18}{5}}$ gegeben, wo durch y jede beliebige Function von x dargestellt ist. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für $\varDelta U$ die allgemeine, d. h. nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihenform, in welcher der zu $\varkappa$ gehörige Coefficient den Ausdruck $(b \cdot x - cy)$ im Nenner hat, und in welcher der zu $\varkappa^4$ gehörige Coefficient die beiden Ausdrücke $(b \cdot x - c \cdot y)$ und $(e \cdot \varkappa^2 - g^2 \cdot y)$ zugleich im Nenner hat. Ausser diesen beiden kann kein anderer mit y versehener Ausdruck bei irgend einem Gliede der allgemeinen Reihenform in den Nenner kommen. Man kann also für $\varDelta U$ nur zwei ausnahmsweise Reihenformen bekommen.

1) Setzt man $b \cdot x - c \cdot y = 0$, d. h. $y = \frac{b}{c} \cdot x$; so ist $\varkappa^{\frac{1}{2}}$ die niedrigste Potenz des $\varkappa$ in der sich jetzt für $\varDelta U$ ergebenden ausnahmsweisen Reihenform.

2) Setzt man $e \cdot x^2 - g^2 \cdot y = 0$, d. h. $y = \frac{e}{g^2} \cdot x^2$; so folgen bei der sich jetzt für $\varDelta y$ ergebenden ausnahmsweisen Reihenform die Potenzen des $\varkappa$ in nachstehender Ordnung

$$\varkappa, \varkappa^2, \varkappa^3, \varkappa^{\frac{18}{5}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

aufeinander.

Drittes Beispiel. Es sei $U = a + \frac{b}{c \cdot x - e \cdot y}$ gegeben, wo durch y jede beliebige Function von x dargestellt ist. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für ΔU die **allgemeine**, d. h. nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihenform, in welcher schon der zu $\varkappa$ gehörige Coefficient den Ausdruck $(c \cdot x - e \cdot y)$ im Nenner hat. Ausser diesem kann kein anderer mit y versehener Ausdruck bei irgend einem Gliede der **allgemeinen** Reihenform in den Nenner kommen. Man kann also für ΔU nur eine einzige **ausnahmsweise** Reihenform bekommen, nemlich wenn $c \cdot x - e \cdot y = 0$ ist; und dabei hat man

$$U' + \Delta U = a - \frac{b}{e \cdot \left(\varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\right)}$$

Bei der jetzt für ΔU sich ergebenden **ausnahmsweisen** Reihenform folgen die Potenzen des $\varkappa$ in nachstehender Ordnung

$$\varkappa^{-1},\ \varkappa^0,\ \varkappa^1,\ \varkappa^2,\ \varkappa^3,\ \ldots\ldots$$

aufeinander.

Viertes Beispiel. Es sei $U = a + \sqrt{b \cdot x - c \cdot y} + \sqrt[3]{g \cdot x - h \cdot z}$ gegeben, wo sowohl durch y als auch durch z jede beliebige Function von x dargestellt ist; und y und z gehen in andere Functionen

$$y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots$$

$$z + \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 z + \ldots\ldots$$

über. Unter der Voraussetzung, dass die ersten Glieder y und z dieser Reihen ebenfalls noch jede beliebige Function von x vorstellen, gibt sich für ΔU die allgemeine, d. h. nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihenform, in welcher schon der zu $\varkappa$ gehörige Coefficient die beiden Ausdrücke $(b \cdot x - c \cdot y)$ und $(g \cdot x - h \cdot z)$ im Nenner hat. Ausser diesen beiden kann kein anderer mit y oder z versehener Ausdruck bei irgend einem Gliede der allgemeinen Reihenform in den Nenner kommen. Man kann also für ΔU drei ausnahmsweise Reihenformen bekommen.

1) Wenn gleichzeitig $b \cdot x - c \cdot y = 0$ und $g \cdot x - h \cdot z = 0$ ist; und dabei ist $y = \frac{b}{c} \cdot x$ und $z = \frac{g}{h} \cdot x$.

2) Wenn nur $b \cdot x - c \cdot y = 0$ ist, während z eine solche Function von x darstellt, bei welcher die Gleichung $g \cdot x - h \cdot z = 0$ nicht stattfindet.

3) Wenn nur $g \cdot x - h \cdot z = 0$ ist, während y eine solche Function von x darstellt, bei welcher die Gleichung $b \cdot x - c \cdot y = 0$ nicht stattfindet.

Fünftes Beispiel. Es sei $U = a + (bx - cy)^{\frac{1}{2}} + (gx - hz)^{\frac{19}{4}}$, wo durch y und z jede beliebige Function von x dargestellt ist. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für ΔU die allgemeine, d. h. nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihenform, in welcher der zu $\varkappa$ gehörige Coefficient den Ausdruck $(b \cdot x - c \cdot y)$ im Nenner hat, und in welcher der zu $\varkappa^5$ gehörige Coefficient die beiden Ausdrücke $(b \cdot x - c \cdot y)$ und $(g \cdot x - h \cdot z)$ zugleich im Nenner hat. Ausser diesen beiden kann kein anderer mit y oder z versehener Ausdruck bei irgend einem Gliede der allgemeinen Reihenform in den Nenner kommen. Man kann also für ΔU nur drei ausnahmsweise Reihenformen bekommen.

1) Wenn gleichzeitig $b \cdot x - c \cdot y = 0$ und $gx - hz = 0$; und dabei ist $y = \frac{b}{c} \cdot x$ und $z = \frac{g}{h} \cdot x$.

2) Wenn nur $b \cdot x - c \cdot y = 0$, während z eine solche Function von x vorstellt, bei welcher die Gleichung $gx - hz = 0$ nicht stattfindet.

3) Wenn nur $gx - hz = 0$ ist, während y eine solche Function von x vorstellt bei welcher die Gleichung $b \cdot x - c \cdot y = 0$ nicht stattfindet.

Sechstes Beispiel. Es sei $U = a + \sqrt{b \cdot x - c \cdot y + e \cdot z}$ gegeben, wo durch y und z jede beliebige Function von x dargestellt ist. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für $\varDelta U$ die allgemeine, d. h. nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihenform, in welcher schon der zu $\varkappa$ gehörige Coefficient den Ausdruck $(bx - cy + ez)$ im Nenner hat. Ausser diesem kann kein anderer mit y oder z versehener Ausdruck bei irgend einem Gliede der allgemeinen Reihenform in den Nenner kommen. Man kann also für $\varDelta U$ nur eine einzige ausnahmsweise Reihenform bekommen, nemlich wenn $bx - cy + ez = 0$ ist. Durch diese Gleichung ist eine Abhängigkeit ausgesprochen, welche zwischen den Functionen y und z stattfinden muss, wenn sich für $\varDelta U$ eine ausnahmsweise Reihenform ergeben soll. Bei allen andern unendlichvielen zwischen y und z möglichen Beziehungen, wobei die durch die Gleichung $b \cdot x - c \cdot y + e \cdot z = 0$ ausgesprochene Abhängigkeit zwischen y und z nicht stattfindet, ergibt sich für $\varDelta U$ nur die allgemeine Reihenform.

Siebentes Beispiel. Es sei

$$U = a + \sqrt{bx - cy + ez} + (gx + hy + kz)^{\frac{29}{3}}$$

gegeben, wo durch y und z jede beliebige Function von x dargestellt ist. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für $\varDelta U$ die allgemeine, d. h. nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihenform, in welcher der zu $\varkappa$ gehörige Coefficient den Ausdruck $(b \cdot x - c \cdot y + e \cdot z)$ im Nenner hat, und in welcher der zu $\varkappa^{10}$ gehörige Coefficient die beiden Ausdrücke $(bx - cy + ez)$ und $(gx + hy + kz)$ zugleich im Nenner hat. Ausser diesen beiden kann kein anderer mit y oder z versehener Ausdruck bei irgend einem Gliede der allgemeinen Reihenform in den Nenner kommen. Man kann also für $\varDelta U$ nur drei ausnahmsweise Reihenformen bekommen.

1) Wenn zwischen den Functionen y und z diejenige Abhängigkeit stattfindet, welche durch die Gleichung $bx - cy + ez = 0$ ausgesprochen ist; oder

2) wenn zwischen den Functionen y und z diejenige Abhängigkeit stattfindet, welche durch die Gleichung $gx + hy + kz = 0$ ausgesprochen ist; sodann auch

3) wenn zwischen den Functionen y und z gleichzeitig die beiden Abhängigkeiten stattfinden, welche durch die beiden Gleichungen $bx - cy + ez = 0$ und $gx + hy + kz = 0$ ausgesprochen sind, wobei sich für y und z die ganz bestimmten Functionen $y = \frac{bk - eg}{ck + eh} \cdot x$ und $z = -\frac{bh + cg}{ck + eg} \cdot x$ ergeben.

Bei allen andern unendlichvielen zwischen y und z stattfindenden Beziehungen, nur nicht bei den beiden, welche durch die Gleichungen $bx - cy + ez = 0$ und $gx + hy + kz = 0$ ausgesprochen sind, ergibt sich für $\varDelta U$ die allgemeine Reihenform.

b) *Einfache gemischte Mutationen.*

aa) Unmittelbare gemischte Mutationen.

§. 74. Eine Function wird (nach §. 47) unmittelbar mutirt, wenn sie unabhängig für sich allein in eine andere Function übergeht; und sie wird unmittelbar gemischt mutirt, wenn dabei die nichtmutablen Veränderlichen noch Werthänderungen erleiden.

Wenn $\varphi(x)$ eine unmittelbare reine Mutation erleidet, so bekommt man im Allgemeinen die Reihe

$$\text{I)}\quad \varphi(x) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x) + \ldots\ldots$$

Da aber, wenn $\varphi(x)$ eine unmittelbare gemischte Mutation erleidet, das x noch eine Werthänderung erleiden muss, so bekommt man statt der Reihe I jetzt folgende:

$$\text{II)}\quad \varphi(x + Dx) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x + Dx) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x + Dx) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x + Dx) + \ldots\ldots$$

wo Dx, wie gewöhnlich, die Werthänderung des x anzeigt. Nun weiss man aus dem Differentialcalcul, dass, wenn der Werth des x noch ganz allgemein ist, sich die Ausdrücke $\varphi(x + Dx)$, $\delta\varphi(x + Dx)$, $\delta^2\varphi(x + Dx)$, etc. mittelst des Taylor'schen Satzes entwickeln lassen, wobei man folgende Reihen bekommt:

$$\text{III)}\quad \varphi(x + Dx) = \varphi(x) + \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot Dx + \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \cdot \frac{Dx^2}{1.2} + \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} \cdot \frac{Dx^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

$$\text{IV)}\quad \delta\varphi(x + Dx) = \delta\varphi(x) + \frac{d\delta\varphi(x)}{dx} \cdot Dx + \frac{d^2\delta\varphi(x)}{dx^2} \cdot \frac{Dx^2}{1.2} + \frac{d^3\delta\varphi(x)}{dx^3} \cdot \frac{Dx^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

$$\text{V)}\quad \delta^2\varphi(x + Dx) = \delta^2\varphi(x) + \frac{d\delta^2\varphi(x)}{dx} \cdot Dx + \frac{d^2\delta^2\varphi(x)}{dx^2} \cdot \frac{Dx^2}{1.2} + \frac{d^3\delta^2\varphi(x)}{dx^3} \cdot \frac{Dx^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

$$\text{VI)}\quad \delta^3\varphi(x + Dx) = \delta^3\varphi(x) + \frac{d\delta^3\varphi(x)}{dx} \cdot Dx + \frac{d^2\delta^3\varphi(x)}{dx^2} \cdot \frac{Dx^2}{1.2} + \frac{d^3\delta^3\varphi(x)}{dx^3} \cdot \frac{Dx^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

etc. etc.

Wenn aber der Werth des x ein bestimmter ist, so müssen die Reihen III, IV, V, VI, etc. nicht nothwendig giltig sein, sondern sie sind allemal ungiltig, wenn irgend ein Glied Null in den Nenner bekommt. Man wird also alle diese Reihen mittelst des Taylor'schen Satzes so entwickeln, wie wenn der Werth des x ganz allgemein wäre; und dabei wird man zusehen, ob ein Glied, oder ob mehrere Glieder, oder ob alle Glieder das x in den Nenner bekommen; und indem man diese Nenner zu Null werden lässt, kann man alle jene Werthe des x schon im Voraus kennen lernen, bei welchen die Reihen III, IV, V, VI, etc. ihre Giltigkeit verlieren. Somit erkennt man, dass die Anzahl der für x möglichen Werthe, bei welchen diese Reihen ihre Giltigkeit verlieren, eine angebbare geschlossene Anzahl ist, während die Anzahl der für x möglichen Werthe, bei welchen diese Reihen ihre Giltigkeit behalten, eine unendlichgrosse ist. Es sind daher die Fälle, wo diese Reihen ihre Giltigkeit verlieren, nur Ausnahmsfälle; und diese muss man nach den Eigenthümlichkeiten des jedesmal vorliegenden speciellen Falles behandeln.

§. 75. Wenn $\varphi(x, w)$ eine unmittelbare reine Mutation erleidet, so bekommt man im Allgemeinen die Reihe

$$\text{I)}\quad \varphi(x, w) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x, w) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x, w) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x, w) + \ldots\ldots$$

Da aber, wenn $\varphi(x, w)$ eine unmittelbare gemischte Mutation erleidet, das x und das w noch Werthänderungen erleiden müssen, so bekommt man statt der Reihe I jetzt folgende:

$$\text{II)}\quad \varphi(x + Dx, w + Dw) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x + Dx, w + Dw) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x + Dx, w + Dw)$$
$$+ \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x + Dx, w + Dw) + \ldots\ldots\ldots$$

wo Dx und Dw bezüglich die Werthänderungen des x und des w anzeigen. Nun weiss man aus dem Differentialcalcul, dass, wenn die Werthe des x und des w noch allgemein sind, sich die Ausdrücke $\varphi(x + Dx, w + Dw)$, $\delta\varphi(x + Dx, w + Dw)$, $\delta^2\varphi(x + Dx, w + Dw)$, etc. mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes entwickeln lassen, wobei man folgende Reihen bekommt:

$$\text{III)}\quad \varphi(x + Dx, w + Dw) = \varphi(x, w) + \left(\frac{d_x\varphi}{dx} \cdot Dx + \frac{d_w\varphi}{dw} \cdot Dw\right)$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left(\frac{d_x^2\varphi}{dx^2} \cdot Dx^2 + 2 \cdot \frac{d_x d_w\varphi}{dx.dw} \cdot Dx \cdot Dw + \frac{d_w^2\varphi}{dw^2} \cdot Dw^2\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{IV)}\quad \delta\varphi(x + Dx,\, w + Dw) = \delta\varphi(x,\, w) + \left(\frac{d_x\delta\varphi}{dx} \cdot Dx + \frac{d_w\delta\varphi}{dw} \cdot Dw\right)$$

$$+ \frac{1}{1.2} \cdot \left(\frac{d_x^2\delta\varphi}{dx^2} \cdot Dx^2 + 2 \cdot \frac{d_x d_w \delta\varphi}{dx \cdot dw} \cdot Dx \cdot Dw + \frac{d_w^2\delta\varphi}{dw^2} \cdot Dw^2\right)$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\text{V)}\quad \delta^2\varphi(x + Dx,\, w + Dw) = \delta^2\varphi(x,\, w) + \left(\frac{d_x\delta^2\varphi}{dx} \cdot Dx + \frac{d_w\delta^2\varphi}{dw} \cdot Dw\right)$$

$$+ \frac{1}{1.2} \cdot \left(\frac{d_x^2\delta^2\varphi}{dx^2} \cdot Dx^2 + 2 \cdot \frac{d_x d_w \delta^2\varphi}{dx \cdot dw} \cdot Dx \cdot Dw + \frac{d_w^2\delta^2\varphi}{dw^2} \cdot Dw^2\right)$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

etc. etc.

Wenn aber das x und das w bestimmte Werthe haben, so müssen die Reihen III, IV, V, etc. nicht nothwendig giltig sein, sondern sie sind allemal ungiltig, wenn irgend ein Glied Null in den Nenner bekommt. Man wird aber auch hier alle Reihen mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes so entwickeln, wie wenn die Werthe des x und des w ganz allgemein wären; und die Reihen wird man soweit fortsetzen, bis man überzeugt ist, dass kein späteres Glied mehr in den Nenner einen Ausdruck bekommen kann, welcher nicht schon in dem Nenner eines bereits hergestellten Gliedes vorkommt. Man kann also auch hier schon im Voraus alle Fälle kennen lernen, bei welchen man nicht die Form der Reihen III, IV, V, etc. bekommt. Somit erkennt man abermals, dass die Fälle, wo die Form der Reihen III, IV, V, etc. ungiltig ist, nur Ausnahmsfälle sind. Solche Reihen muss man jedesmal nach den Eigenthümlichkeiten des grade vorliegenden speciellen Falles entwickeln.

Es ist nun nicht mehr nöthig, diese Betrachtung auf Ausdrücke auszudehnen, wo mehr als zwei nichtmutable Veränderliche enthalten sind.

Da in der allgemeinen Theorie von jedem bestimmten Werthe der nichtmutablen Veränderlichen abstrahirt werden muss, so kann die allgemeine Theorie auch weiter nichts thun, als die allgemeine Form der unmittelbaren gemischten Mutationen herstellen, mit der Ermahnung, in der Anwendung jedesmal darauf zu achten, ob und wann Ausnahmsfälle stattfinden.

§. 76. Das nächste Bestreben muss nun sein, die gemischten Mutationen durch denselben Calcul zu entwickeln, durch welchen die reinen entwickelt werden. Es wird aber zweckmässig sein, folgende zwei Unterscheidungen zu machen:

1) Die nichtmutablen Veränderlichen x, w s sind alle absolut unabhängig. Hier setze man $\varkappa \cdot \vartheta x$ statt Dx, $\varkappa \cdot \vartheta w$ statt Dw, etc., und $\varkappa \cdot \vartheta s$ statt Ds. In dem Falle, wo die Werthänderungen entweder als positiv oder als negativ der Null nächstanliegen sollen, setze man den gemeinschaftlichen Factor $\varkappa$ in den Moment des Verschwindens; dagegen den Factoren ϑx, ϑw ϑs lege man endliche übrigens nach Belieben positive oder negative Werthe bei. Da aber, wie schon am Schlusse des vorigen §. auseinandergesetzt ist, die allgemeine Theorie weiter nichts thun kann, als die allgemeine Form der unmittelbaren gemischten Mutationen herstellen; so wird man jetzt eine nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe bekommen, welche mittelst des Maclaurin'schen Satzes entwickelt wird.

2) Sind aber einige der nichtmutablen Veränderlichen x, w s abhängig, so lässt sich hier, wo von jedem bestimmten Werthe der unabhängigen Veränderlichen abstrahirt werden muss, die Werthänderung der Abhängigen nur in Form einer nach positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigenden Reihe herstellen. Die so hohe Wichtigkeit, jede allgemeine Theorie für alle Fälle gleichförmig zu machen, veranlasst aber, für alle Werthänderungen, sie mögen abhängig oder unabhängig sein, die Reihenformen

$$\varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\varkappa \cdot \vartheta w + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 w + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 w + \ldots\ldots\ldots$$

. .

$$\varkappa \cdot \vartheta s + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 s + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 s + \ldots\ldots\ldots$$

statt Dx, Dw, ... Ds zu setzen, und die unmittelbaren gemischten Mutationen in nach lauter positiven ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihen zu entwickeln.

Hier mag man Dx, Dw, . . . Ds oder die ihnen gleichkommenden Reihen mit dem Namen Gesammtdifferenzen belegen; dagegen die einzelnen Glieder $\varkappa \cdot \vartheta x$, $\varkappa \cdot \vartheta w$, ..., $\varkappa \cdot \vartheta s$, $\frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x$, $\frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 w$, . . ., $\frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 s$, etc. mag man Differenztheile, und zwar bezüglich ersten, zweiten, dritten, etc. Differenztheil, und die Coefficienten ϑx, ϑw, ... ϑs, $\vartheta^2 x$, $\vartheta^2 w$, ... $\vartheta^2 s$ etc. mag man bezüglich ersten, zweiten, dritten, etc. Differenzcoefficient nennen. Alle diese Benennungen sind nach Analogie derer, welche (in §. 57) für Δy, für $\varkappa \cdot \delta y$, $\frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y$, etc., und für δy, $\delta^2 y$; etc., aufgestellt wurden, gebildet.

Sind aber die Reihen einmal so entwickelt, dann kann man ihnen in den Fällen, wo man statt einer oder statt einiger oder statt aller der Gesammtdifferenzen Dx, Dw, ... Ds bezüglich nur die Producte $\varkappa \cdot \vartheta x$, $\varkappa \cdot \vartheta w$, ... $\varkappa \cdot \vartheta s$ zu setzen braucht, ihre einfachere Form dadurch geben, dass man alle Differenzcoefficienten der zweiten und höheren Ordnungen zu Null werden lässt. (Man sehe den Schluss des §. 77 und des §. 78; ferner auch die Aufgaben 2 und 16.)

Die schon (in §. 57) gemachte Abkürzung, nemlich $y_\varkappa$ statt der Reihe

$$y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

zu setzen, mag nun auch auf die hier befindlichen Reihen ausgedehnt werden, und man mag gleichfalls

$$x_\varkappa \text{ statt } x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x + \ldots\ldots\ldots$$

$$w_\varkappa \text{ statt } w + \varkappa \cdot \vartheta w + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 w + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 w + \ldots\ldots\ldots$$

. .

$$s_\varkappa \text{ statt } s + \varkappa \cdot \vartheta s + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 s + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 s + \ldots\ldots\ldots$$

setzen, indem man $x_\varkappa$, $w_\varkappa$, ... $s_\varkappa$ als Functionen des einzigen Veränderlichen $\varkappa$ betrachtet.

Wenn ferner y, z, etc. gemischte Mutationen erleiden, so mögen die sich ergebenden Reihen durch $y_{(\varkappa)}$, $z_{(\varkappa)}$, etc. bezeichnet werden. Die Coefficienten der Reihe $y_{(\varkappa)}$ bezeichne man ebenso durch $_{(}\delta_{)}y$, $_{(}\delta_{)}^2y$, $_{(}\delta_{)}^3y$, etc. Eine gemischte Gesammtmutation bezeichne man durch $_{(}\Delta_{)}y$, $_{(}\Delta_{)}z$, etc.

Die hier gebrauchten Klammern mögen aus dem Grunde als zweckmässig erscheinen, weil Klammern jedesmal an zusammengesetzte Ausdrücke erinnern.

§. 77. Es sei $y = \varphi(x)$ gegeben, und erleide eine unmittelbare reine Mutation, d. h. gehe über in die Reihe

$$\text{I)}\quad y_\varkappa = \varphi(x) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x) + \ldots\ldots\ldots$$

Geht nun auch x zugleich über in die Reihe

$$\text{II)}\quad x_\varkappa = x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x + \ldots\ldots\ldots$$

so bekommt man statt der Reihe I jetzt folgende:

$$\text{III)}\quad y_{(\varkappa)} = \varphi(x_\varkappa) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x_\varkappa) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x_\varkappa) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x_\varkappa) + \ldots\ldots\ldots$$

Es kommt nun darauf an, die Reihe $y_{(\varkappa)}$ nach aufsteigenden Potenzen des $\varkappa$ zu ordnen, so dass man bekommt

$$\text{IV)}\quad y_{(\varkappa)} = y + \varkappa \cdot (\delta)y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\delta)^2y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot (\delta)^3y + \ldots\ldots\ldots$$

Die Coefficienten dieser Reihe werden nun mittelst des Maclaurin'schen Satzes entwickelt, wie folgt:

1) $y = \varphi(x)$

$$2)\quad (\delta)y = \left(\frac{dy_{(\varkappa)}}{d\varkappa}\right)_0 = \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot \left(\frac{dx_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0 + \delta\varphi(x) = \frac{dy}{dx} \cdot \vartheta x + \delta y$$

$$3)\quad (\delta)^2y = \left(\frac{d^2y_{(\varkappa)}}{d\varkappa^2}\right)_0 = \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot \left(\frac{d^2x_\varkappa}{d\varkappa^2}\right)_0 + \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \cdot \left(\frac{dx_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0^2 + 2 \cdot \frac{d\delta\varphi(x)}{dx} \cdot \left(\frac{dx_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0$$

$$+ \delta^2\varphi(x) = \frac{dy}{dx} \cdot \vartheta^2 x + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + 2 \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \vartheta x + \delta^2 y$$

Auf die nemliche Weise bekommt man

$$4)\quad (\delta)^3y = \left(\frac{d^3y_{(\varkappa)}}{d\varkappa^3}\right)_0 = \frac{dy}{dx} \cdot \vartheta^3 x + 3 \cdot \left(\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \vartheta x + \frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot \vartheta^2 x$$

$$+ \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \vartheta x^3 + 3 \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + 3 \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} \cdot \vartheta x + \delta^3 y$$

etc. etc.

Eine Regel für das Verfahren, wodurch man diese gemischten Mutationscoefficienten herstellt, ist folgende:

„Man denke sich in der einfachen Reihe

$$y_\varkappa = y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots$$

„an die Stelle des x die Reihe $x_\varkappa$ gesetzt, differentiire dann einmal, zweimal, dreimal „etc. nach allem $\varkappa$, und setze zuletzt $\varkappa = 0$."

Indem man aber die für $(\delta)y$, $(\delta)^2y$, $(\delta)^3y$ etc. erhaltenen Ausdrücke in die Reihe

$$(\Delta)y = \varkappa \cdot (\delta)y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\delta)^2y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot (\delta)^3y + \ldots\ldots\ldots$$

einsetzt, bekommt man die gemischte Gesammtmutation des y.

Mittelst der Gleichungen 2), 3). 4) lassen sich auch umgekehrt die reinen Mutationscoefficienten δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$ etc. durch die gemischten ausdrücken, was in Fällen der Anwendung sehr oft nöthig ist.

Unter den hierher gehörigen speciellen Fällen beachte man besonders den, wo die Gesammtdifferenz von x bloss $\varkappa \cdot \vartheta x$ ist; dabei ist $\vartheta^2 x = 0$, $\vartheta^3 x = 0$, $\vartheta^4 x = 0$ etc., und die Gleichungen 2, 3, 4 ziehen sich zurück auf

$$(\delta)y = \delta y + \frac{dy}{dz} \cdot \vartheta x$$

$$(\delta)^2y = \delta^2 y + 2 \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \vartheta x^2$$

$$(\delta)^3y = \delta^3 y + 3 \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} \cdot \vartheta x + 3 \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \vartheta x^3$$

und so fort.

§. 78. Es sei $y = \varphi(x, w)$ gegeben, und erleide eine unmittelbare reine Mutation, d. h. gehe über in die Reihe

$$\text{I)}\quad y_\varkappa = \varphi(x, w) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x, w) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x, w) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x, w) + \ldots\ldots$$

Gehen nun x und w bezüglich über in die Reihen

$$\text{II)}\quad x_\varkappa = x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x + \ldots\ldots\ldots$$

und

$$\text{III)}\quad w_\varkappa = w + \varkappa \cdot \vartheta w + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 w + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 w + \ldots\ldots\ldots$$

so bekommt man statt der Reihe I jetzt folgende:

$$\text{IV)}\quad y_{(\varkappa)} = \varphi(x_\varkappa, w_\varkappa) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x_\varkappa, w_\varkappa) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x_\varkappa, w_\varkappa)$$

$$+ \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x_\varkappa, w_\varkappa) + \ldots\ldots\ldots$$

Es kommt nun darauf an, die Reihe $y_{(\varkappa)}$ nach aufsteigenden Potenzen des $\varkappa$ zu ordnen, so dass man bekommt:

$$\text{V)}\quad y_{(\varkappa)} = y + \varkappa \cdot {}_{(\delta)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(\delta)}^{2}y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(\delta)}^{3}y + \ldots\ldots$$

Die Coefficienten dieser Reihe werden mittelst des Maclaurin'schen Satzes entwickelt, wie folgt:

1) $y = \varphi(x, w)$

$$2)\quad {}_{(\delta)}y = \left(\frac{dy_{(\varkappa)}}{d\varkappa}\right)_0 = \frac{d_x\varphi}{dx} \cdot \left(\frac{dx_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0 + \frac{d_w\varphi}{dw} \cdot \left(\frac{dw_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0 + \delta\varphi$$

$$= \frac{d_x y}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d_w y}{dw} \cdot \vartheta w + \delta y$$

$$3)\quad {}_{(\delta)}^{2}y = \left(\frac{d^2 y_{(\varkappa)}}{d\varkappa^2}\right)_0 = \frac{d_x\varphi}{dx} \cdot \left(\frac{d^2 x_\varkappa}{d\varkappa^2}\right)_0 + \frac{d_w\varphi}{dw} \cdot \left(\frac{d^2 w_\varkappa}{d\varkappa^2}\right)_0 + \frac{d_x^2\varphi}{dx^2} \cdot \left(\frac{dx_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0^2$$

$$+ 2 \cdot \frac{d_x d_w \varphi}{dx.dw} \cdot \left(\frac{dx_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0 \cdot \left(\frac{dw_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0 + \frac{d_w^2\varphi}{dw^2} \cdot \left(\frac{dw_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0^2 + 2 \cdot \frac{d_x\delta\varphi}{dx} \cdot \left(\frac{dx_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0$$

$$+ 2 \cdot \frac{d_w\delta\varphi}{dw} \cdot \left(\frac{dw_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0 + \delta^2\varphi = \frac{d_x y}{dx} \cdot \vartheta^2 x + \frac{d_w y}{dw} \cdot \vartheta^2 w + \frac{d_x^2 y}{dx^2} \cdot \vartheta x^2$$

$$+ 2 \cdot \frac{d_x d_w y}{dx.dw} \cdot \vartheta x \cdot \vartheta w + \frac{d_w^2 y}{dw^2} \cdot \vartheta w^2 + 2 \cdot \frac{d_x \delta y}{dx} \cdot \vartheta x + 2 \cdot \frac{d_w \delta y}{dw} \cdot \vartheta w + \delta^2 y$$

etc. etc.

Eine Regel für das Verfahren, wodurch man diese gemischten Mutationscoefficienten herstellt, ist folgende:

„Man denke sich in der einfachen Reihe

$$y_\varkappa = y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots$$

„an die Stelle des x und des w bezüglich die Reihen $x_\varkappa$ und $w_\varkappa$ gesetzt, differentiire „dann einmal, zweimal, dreimal, etc. nach allem $\varkappa$, und setze zuletzt $\varkappa = 0$."

Indem man aber die für ${}_{(\delta)}y$, ${}_{(\delta)}^{2}y$, ${}_{(\delta)}^{3}y$, etc. erhaltenen Ausdrücke in die Reihe

$${}_{(\Delta)}y = \varkappa \cdot {}_{(\delta)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(\delta)}^{2}y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(\delta)}^{3}y + \ldots\ldots\ldots$$

einsetzt, bekommt man die gemischte Gesammtmutation des y.

Mittelst der Gleichungen 2), 3), ... lassen sich auch umgekehrt die reinen Mutationscoefficienten δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. durch die gemischten ausdrücken, was in Fällen der Anwendung sehr oft nöthig ist.

Unter den hierher gehörigen speciellen Fällen beachte man besonders den, wo die Gesammtdifferenzen von x und w bezüglich bloss $\varkappa \cdot \vartheta x$ und $\varkappa \cdot \vartheta w$ sind; dabei ist $\vartheta^2 x = 0$, $\vartheta^2 w = 0$, $\vartheta^3 x = 0$, $\vartheta^3 w = 0$, etc.

Es ist nun nicht mehr nöthig, diese Theorie auf Fälle auszudehnen, wo mehr als zwei nichtmutable Veränderliche vorkommen.

bb) Mittelbare gemischte Mutationen.

§. 79. Eine Function wird (nach §. 47) mittelbar mutirt, wenn eine andere Function, von welcher sie abhangt, mutirt wird, oder wenn andere Functionen, von welchen sie abhangt, mutirt werden; und sie wird mittelbar gemischt mutirt, wenn dabei die nichtmutablen Veränderlichen noch Werthänderungen erleiden.

Es sei $U = \psi(x, y)$ ein auf bestimmte Weise aus den Elementen x und y gebildeter Ausdruck, welcher nur das einzige unmittelbar mutable Element y enthält; und y sei eine Function des nichtmutablen Veränderlichen x. Ferner während y mutirt wird, erleide das x noch eine Werthänderung; dabei geht $U = \psi(x, y)$ über in $U_{(\varkappa)} = \psi(x_\varkappa, y_{(\varkappa)})$, wo bekanntlich

$$\text{I)}\quad x_\varkappa = x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\text{II)}\quad y_{(\varkappa)} = y + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y \cdot \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 y + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

ist. Die aus $U_{(\varkappa)}$ folgende Reihe ist

$$\text{III)}\quad U_{(\varkappa)} = U + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 U + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und man kann den Coefficienten ${}_{(}\delta_{)}U$, ${}_{(}\delta_{)}^2 U$, $\delta_{)}^3 U$, etc. zweierlei Formen geben, jenachdem man die Ausdrücke ${}_{(}\delta_{)}y$, ${}_{(}\delta_{)}^2 y$, ${}_{(}\delta_{)}^3 y$, etc. zulässt, oder nur die Ausdrücke δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. haben will. Welche Form man aber jedesmal wählt, hangt von dem jedesmaligen Zwecke ab.

Erste Form. Aus $U_{(\varkappa)} = \psi(x_\varkappa, y_{(\varkappa)})$ bekommt man nach und nach

$$\text{IV)}\quad U = \psi(x, y)$$

$$\text{V)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = \left(\frac{dU_{(\varkappa)}}{d\varkappa}\right)_0 = \frac{d_y U}{dy} \cdot \left(\frac{dy_{(\varkappa)}}{d\varkappa}\right)_0 + \frac{d_x U}{dx} \cdot \left(\frac{dx_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0 \quad \cdot$$

$$= \frac{d_y U}{dy} \cdot (\delta) y + \frac{d_x U}{dx} \cdot \vartheta x$$

$$\text{VI)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2 U = \left(\frac{d^2 U_{(\varkappa)}}{d\varkappa^2}\right)_0 = \frac{d_y U}{dy} \cdot \left(\frac{d^2 y_{(\varkappa)}}{d\varkappa^2}\right)_0 + \frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy_{(\varkappa)}}{d\varkappa}\right)_0^2$$

$$+ 2 \cdot \frac{d_y d_x U}{dy.dx} \cdot \left(\frac{dy_{(\varkappa)}}{d\varkappa}\right)_0 \cdot \left(\frac{dx_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0 + \frac{d_x^2 U}{dx^2} \cdot \left(\frac{dx_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0^2 + \frac{d_x U}{dx} \cdot \left(\frac{d^2 x_\varkappa}{d\varkappa^2}\right)_0$$

$$= \frac{d_y U}{dy} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot {}_{(}\delta_{)}y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_x U}{dy.dx} \cdot {}_{(}\delta y \cdot \vartheta x + \frac{d_x^2 U}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + \frac{d_x U}{dx} \cdot \vartheta^2 x$$

etc. etc

Man erkennt nun schon, dass dieses Verfahren mit dem reinen Mutiren nach y und x übereinstimmt, nur hat man ${}_{(}\delta_{)}y$, ϑx, ${}_{(}\delta_{)}^2 y$, $\vartheta^2 x$, etc. bezüglich statt δy, δx, $\delta^2 y$, $\delta^2 x$, etc. zu setzen. Setzt man hierauf statt ${}_{(}\delta_{)}y$, ${}_{(}\delta_{)}^2 y$, etc. die entsprechenden (in §. 77 hergestellten) Ausdrücke ein, und nimmt dann alle Vereinfachungen vor; so bekommt man die

Zweite Form. Dieses Verfahren ist jedoch zu weitläufig, und man beobachte lieber folgende Regel:

„Man denke sich in der einfachen Reihe

$$U_\varkappa = U + \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

„an die Stelle jedes sowohl unmittelbar als auch mittelbar in y, δy, $\delta^2 y$, etc. enthaltenen x die Reihe $x_\varkappa$ gesetzt, differentiire dann einmal, zweimal, dreimal, etc. nach „allem $\varkappa$, und setze zuletzt $\varkappa = 0$."

So verfahrend bekommt man

$$\text{VII)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = \left(\frac{dU_{(\varkappa)}}{d\varkappa}\right)_0 = \delta U + \frac{dU}{dx}\cdot\left(\frac{dx_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0 = \delta U + \frac{dU}{dx}\cdot\vartheta x$$

$$\text{VIII)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2U = \left(\frac{d^2U_{(\varkappa)}}{d\varkappa^2}\right)_0 = \delta^2U + 2\cdot\frac{d\delta U}{dx}\cdot\left(\frac{dx_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0 + \frac{d^2U}{dx^2}\cdot\left(\frac{dx_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0^2 + \frac{dU}{dx}\cdot\left(\frac{d^2x_\varkappa}{d\varkappa^2}\right)_0$$

$$= \delta^2U + 2\cdot\frac{d\delta U}{dx}\cdot\vartheta x + \frac{d^2U}{dx^2}\cdot\vartheta x^2 + \frac{dU}{dx}\cdot\vartheta^2 x$$

etc. etc.

Diese Ausdrücke der zweiten Form sind mit denen der ersten Form ganz gleichbedeutend. Nun ist $\delta U = \frac{d_y U}{dy}\cdot\delta y$, also ist

$$\frac{d\delta U}{dx} = \frac{d\left(\frac{d_y U}{dy}\right)}{dx}\cdot\delta y + \frac{d_y U}{dy}\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$

Ferner ist $\delta^2 U = \frac{d_y^2 U}{dy^2}\cdot\delta y^2 + \frac{d_y U}{dy}\cdot\delta^2 y$, und sonach gehen die Gleichungen VII und VIII bezüglich über in

$$\text{IX)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = \frac{d_y U}{dy}\cdot\delta y + \frac{dU}{dx}\cdot\vartheta x$$

$$\text{X)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2U = \frac{d_y U}{dy}\cdot\delta^2 y + \frac{d_y^2 U}{dy^2}\cdot\delta y^2 + 2\cdot\left(\frac{d\left(\frac{d_y U}{dy}\right)}{dx}\cdot\delta y + \frac{d_y U}{dy}\cdot\frac{d\delta y}{dx}\right)\cdot\vartheta x$$

$$+ \frac{d^2U}{dx^2}\cdot\vartheta x^2 + \frac{dU}{dx}\cdot\vartheta^2 x$$

etc. etc.

Die Bedeutung von $\frac{dU}{dx}$, $\frac{d^2U}{dx^2}$, $\frac{d\left(\frac{d_y U}{dy}\right)}{dx}$, etc. ist (aus §. 2) bekannt.

§. 80. Es sei $U = \psi(x, y, z)$ ein auf bestimmte Weise aus den Elementen x, y, z gebildeter Ausdruck, welcher nur die zwei von einander unabhängigen unmittelbar mutablen Elemente y und z enthält; und y und z seien Functionen des nichtmutablen Veränderlichen x. Ferner während y und z mutirt werden, erleide das x noch eine Werthänderung. Dabei geht $U = \psi(x, y, z)$ über in $U_{(\varkappa)} = \psi(x_\varkappa, y_{(\varkappa)}, z_{(\varkappa)})$, wo bekanntlich

$$\text{I)}\quad x_\varkappa = x + \varkappa\cdot\vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\vartheta^3 x + \ldots\ldots$$

$$\text{II)}\quad y_{(\varkappa)} = y + \varkappa\cdot{}_{(}\delta_{)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot{}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot{}_{(}\delta_{)}^3 y + \ldots\ldots$$

$$\text{III)}\quad z_{(\varkappa)} = z + \varkappa\cdot{}_{(}\delta_{)}z + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot{}_{(}\delta_{)}^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot{}_{(}\delta_{)}^3 z + \ldots\ldots$$

ist. Die aus $U_{(\varkappa)}$ folgende Reihe ist

$$\text{IV)}\quad U_{(\varkappa)} = U + \varkappa\cdot{}_{(}\delta_{)}U + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot{}_{(}\delta_{)}^2U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot{}_{(}\delta_{)}^3U + \ldots\ldots$$

und man kann den Coefficienten ${}_{(}\delta_{)}U$, ${}_{(}\delta_{)}^2U$, ${}_{(}\delta_{)}^3U$, etc. zweierlei Formen geben, jenachdem man die Ausdrücke ${}_{(}\delta_{)}y$, ${}_{(}\delta_{)}z$, ${}_{(}\delta_{)}^2y$, ${}_{(}\delta_{)}^2z$, etc. zulässt, oder nur die Ausdrücke

δy, δz, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, etc. haben will. Welche Form man aber jedesmal wählt, hängt von dem jedesmaligen Zwecke ab.

Erste Form. Aus $U_{(\varkappa)} = \psi(x_\varkappa, y_{(\varkappa)}, z_{(\varkappa)})$ bekommt man nach und nach

$$\text{V)} \quad U = \psi(x, y, z)$$

$$\text{VI)} \quad {}_{(}\delta_{)}U = \left(\frac{dU_{(\varkappa)}}{d\varkappa}\right)_0 = \frac{d_yU}{dy} \cdot \left(\frac{dy_{(\varkappa)}}{d\varkappa}\right)_0 + \frac{d_zU}{dz} \cdot \left(\frac{dz_{(\varkappa)}}{d\varkappa}\right)_0 + \frac{d_xU}{dx} \cdot \left(\frac{dx_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0$$

$$= \frac{d_yU}{dy} \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{d_zU}{dz} \cdot {}_{(}\delta_{)}z + \frac{d_xU}{dx} \cdot \vartheta x$$

etc. etc.

Man erkennt nun, dass auch hier das Verfahren mit dem reinen Mutiren nach y, z und x übereinstimmt, nur hat man ${}_{(}\delta_{)}y$, ${}_{(}\delta_{)}z$, ϑx, ${}_{(}\delta_{)}^2 y$, ${}_{(}\delta_{)}^2 z$, $\vartheta^2 x$, etc. bezüglich statt δy, δz, δx, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, $\delta^2 x$, etc. zu setzen. Setzt man hierauf für ${}_{(}\delta_{)}y$, ${}_{(}\delta_{)}z$, ${}_{(}\delta_{)}^2 y$, ${}_{(}\delta_{)}^2 z$, etc. die entsprechenden (in §. 77 hergestellten) Ausdrücke, und nimmt alle möglichen Vereinfachungen vor; so bekommt man die

Zweite Form. Allein dieses Verfahren ist viel zu weitläufig, so dass man lieber auch hier die im vorigen §. gegebene Regel beobachtet, d. h.

„Man denke sich in der einfachen Reihe

$$U_\varkappa = U + \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

„an die Stelle jedes sowohl unmittelbar als auch mittelbar in y, z, δy, δz, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, „enthaltenen x die Reihe $x_\varkappa$ gesetzt, differentiire dann einmal, zweimal, dreimal, etc. „nach allem $\varkappa$, und setze zuletzt $\varkappa = 0$."

So verfahrend bekommt man wieder, wie im vorigen §.

$$\text{VII)} \quad {}_{(}\delta_{)}U = \delta U + \frac{dU}{dx} \cdot \vartheta x$$

$$\text{VIII)} \quad {}_{(}\delta_{)}^2 U = \delta^2 U + 2 \cdot \frac{d\delta U}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d^2U}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + \frac{dU}{dx} \cdot \vartheta^2 x$$

etc. etc.

Allein jetzt ist $\delta U = \frac{d_yU}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_zU}{dz} \cdot \delta z$; folglich ist

$$\frac{d\delta U}{dx} = \frac{d\left(\frac{d_yU}{dy}\right)}{dx} \cdot \delta y + \frac{d_yU}{dy} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d\left(\frac{d_zU}{dz}\right)}{dx} \cdot \delta z + \frac{d_zU}{dz} \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

Die Bedeutung von $\delta^2 U$ ist (aus §. 65) bekannt. Also ist jetzt

$$\text{IX)} \quad {}_{(}\delta_{)}U = \frac{d_yU}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_zU}{dz} \cdot \delta z + \frac{dU}{dx} \cdot \vartheta x$$

$$\text{X)} \quad {}_{(}\delta_{)}^2 U = \frac{d_yU}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_zU}{dz} \cdot \delta^2 z + \frac{d_y^2U}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_yd_zU}{dy.dz} \cdot \delta y \cdot \delta z$$

$$+ \frac{d_z^2U}{dz^2} \cdot \delta z^2 + 2 \cdot \left(\frac{d\left(\frac{d_yU}{dy}\right)}{dx} \cdot \delta y + \frac{d_yU}{dy} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d\left(\frac{d_zU}{dz}\right)}{dx} \cdot dz \right.$$

$$\left. + \frac{d_zU}{dz} \cdot \frac{d\delta z}{dx} \right) \cdot \vartheta x + \frac{d^2U}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + \frac{dU}{dx} \cdot \vartheta^2 x$$

etc. etc.

Die Bedeutung von $\frac{dU}{dx}$, $\frac{d^2U}{dx^2}$, $\frac{d\left(\frac{d_yU}{dy}\right)}{dx}$, $\frac{d\left(\frac{d_zU}{dz}\right)}{dx}$, etc. ist (aus §. 3) bekannt.

Diese Ausdrücke der zweiten Form sind mit jenen der ersten Form ganz gleichbedeutend.

§. 81. Es sei $U = \psi(x, w, y)$ ein auf bestimmte Weise aus den Elementen x, w, y, gebildeter Ausdruck, welcher nur das einzige unmittelbar mutable Element y, und die zwei von einander unabhängigen nichtmutabeln Veränderlichen x und w enthält; und y sei eine Function von x und w. Ferner während y mutirt wird, erleiden x und w noch Werthänderungen. Dabei geht $U = \psi(x, w, y)$ über in $U_{(\varkappa)} = \psi(x_\varkappa, w_\varkappa, y_{(\varkappa)})$, wo bekanntlich

$$\text{I)}\quad x_\varkappa = x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x + \ldots\ldots\ldots$$

$$\text{II)}\quad w_\varkappa = w + \varkappa \cdot \vartheta w + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 w + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 w + \ldots\ldots\ldots$$

$$\text{III)}\quad y_{(\varkappa)} = y + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 y + \ldots\ldots$$

ist. Die aus $U_{(\varkappa)}$ folgende Reihe ist

$$\text{IV)}\quad U_{(\varkappa)} = U + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 U + \ldots\ldots$$

und man kann den Coefficienten ${}_{(}\delta_{)}U$, ${}_{(}\delta_{)}^2U$, etc. zweierlei Formen geben, jenachdem man die Ausdrücke ${}_{(}\delta_{)}y$, ${}_{(}\delta_{)}^2y$, etc. zulässt, oder nur die Ausdrücke δy, $\delta^2 y$, etc. haben will. Welche Form man aber jedesmal wählt, hangt von dem jedesmaligen Zwecke ab.

Erste Form. Aus $U_{(\varkappa)} = \psi(x_\varkappa, w_\varkappa, y_{(\varkappa)})$ folgt nach und nach

$$\text{V)}\quad U = \psi(x, w, y)$$

$$\text{VI)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = \left(\frac{dU_{(\varkappa)}}{d\varkappa}\right)_0 = \frac{d_yU}{dy} \cdot \left(\frac{dy_{(\varkappa)}}{d\varkappa}\right)_0 + \frac{d_xU}{dx} \cdot \left(\frac{dx_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0 + \frac{d_wU}{dw} \cdot \left(\frac{dw_\varkappa}{d\varkappa}\right)_0$$

$$= \frac{d_yU}{dy} \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{d_xU}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d_wU}{dw} \cdot \vartheta w$$

etc. etc.

Man erkennt nun, dass auch hier das Verfahren mit dem reinen Mutiren nach y, x und w übereinstimmt, nur hat man ${}_{(}\delta_{)}y$, ϑx, ϑw, ${}_{(}\delta_{)}^2y$, $\vartheta^2 x$, $\vartheta^2 w$, etc. bezüglich statt δy, δx, δw, $\delta^2 y$, $\delta^2 x$, $\delta^2 w$, etc. zu setzen. Setzt man hierauf für ${}_{(}\delta_{)}y$, ${}_{(}\delta_{)}^2y$, etc. die entsprechenden (in §. 78 hergestellten) Ausdrücke, und nimmt man alle möglichen Vereinfachungen vor; so bekommt man die

Zweite Form. Weil aber dieses Verfahren wieder viel zu weitläufig ist, so beobachte man lieber folgende Regel:

„Man denke sich in der einfachen Reihe

$$U_\varkappa = U + \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U + \ldots\ldots$$

„an die Stelle jedes sowohl unmittelbar als auch mittelbar in y, δy, $\delta^2 y$, etc. enthaltenen x und w bezüglich die Reihen $x_\varkappa$ und $w_\varkappa$ gesetzt, differentiire dann einmal, zweimal, dreimal, etc. nach allem $\varkappa$, und setze dann $\varkappa = 0$."

So verfahrend bekommt man

$$\text{VII)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = \left(\frac{dU_{(\varkappa)}}{d\varkappa}\right)_0 = \delta U + \frac{d_xU}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d_wU}{dw} \cdot \vartheta w$$

$$\text{VIII)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2U = \left(\frac{d^2U_{(\varkappa)}}{d\varkappa^2}\right)_0 = \delta^2 U + 2 \cdot \frac{d_x\delta U}{dx} \cdot \vartheta x + 2 \cdot \frac{d_w\delta U}{dw} \cdot \vartheta w +$$

$$+ \frac{d_x^2 U}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + 2 \cdot \frac{d_x d_w U}{dx.dw} \cdot \vartheta x \cdot \vartheta w + \frac{d_w^2 U}{dw^2} \cdot \vartheta w^2$$

$$+ \frac{d_x U}{dx} \cdot \vartheta^2 x + \frac{d_w U}{dw} \cdot \vartheta^2 w$$

etc. etc.

Hier ist $\delta U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y$; also ist

$$\frac{d_x \delta U}{dx} = \frac{d_x\left(\frac{d_y U}{dy}\right)}{dx} \cdot \delta y + \frac{d_y U}{dy} \cdot \frac{d_x \delta y}{dx}$$

$$\frac{d_w \delta U}{dw} = \frac{d_w\left(\frac{d_y U}{dy}\right)}{dw} \cdot \delta y + \frac{d_y U}{dy} \cdot \frac{d_w \delta y}{dw}$$

Ferner ist $\delta^2 U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \delta y^2$. Diese Ausdrücke hat man in die Gleichungen VII und VIII einzusetzen. Die Bedeutung von $\frac{d_x U}{dx}$, $\frac{d_w U}{dw}$, $\frac{d_x^2 U}{dx^2}$, $\frac{d_x d_w U}{dx.dw}$, $\frac{d_w^2 U}{dw^2}$, $\frac{d_x\left(\frac{d_y U}{dy}\right)}{dx}$, etc. ist (aus §. 4) bekannt.

§. 82. Es sei $U = \psi(x, w, y, z)$ ein auf bestimmte Weise aus den Elementen x, w, y, z gebildeter Ausdruck, welcher nur die zwei von einander unabhängigen unmittelbar mutablen Elemente y und z, und die zwei von einander unabhängigen nichtmutablen Veränderlichen x und w enthält; y und z seien Functionen der nichtmutablen Veränderlichen x und w. Ferner während y und z mutirt werden, erleiden x und w noch Werthänderungen. Dabei geht $U = \psi(x, w, y, z)$ über in $U_{(\varkappa)} = \psi(x_\varkappa, w_\varkappa, y_{(\varkappa)}, z_{(\varkappa)})$, wo bekanntlich

$$\text{I)}\quad x_\varkappa = x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x + \dots\dots\dots$$

$$\text{II)}\quad w_\varkappa = w + \varkappa \cdot \vartheta w + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 w + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 w + \dots\dots\dots$$

$$\text{III)}\quad y_{(\varkappa)} = y + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)} y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 y + \dots\dots\dots$$

$$\text{IV)}\quad z_{(\varkappa)} = z + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)} z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 z + \dots\dots\dots$$

ist. Die aus $U_{(\varkappa)}$ folgende Reihe ist

$$\text{V)}\quad U_{(\varkappa)} = U + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)} U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 U + \dots\dots\dots$$

Die erste Form der Coefficienten ${}_{(}\delta_{)}U$, ${}_{(}\delta_{)}^2U$, etc. bekommt man, indem man wie beim reinen Mutiren verfahrt, aber ${}_{(}\delta_{)}y$, ${}_{(}\delta_{)}z$, ϑx, ϑw, ${}_{(}\delta_{)}^2 y$, ${}_{(}\delta_{)}^2 z$, $\vartheta^2 x$, $\vartheta^2 w$, etc. bezüglich statt δy, δz, δx, δw, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, $\delta^2 x$, $\delta^2 w$, etc. setzt, wo die Coefficienten ${}_{(}\delta_{)}y$, ${}_{(}\delta_{)}z$, ${}_{(}\delta_{)}^2 y$, ${}_{(}\delta_{)}^2 z$, etc. die im §. 78 gegebene Bedeutung haben.

Die zweite Form bekommt man, indem man wieder die im vorigen §. hergestellten Ausdrücke VII, VIII, etc. nimmt; nur muss man jetzt

$$\delta U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_z U}{dz} \cdot \delta z$$

$$\delta^2 U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_z U}{dz} \cdot \delta^2 z + \frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_z U}{dy.dy} \cdot \delta y \cdot \delta z + \frac{d_z^2 U}{dz^2} \cdot \delta z^2$$

$$\frac{d_x \delta U}{dx} = \frac{d_x\left(\frac{d_y U}{dy}\right)}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_y U}{dy} \cdot \frac{d_x \delta y}{dx} + \frac{d_x\left(\frac{d_z U}{dz}\right)}{dx} \cdot \delta z + \frac{d_z U}{dz} \cdot \frac{d_x \delta z}{dx}$$

$$\frac{d_w \delta U}{dw} = \frac{d_w\left(\frac{d_y U}{dy}\right)}{dw} \cdot \delta y + \frac{d_y U}{dy} \cdot \frac{d_w \delta y}{dw} + \frac{d_w\left(\frac{d_z U}{dz}\right)}{dw} \cdot \delta z + \frac{d_z U}{dz} \cdot \frac{d_w \delta z}{dw}$$

etc. etc.

substituiren. Es ist nun nicht mehr nöthig, noch weitere Fälle vorzunehmen; denn wie man weiter zu gehen hat, ist aus dem Vorhergehenden hinlänglich klar.

§. 83. Es sei die ungesonderte Gleichung $F(x, y, z) = 0$ gegeben, welche die beiden mutablen Elemente y und z, und den nichtmutablen Veränderlichen x enthält. Während y und z mutirt werden, erleidet das x eine Werthänderung, so dass die Elemente y und z eine gemischte Mutation erleiden, und $F(x, y, z) = 0$ übergeht in $F(x_\varkappa, y_{(\varkappa)}, z_{(\varkappa)}) = 0$. Setzt man (wie in §. 66) F statt $F(x, y, z)$, und $F_{(\varkappa)}$ statt $F(x_\varkappa, y_{(\varkappa)}, z_{(\varkappa)})$; so bekommt man

$$\text{I)} \quad F_{(\varkappa)} = F + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}F + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2F + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3F + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = 0$$

Nun ist das $\varkappa$ ein bloses Operationsmittel, d. h. $F_{(\varkappa)}$ muss bei jedem Werthe des $\varkappa$ zu Null werden; und dieses ist nur möglich, wenn einzeln stattfindet $F = 0$, ${}_{(}\delta_{)}F = 0$, ${}_{(}\delta_{)}^2F = 0$, etc.

Erste Form. Man bekommt (nach §. 80) hier

$$\text{II)} \quad {}_{(}\delta_{)}F = \frac{d_z F}{dz} \cdot {}_{(}\delta_{)}z + \frac{d_y F}{dy} \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{d_x F}{dx} \cdot \vartheta x = 0$$

etc. etc.

Will man aber z. B. ${}_{(}\delta_{)}z$ durch δy und ϑx ausdrücken, so führe man (aus §. 77) für ${}_{(}\delta_{)}y$ seinen Ausdruck ein, und Gleichung II geht über in

$$\text{III)} \quad \frac{d_z F}{dz} \cdot {}_{(}\delta_{)}z + \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta y + \left(\frac{d_y F}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_x F}{dx}\right) \cdot \vartheta x = 0$$

woraus man ${}_{(}\delta_{)}z$ bestimmen kann. Eine ähnliche Gleichung ergibt sich, worin ${}_{(}\delta_{)}^2z$ und ${}_{(}\delta_{)}z$ vorkommen, und woraus man ${}_{(}\delta_{)}z$ eliminiren, und sodann ${}_{(}\delta_{)}^2z$ bestimmen kann. Für die

Zweite Form bekommt man (ebenfalls nach §. 80)

$$\text{IV)} \quad {}_{(}\delta_{)}F = \delta F + \frac{dF}{dx} \cdot \vartheta x = 0$$

$$\text{V)} \quad {}_{(}\delta_{)}^2F = \delta^2 F + 2 \cdot \frac{d\delta F}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d^2F}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + \frac{dF}{dx} \cdot \vartheta^2 x = 0$$

etc. etc.

Nun sind y und z Functionen von x, sonach ist $F(x, y, z) = 0$ eine identische Function von x; also ist $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{d^2F}{dx^2} = 0$, etc. bei jedem Werthe des x. Gleichung IV reducirt sich daher auf ${}_{(}\delta_{)}F = \delta F = 0$, d. h. es ist

$$\text{VI)} \quad \frac{d_z F}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta y = 0$$

Da nun $\delta F = 0$ gleichfalls eine identische Function von x ist, so ist auch $\frac{d\delta F}{dx} = 0$,

$\frac{d^2\delta F}{dx^2} = 0$, etc. bei jedem Werthe des x. Gleichung V reducirt sich also auf $_{(}\delta_{)}^2F = \delta^2F = 0$, d. h. es ist

$$\text{VII)}\quad \frac{d_zF}{dz}\cdot\delta^2z + \frac{d_yF}{dy}\cdot\delta^2y + \frac{d_z^2F}{dz^2}\cdot\delta z^2 + 2\cdot\frac{d_zd_yF}{dz.dy}\cdot\delta z\cdot\delta y + \frac{d_y^2F}{dy^2}\cdot\delta y^2 = 0$$

und so fort.

§. 84. Es sei die ungesonderte Gleichung $F(x, w, y, z) = 0$ gegeben, welche die beiden mutablen Elemente y und z, und die beiden nichtmutablen Veränderlichen x und w enthält. Während y und z mutirt werden, erleiden x und w Werthänderungen, so dass die Elemente y und z gemischte Mutationen erleiden, und $F(x, w, y, z) = 0$ übergeht in $F(x_\varkappa, w_\varkappa, y_{(\varkappa)}, z_{(\varkappa)}) = 0$. Setzt man (wie im §. 66) F statt $F(x, w, y, z)$, und $F_{(\varkappa)}$ statt $F(x_\varkappa, w_\varkappa, y_{(\varkappa)}, z_{(\varkappa)})$; so bekommt man

$$\text{I)}\quad F_{(\varkappa)} = F + \varkappa\cdot{}_{(}\delta_{)}F + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot{}_{(}\delta_{)}^2F + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot{}_{(}\delta_{)}^3F + \ldots\ldots = 0$$

Nun ist das $\varkappa$ ein bloses Operationsmittel, d. h. $F_{(\varkappa)}$ muss bei jedem Werthe des $\varkappa$ zu Null werden; und dieses ist nur möglich, wenn einzeln stattfindet $F = 0$, $_{(}\delta_{)}F = 0$, $_{(}\delta_{)}^2F = 0$, etc. Man unterscheide den Fall, wo die nichtmutablen Veränderlichen x und w unabhängig von einander sind, und den Fall, wo eines dieser Elemente von dem andern abhängig ist.

Erster Fall. Die beiden Veränderlichen x und w sind unabhängig von einander.

Erste Form. Man bekommt hier (nach §. 82)

$$\text{II)}\quad {}_{(}\delta_{)}F = \frac{d_zF}{dz}\cdot{}_{(}\delta_{)}z + \frac{d_yF}{dy}\cdot{}_{(}\delta_{)}y + \frac{d_xF}{dx}\cdot\vartheta x + \frac{d_wF}{dw}\cdot\vartheta w = 0$$

etc. etc.

Will man aber z. B. $_{(}\delta_{)}z$ durch δy, ϑx, ϑw ausdrücken, so führe man (aus §. 78) für $_{(}\delta_{)}y$ seinen Ausdruck ein; und Gleichung II geht über in

$$\text{III)}\quad \frac{d_zF}{dz}\cdot{}_{(}\delta_{)}z + \frac{d_yF}{dy}\cdot\delta y + \left(\frac{d_yF}{dy}\cdot\frac{d_xy}{dx} + \frac{d_xF}{dx}\right)\cdot\vartheta x + \left(\frac{d_yF}{dy}\cdot\frac{d_wy}{dw} + \frac{d_wF}{dw}\right)\cdot\vartheta w = 0$$

woraus man $_{(}\delta_{)}z$ bestimmen kann. Eine ähnliche Gleichung ergibt sich, worin $_{(}\delta_{)}^2z$ und $_{(}\delta_{)}z$ vorkommen, und woraus man $_{(}\delta_{)}z$ eliminiren, und sodann $_{(}\delta_{)}^2z$ bestimmen kann. Für die

Zweite Form bekommt man (ebenfalls nach §. 82)

$$\text{IV)}\quad {}_{(}\delta_{)}F = \delta F + \frac{d_xF}{dx}\cdot\vartheta x + \frac{d_wF}{dw}\cdot\vartheta w = 0$$

$$\text{V)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2F = \delta^2F + 2\cdot\frac{d_x\delta F}{dx}\cdot\vartheta x + 2\cdot\frac{d_w\delta F}{dw}\cdot\vartheta w + \frac{d_x^2F}{dx^2}\cdot\vartheta x^2$$

$$+ 2\cdot\frac{d_xd_wF}{dx.dw}\cdot\vartheta x\cdot\vartheta w + \frac{d_w^2F}{dw^2}\cdot\vartheta w^2 + \frac{d_xF}{dx}\cdot\vartheta^2x + \frac{d_wF}{dw}\cdot\vartheta^2w = 0$$

etc. etc.

Nun sind y und z Functionen von x und w, sonach ist $F(x, w, y, z) = 0$ eine identische Function, d. h. gilt bei jedem Werthe des x und bei jedem Werthe des w. Also ist auch $\frac{d_xF}{dx} = 0$, $\frac{d_wF}{dw} = 0$, $\frac{d_x^2F}{dx^2} = 0$, $\frac{d_xd_wF}{dx.dw} = 0$, $\frac{d_w^2F}{dw^2} = 0$, etc.; und Gleichung IV reducirt sich auf $_{(}\delta_{)}F = \delta F = 0$, d. h. es ist

$$\text{VI)}\quad \frac{d_zF}{dz}\cdot\delta z + \frac{d_yF}{dy}\cdot\delta y = 0$$

Da aber $\delta F = 0$ gleichfalls eine identische Function von x und w ist, so ist auch

$\frac{d_x \delta F}{dx} = 0$ und $\frac{d_w \delta F}{dw} = 0$ bei jedem Werthe des x und bei jedem Werthe des w. Gleichung V reducirt sich also auf $_{(}\delta_{)}^2 F = \delta^2 F = 0$, d. h. es ist

$$\text{VII)}\quad \frac{d_z F}{dz} \cdot \delta^2 z + \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_z^2 F}{dz^2} \cdot \delta z^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_z F}{dy . dz} \cdot \delta y \cdot \delta z + \frac{d_y^2 F}{dy^2} \cdot \delta y^2 = 0$$

und so fort.

Zweiter Fall. Es sei w von x abhängig, und diese Abhängigkeit sei durch die Gleichung $f(x, w) = 0$ gegeben. Man eliminire das w aus $F(x, w, y, z) = 0$, so ist diese Aufgabe auf die des vorigen §. zurückgebracht. Will man aber nicht das w selbst eliminiren, so eliminire man die Differenzcoefficienten des w, indem man $\vartheta w = \frac{dw}{dx} \cdot \vartheta x$, $\vartheta^2 w = \frac{dw}{dx} \cdot \vartheta^2 x + \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot \vartheta x^2$, etc. setzt. Dabei gehen die Gleichungen II und III dieses §. bezüglich über in

$$\text{VIII)}\quad \frac{d_z F}{dz} \cdot {}_{(}\delta_{)} z + \frac{d_y F}{dy} \cdot {}_{(}\delta_{)} y + \left(\frac{d_x F}{dx} + \frac{d_w F}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}\right) \cdot \vartheta x = 0$$

$$\text{IX)}\quad \frac{d_z F}{dz} \cdot {}_{(}\delta_{)} z + \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta y + \left(\frac{d_y F}{dy} \cdot \frac{d_x y}{dx} + \frac{d_x F}{dx} + \left(\frac{d_y F}{dy} \cdot \frac{d_w y}{dw} + \frac{d_w F}{dw}\right) \cdot \frac{dw}{dx}\right) \cdot \vartheta x = 0$$

und die Gleichungen IV und V gehen über in

$$\text{X)}\quad {}_{(}\delta_{)} F = \delta F + \left(\frac{d_x F}{dx} + \frac{d_w F}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}\right) \cdot \vartheta x = 0$$

$$\text{XI)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2 F = \delta^2 F + 2 \cdot \left(\frac{d_x \delta F}{dx} + \frac{d_w \delta F}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}\right) \cdot \vartheta x + \left(\frac{d_x^2 F}{dx^2} + 2 \cdot \frac{d_x d_w F}{dx . dw} \cdot \frac{dw}{dx} \right.$$
$$\left. + \frac{d_w^2 F}{dw^2} \cdot \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \frac{d_w F}{dw} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}\right) \cdot \vartheta x^2 + \left(\frac{d_x F}{dx} + \frac{d_w F}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}\right) \cdot \vartheta^2 x = 0$$

Die totalen Differentialquotienten $\frac{dw}{dx}$, $\frac{d^2 w}{dx^2}$, etc. werden aus der Gleichung $f(x, w) = 0$ entnommen. Nun ist w eine Function von x, also sind auch y und z nur Functionen von x, und $F(x, w, y, z) = 0$ ist eine identische Function von x. Es ist also auch $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{d^2 F}{dx^2} = 0$, etc. Da aber

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d_x F}{dx} + \frac{d_w F}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$$

ist, so reducirt sich Gleichung X auf $\delta F = 0$, d. h. es ist wieder

$$\text{XII)}\quad \frac{d_z F}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta y = 0$$

Man sieht also, dass auch $\delta F = 0$ eine identische Function von x ist, woraus auch $\frac{d\delta F}{dx} = 0$, $\frac{d^2 \delta F}{dx^2} = 0$, etc. folgt; und da

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{d_x^2 F}{dx^2} + 2 \cdot \frac{d_x d_w F}{dx . dw} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{d_w^2 F}{dw^2} \cdot \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \frac{d_w F}{dw} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}$$

und

$$\frac{d\delta F}{dx} = \frac{d_x \delta F}{dx} + \frac{d_w \delta F}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$$

ist, so reducirt sich Gleichung XI auf $\delta^2 F = 0$, d. h. es ist wieder

$$\text{XIII)}\quad \frac{d_z F}{dz}\cdot\delta^2 z+\frac{d_y F}{dy}\cdot\delta^2 y+\frac{d_z^2 F}{dz^2}\cdot\delta z^2+2\cdot\frac{d_z d_y F}{dz.dy}\cdot\delta z\cdot\delta y+\frac{d_y^2 F}{dy^2}\cdot\delta y^2=0$$

Und so fort.

Es ist nun nicht mehr nöthig, diese Theorie auf weitere Fälle auszudehnen.

B. Zusammengesetzte reine und zusammengesetzte gemischte Mutationen.

§. 85. Eine Function erleidet (nach §. 47) eine zusammengesetzte Mutation, wenn sie unmittelbar und mittelbar zugleich mutirt wird. Die zusammengesetzte Mutation ist eine reine, wenn die nichtmutablen Veränderlichen keine Werthänderungen erleiden; sie ist aber eine gemischte, wenn die nichtmutablen Veränderlichen zugleich noch Werthänderungen erleiden.

Die Theorie der zusammengesetzten Mutationen kann in Folge alles Vorhergehenden kurz abgefertigt werden.

Wenn z eine zusammengesetzte reine Mutation erleidet, so mag die sich ergebende Reihe durch $z_{[\varkappa]}$, die Coefficienten dieser Reihe mögen durch $_{[}\delta_{]}z$, $_{[}\delta_{]}^2 z$, $_{[}\delta_{]}^3 z$, etc., und die zusammengesetzte reine Gesammtmutation mag durch $_{[}\varDelta_{]}z$ bezeichnet werden.

Wenn z eine zusammengesetzte gemischte Mutation erleidet, so mag die sich ergebende Reihe durch $z_{[(\varkappa)]}$, die Coefficienten dieser Reihe mögen durch $_{[(}\delta_{)]}z$, $_{[(}\delta_{)]}^2 z$, $_{[(}\delta_{)]}^3 z$, etc., und die zusammengesetzte gemischte Gesammtmutation mag durch $_{[(}\varDelta_{)]}z$ bezeichnet werden.

Erstens. Wenn $z=\varphi(x, y)$ eine unmittelbare reine Mutation erleidet, so bekommt man im Allgemeinen die Reihe

$$\text{I)}\quad z_\varkappa=\varphi(x, y)+\varkappa\cdot\delta\varphi(x, y)+\frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2\varphi(x, y)+\frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3\varphi(x, y)+\ldots\ldots$$

Wenn aber zugleich y eine Function von x ist, und in die Reihe

$$\text{II)}\quad y_\varkappa=y+\varkappa\cdot\delta y+\frac{\varkappa^2}{1.2}\,\delta^2 y+\frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 y+\ldots\ldots$$

übergeht; so erleidet z noch gleichzeitig eine mittelbare Mutation, weil die Function y, von welcher z abhangt, ebenfalls eine unmittelbare Mutation erleidet. Statt der Reihe I bekommt man jetzt folgende:

$$\text{III)}\quad z_{[\varkappa]}=\varphi(x, y_\varkappa)+\varkappa\cdot\delta\varphi(x, y_\varkappa)+\frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2\varphi(x, y_\varkappa)$$
$$+\frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3\varphi(x, y_\varkappa)+\ldots\ldots$$

Es kommt nun darauf an, diese Reihe nach steigenden Potenzen des $\varkappa$ zu entwickeln, so dass sich ergibt

$$\text{IV)}\quad z_{[\varkappa]}=z+\varkappa\cdot{}_{[}\delta_{]}z+\frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot{}_{[}\delta_{]}^2 z+\frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot{}_{[}\delta_{]}^3 z+\ldots\ldots$$

Entwickelt man die Coefficienten dieser Reihe IV aus der Reihe III mittelst des Maclaurin'schen Satzes (nach Analogie des §. 77); so bekommt man

$$\text{V)}\quad {}_{[}\delta_{]}z=\left(\frac{dz_{[\varkappa]}}{d\varkappa}\right)_0=\delta\varphi(x, y)+\frac{d_y\varphi(x, y)}{dy}\cdot\delta y=\delta z+\frac{d_y z}{dy}\cdot\delta y$$

$$\text{VI)}\quad {}_{[}\delta_{]}^{2}z = \left(\frac{d^2 z_{[\varkappa]}}{d\varkappa^2}\right)_0$$

$$= \delta^2\varphi(x, y) + 2 \cdot \frac{d_y\delta\varphi(x, y)}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_y^2\varphi(x, y)}{dy^2} \cdot \delta y^2 + \frac{d_y\varphi(x, y)}{dy} \cdot \delta^2 y$$

$$= \delta^2 z + 2 \cdot \frac{d_y\delta z}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_y^2 z}{dy^2} \cdot \delta y^2 + \frac{d_y z}{dy} \cdot \delta^2 y$$

etc. etc.

Unter z, δz, $\delta^2 z$, $\delta^3 z$, etc. hat man Functionen von x und y zugleich zu verstehen; dagegen unter y, δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. hat man nur Functionen von x zu verstehen. Indem man aber die für ${}_{[}\delta_{]}z$, ${}_{[}\delta_{]}^2 z$, ${}_{[}\delta_{]}^3 z$, etc. erhaltenen Ausdrücke in die Reihe

$$\text{VII)}\quad {}_{[}\Delta_{]}z = \varkappa \cdot {}_{[}\delta_{]}z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{[}\delta_{]}^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{[}\delta_{]}^3 z + \ldots\ldots$$

einsetzt, bekommt man die zusammengesetzte reine Gesammtmutation von z.

Von diesem Falle hat man eine Specialität, wenn nur $z = \varphi(y)$ gegeben, also in $\varphi(y)$ das x nicht unmittelbar sondern nur mittelbar (weil nemlich y eine Function von x vorstellt) enthalten ist. Dabei nehmen die Gleichungen V und VI folgende Form an:

$$\text{VIII)}\quad {}_{[}\delta_{]}z = \delta\varphi(y) + \frac{d\varphi(y)}{dy} \cdot \delta y = \delta z + \frac{dz}{dy} \cdot \delta y$$

$$\text{IX)}\quad {}_{[}\delta_{]}^2 z = \delta^2\varphi(y) + 2 \cdot \frac{d\delta\varphi(y)}{dy} \cdot \delta y + \frac{d^2\varphi(y)}{dy^2} \cdot \delta y^2 + \frac{d\varphi(y)}{dy} \cdot \delta^2 y$$

$$= \delta^2 z + 2 \cdot \frac{d\delta z}{dy} \cdot \delta y + \frac{d^2 z}{dy^2} \cdot \delta y^2 + \frac{dz}{dy} \cdot \delta^2 y$$

Zweitens. Wenn aber x auch noch gleichzeitig eine Werthänderung erleidet, d. h. in die Reihe

$$\text{X)}\quad x_\varkappa = x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x + \ldots\ldots\ldots$$

übergeht; so erleidet y eine unmittelbare gemischte Mutation, d. h. y geht über in die Reihe

$$\text{XI)}\quad y_{(\varkappa)} = y + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

und die Reihe III geht über in

$$\text{XII)}\quad z_{[(\varkappa)]} = \varphi(x_\varkappa, y_{(\varkappa)}) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x_\varkappa, y_{(\varkappa)}) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x_\varkappa, y_{(\varkappa)})$$

$$+ \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x_\varkappa, y_{(\varkappa)}) + \ldots\ldots\ldots$$

Es kommt nun darauf an, diese Reihe nach steigenden Potenzen des $\varkappa$ zu ordnen, so dass sich ergibt

$$\text{XIII)}\quad z_{[(\varkappa)]} = z + \varkappa \cdot {}_{[(}\delta_{)]}z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{[(}\delta_{)]}^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{[(}\delta_{)]}^3 z + \ldots\ldots\ldots$$

Entwickelt man die Coefficienten dieser Reihe XIII aus der Reihe XII mittelst des Maclaurin'schen Satzes; so bekommt man

$$\text{XIV)}\quad {}_{[(}\delta_{)]}z = {}_{[}\delta_{]}z + \frac{dz}{dx} \cdot \vartheta x$$

$$\text{XV)}\quad {}_{[(}\delta_{)]}^2 z = {}_{[}\delta_{]}^2 z + 2 \cdot \frac{d_{[}\delta_{]}z}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d^2 z}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + \frac{dz}{dx} \cdot \vartheta^2 x$$

etc. etc.

Hier hat man für ${}_{[}\delta_{]}z$, ${}_{[}\delta_{]}^2z$, etc. die Ausdrücke einzusetzen, welche in den Gleichungen V und VI aufgestellt sind; und wenn man sodann für ${}_{[(}\delta_{)]}z$, ${}_{[(}\delta_{)]}^2z$, etc. die sich ergebenden Ausdrücke in die Reihe

$$\text{XVI)} \quad {}_{[(}\varDelta_{)]}z = \varkappa \cdot {}_{[(}\delta_{)]}z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{[(}\delta_{)]}^2z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{[(}\delta_{)]}^3z + \ldots\ldots\ldots$$

einsetzt, bekommt man die zusammengesetzte gemischte Gesammtmutation des z.

Von diesem Falle hat man eine Specialität, wenn nur $z = \varphi(y)$ gegeben, also in $\varphi(y)$ das x nicht unmittelbar sondern nur mittelbar (weil nemlich y eine Function von x vorstellt) enthalten ist. Hierbei hat man in den Gleichungen XIV und XV für ${}_{[}\delta_{]}z$, ${}_{[}\delta_{]}^2z$, etc. nur diejenigen Ausdrücke einzusetzen, welche in den Gleichungen VIII und IX aufgestellt sind.

Drittens. Es sei $U = \varphi(z, y, x)$ gegeben; z sei eine Function von y und x zugleich, dagegen y sei eine Function von nur x. Nun gehe z über in die Reihe

$$z_{[\varkappa]} = z + \varkappa \cdot {}_{[}\delta_{]}z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{[}\delta_{]}^2z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{[}\delta_{]}^3z + \ldots\ldots\ldots$$

und y gehe über in die Reihe

$$y_\varkappa = y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

Die Bedeutung von ${}_{[}\delta_{]}z$, ${}_{[}\delta_{]}^2z$, etc. ist aus den Gleichungen V und VI bekannt. Dadurch geht jetzt U über in

$$\text{XVII)} \quad U_{[\varkappa]} = U + \varkappa \cdot {}_{[}\delta_{]}U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{[}\delta_{]}^2U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{[}\delta_{]}^3U + \ldots\ldots\ldots$$

Entwickelt man jetzt die Coefficienten dieser Reihe, so bekommt man

$$\text{XVIII)} \quad {}_{[}\delta_{]}U = \frac{d_zU}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_yU}{dy} \cdot \delta y$$

$$\text{XIX)} \quad {}_{[}\delta_{]}^2U = \frac{d_z^2U}{dz^2} \cdot \delta z^2 + \frac{d_zU}{dz} \cdot \delta^2 z + 2 \cdot \frac{d_y\left(\frac{d_zU}{dz} \cdot \delta z\right)}{dy} \cdot \delta y$$

$$+ \frac{d_y^2U}{dy^2} \cdot \delta y^2 + \frac{d_yU}{dy} \cdot \delta^2 y$$

etc. etc.

Unter U, ${}_{[}\delta_{]}U$, ${}_{[}\delta_{]}^2U$, etc. hat man Functionen von z, y, x zu verstehen; unter z, δz, $\delta^2 z$, etc. hat man Functionen von y, x zu verstehen; und unter y, δy, $\delta^2 y$, etc. hat man nur Functionen von x zu verstehen. Desshalb ist (nach §. 4)

$$\text{XX)} \quad \frac{d_yU}{dy} = \frac{d_zU}{dz} \cdot \frac{d_yz}{dy} + \frac{d_yU}{dy}$$

$$\text{XXI)} \quad \frac{d_y^2U}{dy^2} = \frac{d_z^2U}{dz^2} \cdot \left(\frac{d_yz}{dy}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_zd_yU}{dz.dy} \cdot \frac{d_yz}{dy} + \frac{d_y^2U}{dy^2} + \frac{d_zU}{dz} \cdot \frac{d_y^2z}{dy^2}$$

$$\text{XXII)} \quad \frac{d_y\left(\frac{d_zU}{dz} \cdot \delta z\right)}{dy} = \left(\frac{d_z^2U}{dz^2} \cdot \frac{d_yz}{dy} + \frac{d_yd_zU}{dy.dz}\right) \cdot \delta z + \frac{d_zU}{dz} \cdot \frac{d_y\delta z}{dy}$$

Viertens. Es sei $U = \varphi(z, y, x)$ gegeben; z sei eine Function von y und x zugleich, dagegen y sei eine Function von nur x. Nun gehe x über in die Reihe

$$x_\varkappa = x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x + \ldots\ldots\ldots$$

y gehe über in die Reihe

$$y_{(\varkappa)} = y + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

und z gehe über in die Reihe

$$z_{[(\varkappa)]} = z + \varkappa \cdot {}_{[(}\delta_{)]}z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{[(}\delta_{)]}^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{[(}\delta_{)]}^3 z + \ldots\ldots\ldots$$

Die Bedeutung von ${}_{[(}\delta_{)]}z$, ${}_{[(}\delta_{)]}^2 z$, etc. ist aus den Gleichungen XIV und XV bekannt. Dadurch geht jetzt U über in die Reihe

$$\text{XXIII)} \quad U_{[(\varkappa)]} = U + \varkappa \cdot {}_{[(}\delta_{)]}U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{[(}\delta_{)]}^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{[(}\delta_{)]}^3 U + \ldots\ldots\ldots$$

Entwickelt man die Coefficienten dieser Reihe, so bekommt man

$$\text{XXIV)} \quad {}_{[(}\delta_{)]}U = {}_{(}\delta_{]}U + \frac{dU}{dx} \cdot \vartheta x$$

$$\text{XXV)} \quad {}_{[(}\delta_{)]}^2 U = {}_{(}\delta_{]}^2 U + 2 \cdot \frac{d_{(}\delta_{]}U}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d^2 U}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + \frac{dU}{dx} \cdot \vartheta^2 x$$

etc. etc.

In den Gleichungen XVIII und XIX befinden sich die Ausdrücke für ${}_{(}\delta_{]}U$ und ${}_{(}\delta_{]}^2 U$, welche man hier in XXIV und XXV einzusetzen hat. Namentlich geht dann XXIV über in

$$\text{XXVI)} \quad {}_{[(}\delta_{)]}U = \frac{d_z U}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{dU}{dx} \cdot \vartheta x$$

Weil U eine Function von z, y, x, und weil z eine Function von y, x ist; so ist jezt

$$\text{XXVII)} \quad \frac{dU}{dx} = \frac{d_z U}{dz} \cdot \left(\frac{d_y z}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_x z}{dx}\right) + \frac{d_y U}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_x U}{dx}$$

Auf ähnliche Weise bekommt man den Ausdruck für $\frac{d^2 U}{dx^2}$. Aus XX und XXI ist bekannt, was $\frac{d_y U}{dy}$ und $\frac{d_y^2 U}{dy^2}$ bedeuten. Ferner weil δz als Function von y und x betrachtet werden muss, so ist

$$\text{XXVIII)} \quad \frac{d_{[}\delta_{]}U}{dx} = \frac{d\left(\frac{d_z U}{dz}\right)}{dx} \cdot \delta z + \frac{d_z U}{dz} \cdot \left(\frac{d_y \delta z}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_x \delta z}{dx}\right)$$

$$+ \frac{d\left(\frac{d_y U}{dy}\right)}{dx} \cdot \delta y + \frac{d_y U}{dy} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Es ist nun nicht mehr nöthig, die Theorie der zusammengesetzten Mutationen auf weitere Fälle auszudehnen.

Anwendungen der zusammengesetzten Mutationen finden sich in den Aufgaben 31, 32, 281, 282, etc.

Beim Schlusse dieses Abschnittes mag noch daran erinnert sein, dass alle in dem Calcul, welcher hier vorliegt, vorkommenden Reihenentwickelungen sich mittelst des Maclaurin'schen Satzes ausführen lassen, dass man also immer das Mittel hat, jeder Reihe, wo man sie auch abbrechen mag, ihre Ergänzung beizufügen. In Fällen der Anwendung ist es aber von höchster Wichtigkeit, dass man den Fehler welcher durch das Weglassen von Gliedern entsteht, jedesmal schätzen könne. (Ist schon aus dem Differentialcalcul bekannt).

VI. Einige Specialitäten, welche zur Theorie der Mutationen gehören.

§. 86. Wenn $y = \varphi(x)$ ist, so ist $y_\alpha = \varphi(a)$, d. h. das unten an y angehängte α zeigt an, dass man α an die Stelle des x gesetzt habe.

Aus $y = \varphi(x)$ folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx}$; und bei $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha = \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_\alpha$ zeigt das unten angehängte α an, dass man zuerst nach x differentiirt, und hierauf α an die Stelle alles zurückgebliebenen x gesetzt habe.

Ebenso verhält es sich bei $\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_\alpha = \left(\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\right)_\alpha$, d. h. man soll zuerst den totalen Differentialquotient der n-ten Ordnung herstellen, und hierauf α an die Stelle alles zurückgebliebenen x setzen.

Wenn $y = \varphi(x, w)$ ist, so ist $y_{\alpha,\beta} = \varphi(\alpha, \beta)$, d. h. das unten an y angehängte α und β zeigt an, dass man α an die Stelle des x, und β an die Stelle des w gesetzt habe.

Aus $y = \varphi(x, w)$ folgt $\frac{d_x^n y}{dx^n} = \frac{d_x^n\varphi(x, w)}{dx^n}$, $\frac{d_x^n d_w^m y}{dx^n . dw^m} = \frac{d_x^n d_w^m \varphi(x, w)}{dx^n . dw^m}$, etc; und durch $\left(\frac{d_x^n y}{dx^n}\right)_{\alpha,\beta}$, $\left(\frac{d_x^n d_w^m y}{dx^n . dw^m}\right)_{\alpha,\beta}$, etc. wird also angezeigt, dass man zuerst die partiellen Differentialquotienten hergestellt, und hierauf α und β bezüglich an die Stelle des zurückgebliebenen x und w gesetzt habe.

Und so fort.

Ist wieder $y = \varphi(x)$ gegeben, und erleidet y eine unmittelbare Mutation, d. h. geht y über in die Reihe

$$y_\varkappa = y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

so ist durch folgende Reihe

$$(y_\varkappa)_\alpha = y_\alpha + \varkappa \cdot \delta y_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y_\alpha + \ldots\ldots\ldots$$

angezeigt, dass man zuerst mutirt, und dann α an die Stelle des x gesetzt habe.

Ist ferner $y = \varphi(x, w)$ gegeben, und erleidet y eine unmittelbare Mutation, d. h. geht y über in die Reihe

$$y_\varkappa = y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

so ist durch folgende Reihe

$$(y_\varkappa)_{\alpha,\beta} = y_{\alpha,\beta} + \varkappa \cdot \delta y_{\alpha,\beta} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_{\alpha,\beta} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y_{\alpha,\beta} + \ldots\ldots\ldots$$

angezeigt, dass man zuerst mutirt, und dann überall α und β bezüglich an die Stelle des x und des w gesetzt habe.

Und so fort.

Ueberhaupt wird durch $\left(\frac{d^n\delta^m y}{dx^n}\right)_\alpha$, $\left(\frac{d_w^p d_x^n \delta^m y}{dw^p \cdot dx^n}\right)_{\alpha,\beta}$, etc. angezeigt, dass man zuerst die innerhalb der Klammern befindlichen Operationen ausgeführt, und dann α anstatt x, oder α und β bezüglich anstatt x und w, etc. gesetzt habe.

§. 87. Erste Abtheilung.

Wenn $y = \varphi(x)$ und $y + \Delta y = F(x)$ zwei Functionen sind, deren Werthe immer

einander nächstanliegend bleiben bei jedem beliebigen Werthe des x; dann bleiben auch die Werthe der totalen Differentialquotienten $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n}$ und $\frac{d^n(y + \varDelta y)}{dx^n} = \frac{d^n F(x)}{dx^n}$ immer einander nächstliegend bei jedem beliebigen Werthe des x.

Beweis. Man verwandle F(x) in folgende Reihe

$$\text{I)}\quad F(x) = \varphi(x) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x) + \ldots\ldots\ldots$$

oder

$$\text{II)}\quad y + \varDelta y = y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

und lege hierauf dem $\varkappa$ seine specielle Bedeutung bei, welche jetzt ein im Momente des Verschwindens befindlicher Werth ist. Differentiirt man nun n-mal nach allem x, so bekommt man

$$\text{III)}\quad \frac{d^n F(x)}{dx^n} = \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} + \varkappa \cdot \frac{d^n \delta\varphi(x)}{dx^n} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d^n \delta^2\varphi(x)}{dx^n} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^n \delta^3\varphi(x)}{dx^n} + \ldots\ldots\ldots$$

oder

$$\text{IV)}\quad \frac{d^n(y + \varDelta y)}{dx^n} = \frac{d^n y}{dx^n} + \varkappa \cdot \frac{d^n \delta y}{dx^n} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d^n \delta^2 y}{dx^n} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^n \delta^3 y}{dx^n} + \ldots\ldots\ldots$$

und weil die specielle Bedeutung des $\varkappa$ ein im Momente des Verschwindens befindlicher Werth ist, so ist durch die Reihen III und IV der hier vorgelegte Beweis geführt.

Zweite Abtheilung.

1) Wenn nun die hier vorgelegten Functionen $y = \varphi(x)$ und $y + \varDelta y = F(x)$ so beschaffen sind, dass bei dem speciellen Werthe $x = a$ die Function $y_a = \varphi(a)$ den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth annimmt, welchen die Function $y_a + \varDelta y_a = F(a)$ bekommt; so ist $\varphi(a) = F(a)$, oder vielmehr

$$\text{V)}\quad y_a = y_a + \varkappa \cdot \delta y_a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y_a + \ldots\ldots\ldots$$

Diese Gleichung findet statt, während der Werth des $\varkappa$ ein im Momente des Verschwindens befindlicher ist, sie ist also nur möglich, wenn einzeln stattfindet $\delta y_a = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^3 y_a = 0$, etc. Es gibt aber unendlichviele Functionen δy von x, welche die Eigenschaft haben, dass sie bei $x = a$ zu Null werden; z. B. jede beliebige Function $f'(x, A)$, welche einen wilkürlichen Constanten A enthält, der noch so bestimmt werden kann, dass $f'(a, A) = 0$ wird. Ebenso gibt es unendlichviele Functionen $\delta^2 y$ von x, welche bei $x = a$ zu Null werden; z. B. jede beliebige Function $f''(x, B)$, welche einen willkürlichen Constanten B enthält, der noch so bestimmt werden kann, dass $f''(a, B) = 0$ wird. Und so fort.

2) Wenn aber die hier vorgelegten Functionen gleichzeitig die Eigenschaft haben, dass bei dem speciellen Werthe $x = \alpha$ abermals die Function $y_\alpha = \varphi(\alpha)$ den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth annimmt, welchen die Function $y_\alpha + \varDelta y_\alpha = F(\alpha)$ bekommt; so ist wieder $\varphi(\alpha) = F(\alpha)$, oder vielmehr

$$\text{VI)}\quad y_\alpha = y_\alpha + \varkappa \cdot \delta y_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y_\alpha + \ldots\ldots\ldots$$

Diese Gleichung findet statt, während der Werth des $\varkappa$ ein im Momente des Verschwindens befindlicher ist, sie ist also nur möglich, wenn einzeln stattfindet $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, $\delta^3 y_\alpha = 0$, etc. Es gibt aber unendlichviele Functionen δy von x, welche die Eigenschaft haben, dass sie sowohl bei $x = a$ als auch bei $x = \alpha$ zu Null werden; z. B. jede beliebige Function $f'(x, A, B)$, welche mit zwei willkürlichen Constanten A und B versehen ist, die noch so bestimmt werden können, dass sowohl $f'(a, A, B) = 0$ als auch $f'(\alpha, A, B) = 0$ wird. Ebenso gibt es unendlichviele Functionen $\delta^2 y$ von x, welche

sowohl bei $x = a$ als auch bei $x = \alpha$ zu Null werden; z. B jede beliebige Function $f''(x, k, h)$, welche mit zwei willkürlichen Constanten k und h versehen ist, die noch so bestimmt werden können, dass sowohl $f''(a, k, h) = 0$ als auch $f''(\alpha, k, h) = 0$ ist. Und so fort.

Jede Function, welche mit dem gemeinschaftlichen Factor $(a - x)^p \cdot (\alpha - x)^q$ versehen ist, trägt, wenn p und q positiv sind, schon von Ursprungs her in sich selbst die doppelte Eigenschaft, dass sie sowohl bei $x = a$ als auch bei $x = \alpha$ zu Null wird.

3) Wenn aber die hier vorgelegten Functionen die Eigenschaft haben, dass bei dem speciellen Werthe $x = a$ der totale Differentialquotient $\left(\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\right)_a$ denselben (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth annimmt, welchen der totale Differentialquotient $\left(\frac{d^nF(x)}{dx^n}\right)_a$ bekommt; so ist jetzt $\left(\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\right)_a = \left(\frac{d^nF(x)}{dx^n}\right)_a$, oder vielmehr

$$\text{VII)}\quad \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_a = \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_a + \varkappa \cdot \left(\frac{d^n\delta y}{dx^n}\right)_a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d^n\delta^2 y}{dx^n}\right)_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \left(\frac{d^n\delta^3 y}{dx^n}\right)_a + \ldots$$

Diese Gleichung findet statt, während der Werth des $\varkappa$ ein im Momente des Verschwindens befindlicher ist, ist also nur möglich, wenn einzeln stattfindet $\left(\frac{d^n\delta y}{dx^n}\right)_a = 0$, $\left(\frac{d^n\delta^2 y}{dx^n}\right)_a = 0$, $\left(\frac{d^n\delta^3 y}{dx^n}\right)_a = 0$, etc. Es gibt aber unendlichviele Functionen δy von x, welche alle die Eigenschaft haben, dass bei $x = a$ ihr n-ter totaler Differentialquotient zu Null wird; z. B. jede beliebige Function $f'(x, A)$, welche einen willkürlichen Constanten A enthält, der noch so bestimmt werden kann, dass $\left(\frac{d^nf'(x, A)}{dx^n}\right)_a = 0$ wird. Ebenso gibt es eine unendliche Menge Functionen $\delta^2 y$ von x, welche die Eigenschaft haben, dass bei $x = a$ ihr n-ter totaler Differentialquotient zu Null wird; z. B. jede beliebige Function $f''(x, B)$, welche einen willkürlichen Constanten B enthält, der noch so bestimmt werden kann, dass $\left(\frac{d^nf''(x, B)}{dx^n}\right)_a = 0$ wird.

4) Wenn aber die hier vorgelegten Fnnctionen noch gleichzeitig die Eigenschaft haben, dass bei dem speciellen Werthe $x = \alpha$ abermals der totale Differentialquotient $\left(\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\right)_\alpha$ den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth annimmt, welchen der totale Differentialquotient $\left(\frac{d^nF(x)}{dx^n}\right)_\alpha$ bekommt; so ist wieder $\left(\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\right)_\alpha = \left(\frac{d^nF(x)}{dx^n}\right)_\alpha$, oder vielmehr

$$\text{VIII)}\quad \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_\alpha = \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_\alpha + \varkappa \cdot \left(\frac{d^n\delta y}{dx^n}\right)_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d^n\delta^2 y}{dx^n}\right)_\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \left(\frac{d^n\delta^3 y}{dx^n}\right)_\alpha + \ldots$$

Es muss also auch jetzt stattfinden $\left(\frac{d^n\delta y}{dx^n}\right)_\alpha = 0$, $\left(\frac{d^n\delta^2 y}{dx^n}\right)_\alpha = 0$, etc. Es gibt aber unendlichviele Functionen δy von x, welche so beschaffen sind, dass sowohl bei $x = a$ als auch bei $x = \alpha$ ihr n-ter totaler Differentialquotient zu Null wird; z. B. jede beliebige Function $f'(x, A, B)$, welche mit zwei willkürlichen Constanten A und B versehen ist, die noch so eingerichtet werden können, dass sowohl $\left(\frac{d^nf'(x, A, B)}{dx^n}\right)_a = 0$ als auch $\left(\frac{d^nf'(x, A, B)}{dx^n}\right)_\alpha = 0$ wird. Ebenso gibt es unendlichviele Functionen $\delta^2 y$ von x, welche so beschaffen sind, dass sowohl bei $x = a$ als auch bei $x = \alpha$ ihr n-ter totaler Differentialquotient zu Null wird. Und so fort.

5) Es ist nun klar, unter welchen Verhältnissen die vier Gleichungen V, VI, VII, VIII zugleich bestehen können; es muss nemlich δy eine solche Function von x sein, dass sich daraus gleichzeitig folgende vier Gleichungen ergeben

$$\delta y_a = 0,\ \delta y_\alpha = 0,\ \left(\frac{d^n \delta y}{dx^n}\right)_a = 0,\ \left(\frac{d^n \delta y}{dx^n}\right)_\alpha = 0$$

Ebenso muss $\delta^2 y$ eine solche Function von x sein, dass sich daraus gleichzeitig folgende vier Gleichungen ergeben

$$\delta^2 y_a = 0,\ \delta^2 y_\alpha = 0,\ \left(\frac{d^n \delta^2 y}{dx^n}\right)_a = 0,\ \left(\frac{d^n \delta^2 y}{dx^n}\right)_\alpha = 0$$

und so fort. Es gibt aber unendlichviele Functionen von x, welche so beschaffen sind, dass sie solchen vier Bedingungen zugleich genügen; z. B. jede beliebige Function $f(x, A, B, C, E)$, welche mit vier willkürlichen Constanten A, B, C, E versehen ist, die noch so eingerichtet werden können, dass diese vier Gleichungen $f(a, A, B, C, E) = 0$, $f(\alpha, A, B, C, E) = 0$, $\left(\frac{d^n f(x, A, B, C, E)}{dx^n}\right)_a = 0$, $\left(\frac{d^n f(x, A, B, C, E)}{dx^n}\right)_\alpha = 0$ zugleich stattfinden.

Jede Function, welche mit dem gemeinschaftlichen Factor $(a - x)^p \cdot (\alpha - x)^q$ versehen ist, trägt, wenn $p > n$ und $q > n$, schon vom Ursprunge her in sich selbst die vierfache Eigenschaft, dass sie solchen vier Gleichungen zugleich genügt.

Es ist unnöthig diese Untersuchung noch weiter auszudehnen.

§. 88. **Erste Abtheilung.**

Wenn $y = \varphi(x, w)$ und $y + \Delta y = F(x, w)$ zwei Functionen sind, deren Werthe einander immer nächstanliegend bleiben, bei jedem beliebigen Werthe des x und bei jedem beliebigen Werthe des w; dann bleiben auch die partiellen Differentialquotienten $\frac{d_x^m d_w^n y}{dx^m . dw^n} = \frac{d_x^m d_w^n \varphi(x, w)}{dx^m \cdot dw^n}$ und $\frac{d_x^m d_w^n (y + \Delta y)}{dx^m \cdot dw^n} = \frac{d_x^m d_w^n F(x, w)}{dx^m \cdot dw^n}$ einander nächstanliegend bei jedem beliebigen Werthe des x und bei jedem beliebigen Werthe des w.

Beweis. Man verwandle F(x, w) in folgende Reihe:

$$\text{I)}\quad F(x, w) = \varphi(x, w) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x, w) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x, w) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x, w) + \dots\dots$$

oder

$$\text{II)}\quad y + \Delta y = y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \dots\dots\dots\dots$$

und lege hierauf dem $\varkappa$ seine specielle Bedeutung bei, welche ein im Momente des Verschwindens befindlicher Werth ist. Differentiirt man nun m-mal nach x und n-mal nach w, so bekommt man

$$\text{III)}\quad \frac{d_x^m d_w^n F(x, w)}{dx^m \cdot dw^n} = \frac{d_x^m d_w^n \varphi(x, w)}{dx^m \cdot dw^n} + \varkappa \cdot \frac{d_x^m d_w^n \delta\varphi(x, w)}{dx^m \cdot dw^n} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d_x^m d_w^n \delta^2\varphi(x, w)}{dx^m \cdot dw^n}$$
$$+ \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d_x^m d_w^n \delta^3\varphi(x, w)}{dx^m \cdot dw^n} + \dots\dots\dots\dots$$

oder

$$\text{IV)}\quad \frac{d_x^m d_w^n (y + \Delta y)}{dx^m \cdot dw^n} = \frac{d_x^m d_w^n y}{dx^m . dw^n} + \varkappa \cdot \frac{d_x^m d_w^n \delta y}{dx^m . dw^n} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d_x^m d_w^n \delta^2 y}{dx^m . dw^n}$$
$$+ \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d_x^m d_w^n \delta^3 y}{dx^m . dw^n} + \dots\dots\dots\dots$$

und weil die specielle Bedeutung des $\varkappa$ ein im Momente der Verschwindens befindlicher Werth, so ist durch die Reihen III und IV der hier vorgelegte Beweis geführt.

Zweite Abtheilung.

1) Wenn nun die hier vorgelegten Functionen $y = \varphi(x, w)$ und $y + \Delta y = F(x, w)$ so beschaffen sind, dass bei dem speciellen Werthe $x = a$ die Function $y_{a,w} = \varphi(a, w)$ stetsfort den nemlichen Werth behält, wie die Function $y_{a,w} + \Delta y_{a,w} = F(a, w)$; so muss bei jedem beliebigen Werthe des w stattfinden

$$\varphi(a, w) = F(a, w)$$

oder vielmehr

$$\text{V)} \quad y_{a,w} = y_{a,w} + \varkappa \cdot \delta y_{a,w} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_{a,w} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y_{a,w} + \ldots\ldots\ldots$$

Diese Gleichung findet statt, während der Werth des $\varkappa$ ein im Momente des Verschwindens befindlicher ist, sie ist also nur möglich, wenn einzeln stattfindet $\delta y_{a,w} = 0$, $\delta^2 y_{a,w} = 0$, $\delta^3 y_{a,w} = 0$, etc. Es gibt aber unendlichviele Functionen δy von x und w, welche die Eigenschaft haben, dass sie bei dem speciellen Werthe $x = a$ zu Null werden; z. B. jede beliebige Function $f'(x, w, \pi'(w))$, wo ein willkürlicher Ausdruck $\pi'(w)$ vorkommt, der noch so eingerichtet werden kann, dass $f'(a, w, \pi'(w)) = 0$ wird. Ebenso gibt es unendlichviele Functionen $\delta^2 y$ von x und w, welche bei $x = a$ zu Null werden; z. B. jede beliebige Function $f''(x, w, \pi''(w))$, wo ein willkürlicher Ausdruck $\pi''(w)$ vorkommt, der noch so eingerichtet werden kann, dass $f''(a, w, \pi''(w)) = 0$ wird. Und so fort.

2) Wenn aber die hier vorgelegten Functionen noch gleichzeitig die Eigenschaft haben, dass bei dem speciellen Werthe $x = \alpha$ abermals die Function $y_{\alpha,w} = \varphi(\alpha, w)$ stetsfort den nemlichen Werth behält, wie die Function $y_{\alpha,w} = y_{\alpha,w} + \Delta y_{\alpha,w}$; so muss wieder bei jedem beliebigen Werthe des w stattfinden

$$\varphi(\alpha, w) = F(\alpha, w)$$

oder vielmehr

$$\text{VI)} \quad y_{\alpha,w} = y_{\alpha,w} + \varkappa \cdot \delta y_{\alpha,w} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_{\alpha,w} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y_{\alpha,w} + \ldots\ldots\ldots$$

Diese Gleichung findet statt, während der Werth des $\varkappa$ ein im Momente des Verschwindens befindlicher ist, sie ist also nur möglich, wenn einzeln stattfindet $\delta y_{\alpha,w} = 0$, $\delta^2 y_{\alpha,w} = 0$, $\delta^3 y_{\alpha,w} = 0$, etc. Es gibt aber unendlichviele Functionen δy von x und w, welche die Eigenschaft haben, dass sie sowohl bei $x = a$ als auch bei $x = \alpha$ zu Null werden; z. B. jede beliebige Function $f'(x, w, \pi'(w), \chi'(w))$, wo zwei willkürliche Ausdrücke $\pi'(w)$ und $\chi'(w)$ vorkommen, die noch so eingerichtet werden können, dass sowohl $f'(a, w, \pi'(w), \chi'(w)) = 0$ als auch $f'(\alpha, w, \pi'(w), \chi'(w)) = 0$ wird. Ebenso gibt es unendlichviele Functionen $\delta^2 y$ von x und w, welche sowohl bei $x = a$ als auch bei $x = \alpha$ zu Null werden; z. B. jede beliebige Function $f''(x, w, \pi''(w), \chi''(w))$, wo zwei willkürliche Ausdrücke $\pi''(w)$ und $\chi''(w)$ vorkommen, die noch so eingerichtet werden können, dass sowohl $f''(a, w, \pi''(w), \chi''(w)) = 0$ als auch $f''(\alpha, w, \pi''(w), \chi''(w)) = 0$ wird. Und so fort.

Jede Function, welche mit dem gemeinschaftlichen Factor $(a - x)^p \cdot (\alpha - x)^q$ versehen ist, trägt, wenn p und q positiv sind, schon vom Ursprunge her in sich selbst die doppelte Eigenschaft, dass sie sowohl bei $x = a$ als auch bei $x = \alpha$ zu Null wird.

3) Wenn aber die hier vorgelegten Functionen die Eigenschaft haben, dass bei dem speciellen Werthe $x = a$ der partielle Differentialquotient $\left(\frac{d_x^m d_w^n \varphi(x, w)}{dx^m \cdot dw^n}\right)_{a,w}$ stetsfort den nemlichen Werth behält, wie der partielle Differentialquotient $\left(\frac{d_x^m d_w^n F(x, w)}{dx^m \cdot dw^n}\right)_{a,w}$; so muss bei jedem beliebigen Werthe des w stattfinden

$$\left(\frac{d_x^m d_w^n \varphi(x, w)}{dx^m \cdot dw^n}\right)_{a, w} = \left(\frac{d_x^m d_w^n F(x, w)}{dx^m \cdot dw^n}\right)_{a, w}$$

oder vielmehr

$$\text{VII)} \quad \left(\frac{d_x^m d_w^n y}{dx^m . dw^n}\right)_{a, w} = \left(\frac{d_x^m d_w^n y}{dx^m . dw^n}\right)_{a, w} + \varkappa \cdot \left(\frac{d_x^m d_w^n \delta y}{dx^m . dw^n}\right)_{a, w} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d_x^m d_w^n \delta^2 y}{dx^m . dw^n}\right)_{a, w}$$
$$+ \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \left(\frac{d_x^m d_w^n \delta^3 y}{dx^m . dw^n}\right)_{a, w} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Diese Gleichung findet statt, während der Werth des $\varkappa$ ein im Momente des Verschwindens befindlicher ist; sie ist also nur möglich, wenn einzeln stattfindet $\left(\frac{d_x^m d_w^n \delta y}{dx^m . dw^n}\right)_{a, w} = 0$, $\left(\frac{d_x^m d_w^n \delta^2 y}{dx^m . dw^n}\right)_{a, w} = 0$, etc. Es gibt aber unendlichviele Functionen δy von x und w, welche die Eigenschaft haben, dass bei dem speciellen Werthe $x = a$ der partielle Differentialquotient $\left(\frac{d_x^m d_w^n \delta y}{dx^m . dw^n}\right)_{a, w} = 0$ wird; z. B. jede beliebige Function $f'(x, w, \pi'(w))$, wo ein willkürlicher Ausdruck $\pi'(w)$ vorkommt, der noch so eingerichtet werden kann, dass $\left(\frac{d_x^m d_w^n f'(x, w, \pi'(w))}{dx^m . dw^n}\right)_{a, w} = 0$ wird. Ebenso gibt es eine unendliche Mengs Functionen $\delta^2 y$ von x und w, welche die Eigenschaft haben, dass bei dem speciellen Werthe $x = a$ der partielle Differentialquotient $\left(\frac{d_x^m d_w^n \delta^2 y}{dx^m . dw^n}\right)_{a, w} = 0$ wird; z. B. jede beliebige Function $f''(x, w, \pi''(w))$, wo ein willkürlicher Ausdruck $\pi''(w)$ vorkommt, der noch so eingerichtet werden kann, dass $\left(\frac{d_x^m d_w^n f''(x, w, \pi''(w))}{dx^m . dw^n}\right)_{a, w} = 0$ wird. Und so fort.

4) Wenn aber die hier vorgelegten Functionen noch gleichzeitig die Eigenschaft haben, dass bei dem speciellen Werthe $x = \alpha$ abermals der partielle Differentialquotient $\left(\frac{d_x^m d_w^n \varphi(x, w)}{dx^m \cdot dw^n}\right)_{\alpha, w}$ stetsfort den nemlichen Werth behält, wie der partielle Differentialquotient $\left(\frac{d_x^m d_w^n F(x, w)}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha, w}$; so muss bei jedem beliebigen Werthe des w stattfinden

$$\left(\frac{d_x^m d_w^n \varphi(x, w)}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha, w} = \left(\frac{d_x^m d_w^n F(x, w)}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha, w}$$

oder vielmehr

$$\text{VIII)} \quad \left(\frac{d_x^m d_w^n y}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha, w} = \left(\frac{d_x^m d_w^n y}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha, w} + \varkappa \cdot \left(\frac{d_x^m d_w^n \delta y}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha, w} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d_x^m d_w^n \delta^2 y}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha, w}$$
$$+ \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \left(\frac{d_x^m d_w^n \delta^3 y}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha, w} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Es muss also auch jetzt einzeln stattfinden $\left(\frac{d_x^m d_w^n \delta y}{dx^m \cdot dw^n}\right)_{\alpha,w} = 0$, $\left(\frac{d_x^m d_w^n \delta^2 y}{dx^m \cdot dw^n}\right)_{\alpha,w} = 0$, etc. Es gibt aber unendlichviele Functionen δy von x und w, welche so beschaffen sind, dass sowohl bei $x = a$ als auch bei $x = \alpha$ der partielle Differentialquotient $\frac{d_x^m d_w^n \delta y}{dx^m . dw^n}$ zu Null wird; z. B. jede beliebige Function $f'(x, w, \pi'(w), \chi'(w))$, wo zwei willkürliche Ausdrücke $\pi'(w)$ und $\chi'(w)$ vorkommen, die noch so eingerichtet werden können, dass sowohl

$$\left(\frac{d_x^m d_w^n f'(x, w, \pi'(w), \chi'(w))}{dx^m \cdot dw^n}\right)_{a,w} = 0 \text{ als auch } \left(\frac{d_x^m d_w^n f'(x, w, \pi'(w), \chi'(w))}{dx^m \cdot dw^n}\right)_{\alpha,w} = 0$$

wird. Ebenso gibt es eine unendliche Menge Functionen $\delta^2 y$ von x und w, welche so beschaffen sind, dass sowohl bei $x = a$ als auch bei $x = \alpha$ der partielle Differentialquotient $\frac{d_x^m d_w^n \delta^2 y}{dx^m . dw^n}$ zu Null wird; z. B. jede beliebige Function $f''(x, w, \pi''(w), \chi''(w))$, wo zwei willkürliche Ausdrücke $\pi''(w)$ und $\chi''(w)$ vorkommen, die noch so eingerichtet werden können, dass sowohl

$$\left(\frac{d_x^m d_w^n f''(x, w, \pi''(w), \chi''(w))}{dx^m \cdot dw^n}\right)_{a,w} = 0 \text{ als auch } \left(\frac{d_x^m d_w^n f''(x, w, \pi''(w), \chi''(w))}{dx^m \cdot dw^n}\right)_{\alpha,w} = 0$$

wird. Und so fort.

5) Es ist nun klar, unter welchen Verhältnissen die vier Gleichungen V, VI, VII, VIII zugleich bestehen können; es muss nemlich δy eine solche Function von x und w sein, dass sich daraus gleichzeitig folgende vier Gleichungen ergeben:

$$\delta y_{a,w} = 0, \; \delta y_{\alpha,w} = 0 \quad \left(\frac{d_x^m d_w^n \delta y}{dx^m . dw^n}\right)_{a,w} = 0, \; \left(\frac{d_x^m d_w^n \delta y}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha,w} = 0$$

Ebenso muss $\delta^2 y$ eine solche Function von x und w sein, dass sich daraus gleichzeitig folgende vier Gleichungen ergeben:

$$\delta^2 y_{a,w} = 0, \; \delta^2 y_{\alpha,w} = 0, \left(\frac{d_x^m d_w^n \delta^2 y}{dx^m . dw^n}\right)_{a,w} = 0, \; \left(\frac{d_x^m d_w^n \delta^2 y}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha,w} = 0$$

Und so fort. Es gibt aber unendlichviele Functionen von x und w, welche so beschaffen sind, dass sie solchen vier Bedingungen zugleich genügen; z. B. jede beliebige Function $f(x, w, \pi(w), \chi(w), f(w), \mathfrak{F}(w))$, wo vier willkürliche Ausdrücke $\pi(w)$, $\chi(w)$, $f(w)$, $\mathfrak{F}(w)$ vorkommen, die noch so eingerichtet werden können, dass folgende vier Gleichungen

$$f(a, w, \pi(w), \chi(w), f(w), \mathfrak{F}(w)) = 0, \; f(\alpha, w, \pi(w), \chi(w), f(w), \mathfrak{F}(w)) = 0,$$

$$\left(\frac{d_x^m d_w^n f(x, w, \pi(w), \chi(w), f(w), \mathfrak{F}(w))}{dx^m \cdot dw^n}\right)_{a,w} = 0$$

und

$$\left(\frac{d_x^m d_w^n f(x, w, \pi(w), \chi(w), f(w), \mathfrak{F}(w))}{dx^m \cdot dw^n}\right)_{\alpha,w} = 0$$

zugleich stattfinden.

Jede Function von x und w, welche mit dem gemeinschaftlichen Factor $(a - x)^p \cdot (\alpha - x)^q$ versehen ist, trägt, wenn $p > m$ und $q > m$ ist, schon von Ursprunge her in sich selbst die vierfache Eigenschaft, dass sie solchen vier Gleichungen zugleich genügt.

Die in dieser zweiten Abtheilung durchgeführte Untersuchung erleidet nicht die geringste Aenderung, wenn man dem w specielle Werthe beilegt, und dabei die Werthe des x willkürlich lässt.

Dritte Abtheilung.

1) Wenn die hier vorgelegten Functionen $y = \varphi(x, w)$ und $y + \Delta y = F(x, w)$ so beschaffen sind, dass bei den speciellen Werthen $x = a$ und $w = b$ die Function $y_{a,b} = \varphi(a, b)$ den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth annimmt, welchen die Function $y_{a,b} = F(a, b)$ bekommt; so ist

$$\varphi(a, b) = F(a, b)$$

oder vielmehr

$$\text{IX)}\quad y_{a,b} = y_{a,b} + \varkappa \cdot \delta y_{a,b} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_{a,b} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y_{a,b} + \ldots\ldots\ldots,$$

Diese Gleichung findet statt, während der Werth des $\varkappa$ ein im Momente des Verschwindens befindlicher ist, sie ist also nur möglich, wenn einzeln stattfindet $\delta y_{a,b} = 0$, $\delta^2 y_{a,b} = 0$, $\delta^3 y_{a,b} = 0$, etc. Es gibt aber unendlichviele Functionen δy von x und w, welche die Eigenschaft haben, dass sie bei den speciellen Werthen $x = a$ und $w = b$ zu Null werden, und zwar

𝔄') alle jene unendlichvielen Functionen δy von x und w, welche schon zu Null werden, wenn nur x den speciellen Werth a annimmt, dagegen w noch ganz beliebig ist. Dergleichen Functionen sind schon in Nro. 1 der zweiten Abtheilung dieses §'s betrachtet worden. Oder, was dasselbe ist,

𝔅') alle jene unenlichvielen Functionen δy von x und w, welche schon zu Null werden, wenn nur w den speciellen Werth b annimmt, x dagegen noch ganz beliebig ist. Ausserdem auch noch

ℭ') alle jene unendlichvielen Functionen δy von x und w, welche durch $f'(x, w, A)$ repräsentirt sein mögen, und wenigstens einen willkürlichen Constanten A enthalten, der noch so eingerichtet werden kann, dass $f'(a, b, A) = 0$ wird.

Ebenso gibt es unendlichviele Functionen $\delta^2 y$ von x und w, welche bei $x = a$ und $w = b$ zu Null werden; und zwar

𝔄'') alle jene unendlichvielen Functionen $\delta^2 y$ von x und w, welche schon zu Null werden, wenn nur x den speciellen Werth a annimmt, w dagegen noch ganz beliebig ist. Dergleichen Functionen sind schon in Nro. 1 der zweiten Abtheilung dieses §'s betrachtet worden. Oder was dasselbe ist,

𝔅'') alle jene unendlichvielen Functionen $\delta^2 y$ von x und w, welche schon zu Null werden, wenn nur w den speciellen Werth b annimmt, x dagegen noch ganz beliebig ist. Ausserdem auch noch

ℭ'') alle jene unendlichvielen Functionen $\delta^2 y$ von x und w, welche durch $f''(x, w, g)$ repräsentirt sein mögen, und wenigstens einen willkürlichen Constanten g enthalten, der noch so eingerichtet werden kann, dass $f''(a, b, g) = 0$ wird.

Und so fort.

2) Wenn aber die hier vorgelegten Functionen noch gleichzeitig die Eigenschaft haben, dass bei den speciellen Werthen $x = \alpha$ und $w = \beta$ abermals die Function $y_{\alpha,\beta} = \varphi(\alpha, \beta)$ den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth annimmt, welchen die Function $y_{\alpha,\beta} + \Delta y_{\alpha,\beta} = F(\alpha, \beta)$ bekommt; so ist wieder

$$\varphi(\alpha, \beta) = F(\alpha, \beta)$$

oder vielmehr

$$\text{X)}\quad y_{\alpha,\beta} = y_{\alpha,\beta} + \varkappa \cdot \delta y_{\alpha,\beta} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_{\alpha,\beta} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y_{\alpha,\beta} + \ldots\ldots$$

Diese Gleichung findet statt, während der Werth des x ein im Momente des Verschwindens befindlicher ist, sie ist also nur möglich, wenn einzeln stattfindet $\delta y_{\alpha,\beta} = 0$, $\delta^2 y_{\alpha,\beta} = 0$, $\delta^3 y_{\alpha,\beta} = 0$, etc. Es gibt aber unendlichviele Functionen δy von x und w, welche die Eigenschaft haben, dass sie sowohl bei $x = a$, $w = b$ als auch bei $x = \alpha$, $w = \beta$ zu Null werden, und zwar

𝔄') alle jene unendlichvielen Functionen δy von x und w, welche schon zu Null werden, wenn nur x den speciellen Werth a oder α annimmt, dagegen w noch ganz beliebig ist. Dergleichen Functionen sind schon in Nro. 2 der zweiten Abtheilung dieses §'s betrachtet worden. Oder, was dasselbe ist,

𝔅') alle jene unendlichvielen Functionen δy von x und w, welche schon zu Null werden, wenn nur w den speciellen Werth b oder β annimmt, dagegen x noch ganz beliebig ist. Ausserdem auch noch

ℭ') alle jene unendlichvielen Functionen von x und w, welche durch $f'(x, w, A, B)$ repräsentirt werden mögen, und wenigstens mit zwei willkürlichen Constanten A und B versehen sind, die noch so eingerichtet werden können, dass sowohl $f'(a, b, A, B) = 0$ als auch $f'(\alpha, \beta, A, B) = 0$ wird.

Ebenso gibt es unendlichviele Functionen $\delta^2 y$ von x und w, welche die Eigenschaft haben, dass sie sowohl bei $x = a$, $w = b$, als auch bei $x = \alpha$, $w = \beta$ zu Null werden, und zwar

𝔄'') alle jene unendlichvielen Functionen $\delta^2 y$ von x und w, welche schon zu Null werden, wenn nur x den speciellen Werth a oder α annimmt, dagegen w noch ganz beliebig ist. Dergleichen Functionen sind schon in Nro. 2 der zweiten Abtheilung dieses §'s betrachtet worden. Oder, was dasselbe ist,

𝔅'') alle jene unendlichvielen Functionen $\delta^2 y$ von x und w, welche schon zu Null werden, wenn nur w den speciellen Werth b oder β annimmt, dagegen x noch ganz beliebig ist. Ausserdem auch noch

ℭ'') alle jene unendlichvielen Functionen $\delta^2 y$ von x und w, welche durch $f''(x, w, g, h)$ repräsentirt sein mögen, und wenigstens mit zwei willkürlichen Constanten g und h versehen sind, die noch so eingerichtet werden können, dass sowohl $f''(a, b, g, h) = 0$ als auch $f''(\alpha, \beta, g, h) = 0$ wird.

Und so fort.

Jede Function von x und w, welche entweder mit dem gemeinschaftlichen Factor

$$(a - x)^p \cdot (\alpha - x)^q$$

oder mit dem gemeinschaftlichen Factor

$$(b - w)^{\mathfrak{p}} \cdot (\beta - w)^{\mathfrak{q}}$$

oder mit dem gemeinschaftlichen Factor

$$(a - x)^p \cdot (\alpha - x)^q \cdot (b - w)^{\mathfrak{p}} \cdot (\beta - w)^{\mathfrak{q}}$$

versehen ist, trägt, wenn p, q, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ positiv sind, schon von Ursprunge her in sich selbst die doppelte Eigenschaft, dass sie sowohl bei $x = a$, $w = b$, als auch bei $x = \alpha$, $w = \beta$ zu Null wird.

3) Wenn aber die hier vorgelegten Functionen die Eigenschaft haben, dass bei den speciellen Werthen $x = a$ und $w = b$ der partielle Differentialquotient $\left(\frac{d_x^m d_w^n \varphi(x, w)}{dx^m \cdot dw^n}\right)_{a,b}$ den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth annimmt, welchen der partielle Differentialquotient $\left(\frac{d_x^m d_w^n F(x, w)}{dx^m \cdot dw^n}\right)_{a,b}$ bekommt; so ist jetzt

$$\left(\frac{d_x^m d_w^n \varphi(x, w)}{dx^m \cdot dw^n}\right)_{a,b} = \left(\frac{d_x^m d_w^n F(x, w)}{dx^m \cdot dw^n}\right)_{a,b}$$

oder vielmehr

$$\text{XI)}\quad \left(\frac{d_x^m d_w^n y}{dx^m . dw^n}\right)_{a,b} = \left(\frac{d_x^m d_w^n y}{dx^m . dw^n}\right)_{a,b} + \varkappa \cdot \left(\frac{d_x^m d_w^n \delta y}{dx^m . dw^n}\right)_{a,b} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d_x^m d_w^n \delta^2 y}{dx^m . dw^n}\right)_{a,b}$$

$$+ \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \left(\frac{d_x^m d_w^n \delta^3 y}{dx^m . dw^n}\right)_{a,b} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Diese Gleichung findet statt, während der Werth des $\varkappa$ ein im Momente des Verschwindens befindlicher ist, sie ist also nur möglich, wenn einzeln stattfindet $\left(\frac{d_x^m d_w^n \delta y}{dx^m . dw^n}\right)_{a,b} = 0$, $\left(\frac{d_x^m d_w^n \delta^2 y}{dx^m . dw^n}\right)_{a,b} = 0$, etc. Es gibt aber unendlichviele Functionen δy von x und w, welche die Eigenschaft haben, dass folgender aus ihr entnommener partieller Differentialquotient $\frac{d_x^m d_w^n \delta y}{dx^m . dw^n}$ bei $x = a$ und $w = b$ zu Null wird, und zwar

𝔄') alle jene unendlichvielen Functionen δy von x und w, bei denen der partielle Differentialquotient $\frac{d_x^m d_w^n \delta y}{dx^m . dw^n}$ schon zu Null wird, wenn nur x den speciellen Werth a annimmt, dagegen w noch ganz beliebig ist. Dergleichen Functionen sind schon in Nro. 3 der zweiten Abtheilung dieses §'s betrachtet worden. Oder, was dasselbe ist,

𝔅') alle jene unendlichvielen Functionen δy von x und w, bei denen der partielle Differentialquotient $\frac{d_x^m d_w^n \delta y}{dx^m . dw^n}$ schon zu Null wird, wenn nur w den speciellen Werth b annimmt, während x noch ganz beliebig ist. Ausserdem auch noch

ℭ') alle jene unendlichvielen Functionen δy von x und w, welche durch $f'(x, w, A)$ repräsentirt sein mögen, und wenigstens einen willkürlichen Constanten A enthalten, der noch so eingerichtet werden kann, dass $\left(\frac{d_x^m d_w^n f'(x, w, A)}{dx^m . dw^n}\right)_{a,b} = 0$ wird.

Und so fort.

4) Wenn aber die hier vorgelegten Functionen noch gleichzeitig die Eigenschaft haben, dass bei den speciellen Werthen $x = \alpha$ und $w = \beta$ abermals der partielle Differentialquotient $\left(\frac{d_x^m d_w^n \varphi(x, w)}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha,\beta}$ den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth annimmt, welchen der partielle Differentialquotient $\left(\frac{d_x^m d_w^n F(x, w)}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha,\beta}$ bekommt; so ist jetzt auch

$$\left(\frac{d_x^m d_w^n \varphi(x, w)}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha,\beta} = \left(\frac{d_x^m d_w^n F(x, w)}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha,\beta}$$

oder vielmehr

$$\text{XII)}\quad \left(\frac{d_x^m d_w^n y}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha,\beta} = \left(\frac{d_x^m d_w^n y}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha,\beta} + \varkappa \cdot \left(\frac{d_x^m d_w^n \delta y}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha,\beta} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d_x^m d_w^n \delta^2 y}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha,\beta}$$

$$+ \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \left(\frac{d_x^m d_w^n \delta^3 y}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha,\beta} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Es muss also einzeln stattfinden $\left(\frac{d_x^m d_w^n \delta y}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha,\beta} = 0$, $\left(\frac{d_x^m d_w^n \delta^2 y}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha,\beta} = 0$, etc.

5) Es ist nun klar, unter welchen Verhältnissen die vier Gleichungen IX, X, XI, XII zugleich stattfinden können; es muss nemlich δy eine solche Function von x und w sein, dass sich daraus gleichzeitig folgende vier Gleichungen ergeben:

$$\delta y_{a,b} = 0,\ \delta y_{\alpha,\beta} = 0,\ \left(\frac{d_x^m d_w^n \delta y}{dx^m . dw^n}\right)_{a,b} = 0,\ \left(\frac{d_x^m d_w^n \delta y}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha,\beta} = 0$$

Ebenso muss $\delta^2 y$ eine solche Function von x und w sein, dass sich daraus gleichzeitig folgende vier Gleichungen ergeben:

$$\delta^2 y_{a,b} = 0,\ \delta^2 y_{\alpha,\beta} = 0,\ \left(\frac{d_x^m d_w^n \delta^2 y}{dx^m . dw^n}\right)_{a,b} = 0,\ \left(\frac{d_x^m d_w^n \delta^2 y}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha,\beta} = 0$$

und so fort. Es gibt aber unendlichviele Functionen von x und w, welche so beschaffen sind, dass sie solchen vier Bedingungen zugleich genügen. Z. B.

𝔄) alle jene unendlichvielen Functionen von x und w, welche schon vier solchen Bedingungen genügen, wenn x den speciellen Werth a oder α annimmt, dagegen w noch ganz beliebig ist. Dergleichen Functionen sind in Nro. 5 der zweiten Abtheilung dieses §'s betrachtet worden. Oder, was dasselbe ist,

𝔅) alle jene unendlichvielen Functionen von x und w, welche schon vier solchen Bedingungen genügen, wenn w den speciellen Werth b oder β annimmt, dagegen x noch ganz beliebig ist. Ausserdem auch noch

ℭ) alle jene unendlichvielen Functionen von x und w, welche durch f(x, w, A, B, C, E) repräsentirt sein mögen, und wenigstens mit vier willkürlichen Constanten A, B, C, E versehen sind, die noch so eingerichtet werden können, dass folgende vier Gleichungen

$$f(a, b, A, B, C, E) = 0,\ f(\alpha, \beta, A, B, C, E) = 0,$$

$$\left(\frac{d_x^m d_w^n f(x, w, A, B, C, E)}{dx^m . dw^n}\right)_{a,b} = 0 \text{ und } \left(\frac{d_x^m d_w^n f(x, w, A, B, C, E)}{dx^m . dw^n}\right)_{\alpha,\beta} = 0$$

zugleich stattfinden.

Jede Function von x und w, welche entweder mit dem gemeinschaftlichen Factor

$$(a - x)^p \cdot (\alpha - x)^q$$

oder mit dem gemeinschaftlichen Factor

$$(b - w)^{\mathfrak{p}} \cdot (\beta - w)^{\mathfrak{q}}$$

oder mit dem gemeinschaftlichen Factor

$$(a - x)^p \cdot (\alpha - x)^q \cdot (b - w)^{\mathfrak{p}} \cdot (\beta - w)^{\mathfrak{q}}$$

versehen ist, trägt, wenn $p > m$ und $q > m$ und wenn $\mathfrak{p} > n$ und $\mathfrak{q} > n$ ist, schon von Ursprunge her in sich selbst die vierfache Eigenschaft, dass sie solchen vier Gleichungen zugleich genügt.

Es ist unnöthig, die Untersuchung, welche sich dieser § zur Aufgabe gemacht hat, so weit auszudehnen, dass sie erschöpft wäre.

Ebenso ist aus allem Vorhergehenden von selbst klar, wie diese Untersuchung auf Functionen ausgedehnt werden kann, welche mit mehr als zwei absolut unabhängigen Veränderlichen versehen sind.

§. 89. Erste Abtheilung.

Wenn $y = \varphi(x)$ und $y + \Delta y = F(x)$ zwei Functionen sind, deren Werthe einander immer nächstanliegend bleiben bei jedem beliebigen Werthe des x; dann bleiben

auch die Werthe der Integrale $\int_a^x \varphi(x) \cdot dx$ und $\int_a^x F(x) \cdot dx$ einander nächstanliegend bei jedem Werthe des x und des a.

Beweis. Man verwandle F(x) in die Reihe

$$\text{I)}\ F(x) = \varphi(x) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots$$

und lege hierauf dem $\varkappa$ seine specielle Bedeutung bei, welche ein im Momente des Verschwindens befindlicher Werth ist. Nun bekommt man folgende Gleichung

$$\text{II)}\ \int_a^x F(x) \cdot dx = \int_a^x \left(\varphi(x) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\right) \cdot dx$$

Weil aber x und a von $\varkappa$ unabhängig sind, und weil wiederum $\varkappa$ von x und a unabhängig ist; so ist letztere Gleichung gleichbedeutend mit folgender:

$$\text{III)}\ \int_a^x F(x) \cdot dx = \int_a^x \varphi(x) \cdot dx + \varkappa \cdot \int_a^x \delta y \cdot dx + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \int_a^x \delta^2 y \cdot dx$$
$$+ \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \int_a^x \delta^3 y \cdot dx + \ldots\ldots\ldots$$

und weil die specielle Bedeutung des $\varkappa$ ein im Momente des Verschwindens befindlicher Werth ist, so ist durch die Reihe III der hier vorgelegte Beweis geführt.

Zweite Abtheilung.

Wenn nun die hier vorgelegten Functionen $y = \varphi(x)$ und $y + \Delta y = F(x)$ so beschaffen sind, dass zwischen den speciellen Gränzen von $x = a$ bis $x = \alpha$ das Integral $\int_a^\alpha \varphi(x) \cdot dx$ denselben (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth annimmt, welchen das Integral $\int_a^\alpha F(x) \cdot dx$ bekommt; so ist $\int_a^\alpha \varphi(x) \cdot dx = \int_a^\alpha F(x) \cdot dx$, oder vielmehr

$$\text{IV)}\ \int_a^\alpha \varphi(x) \cdot dx = \int_a^\alpha \varphi(x) \cdot dx + \varkappa \cdot \int_a^\alpha \delta y \cdot dx + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \int_a^\alpha \delta^2 y \cdot dx$$
$$+ \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \int_a^\alpha \delta^3 y \cdot dx + \ldots\ldots\ldots$$

Diese Gleichung findet statt, während der Werth des $\varkappa$ ein im Momente des Verschwindens befindlicher ist, sie ist also nur möglich, wenn einzeln stattfindet $\int_a^\alpha \delta y \cdot dx = 0$, $\int_a^\alpha \delta^2 y \cdot dx = 0$, $\int_a^\alpha \delta^3 y \cdot dx = 0$, etc. Setzt man noch zur Abkürzung $\int_a^\alpha \varphi(x) \cdot dx = z_\alpha - z_a$, so kann man auch zur Abkürzung $\int_a^\alpha \delta y \cdot dx = \delta z_\alpha - \delta z_a$, $\int_a^\alpha \delta^2 y \cdot dx = \delta^2 z_\alpha - \delta^2 z_a$, $\int_a^\alpha \delta^3 y \cdot dx = \delta^3 z_\alpha - \delta^3 z_a$, etc. etc. setzen; und Gleichung IV geht über in

$$\text{V)}\ \int_a^\alpha \varphi(x) \cdot dx = \left(z_\alpha - z_a\right) + \varkappa \cdot \left(\delta z_\alpha - \delta z_a\right) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\delta^2 z_\alpha - \delta^2 z_a\right)$$
$$+ \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \left(\delta^3 z_\alpha - \delta^3 z_a\right) + \ldots\ldots\ldots$$

woraus bei den hier obwaltenden Umständen einzeln folgt $\delta z_\alpha - \delta z_a = 0$, $\delta^2 z_\alpha - \delta^2 z_a = 0$, $\delta^3 z_\alpha - \delta^3 z_a = 0$, etc. Es gibt aber eine unendliche Menge Functionen δz von x, welche die Eigenschaft haben, dass bei den speciellen Werthen $x = a$ und $x = \alpha$ die Differenz $\delta z_\alpha - \delta z_a$ zu Null wird; z. B. jede beliebige Function $f'(x, A)$, welche einen willkürlichen Constanten A enthält, der noch so bestimmt werden kann, dass die Gleichung $f'(\alpha, A) - f'(a, A) = 0$ stattfindet. Ebenso gibt es eine unendliche Menge Functionen $\delta^2 z$ von x, welche die Eigenschaft haben, dass bei den speciellen Werthen $x = a$ und $x = \alpha$ die Differenz $\delta^2 z_\alpha - \delta^2 z_a$ zu Null wird; z. B. jede beliebige Function $f''(x, B)$, welche einen willkürlichen Constanten B enthält, der noch so bestimmt werden kann, dass die Gleichung $f''(\alpha, B) - f''(a, B) = 0$ stattfindet. Und so fort.

§. 90. Erste Abtheilung.

Wenn $y = \varphi(x, w)$ und $y + \Delta y = F(x, w)$ zwei Functionen sind, deren Werthe einander immer nächstanliegend bleiben bei jedem beliebigen Werthe des x und des a, und bei jedem beliebigen Werthe des w und des b; dann bleiben auch die Werthe der Integrale $\int_a^x \int_b^w \varphi(x, w) \cdot dw \cdot dx$ und $\int_a^x \int_b^w F(x, w) \cdot dw \cdot dx$ immer einander nächstanliegend bei jedem Werthe des x und des a, und bei jedem Werthe des w und des b.

Beweis. Man verwandle $F(x, w)$ in die Reihe

$$\text{I)}\quad F(x, w) = \varphi(x, w) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdots\cdots\cdots$$

und lege hierauf dem $\varkappa$ seine specielle Bedeutung bei, welche ein im Momente des Verschwindens befindlicher Werth ist. Nun bekommt man folgende Gleichung

$$\text{II)}\quad \int_a^x \int_b^w F(x, w) \cdot dw \cdot dx = \int_a^x \int_b^w \left[\varphi(x, w) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdots\cdots\cdots \right] \cdot dw \cdot dx$$

Weil aber sowohl x und a als auch w und b von $\varkappa$ unabhängig sind, und weil wiederum $\varkappa$ sowohl von x und a als auch von w und b unabhängig ist; so ist letztere Gleichung gleichbedeutend mit folgender:

$$\text{III)}\quad \int_a^x \int_b^w F(x, w) \cdot dw \cdot dx = \int_a^x \int_b^w \varphi(x. w) \cdot dw \cdot dx + \varkappa \cdot \int_a^x \int_b^w \delta y \cdot dw \cdot dx + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \int_a^x \int_b^w \delta^2 y \cdot dw \cdot dx + \cdots\cdots\cdots$$

und weil, wie gesagt, die specielle Bedeutung des $\varkappa$ ein im Momente des Verschwindens befindlicher Werth ist; so ist durch die Reihe III der hier vorgelegte Beweis geführt.

Zweite Abtheilung.

Wenn nun die hier vorgelegten Functionen $y = \varphi(x, w)$ und $y + \Delta y = F(x, w)$ so beschaffen sind, dass zwischen den speciellen Gränzen von $x = a$ bis $x = \alpha$ und von $w = b$ bis $w = \beta$ das Integral $\int_a^\alpha \int_b^\beta \varphi(x, w) \cdot dw \cdot dx$ den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth annimmt, welchen das Integral $\int_a^\alpha \int_b^\beta F(x, w) \cdot dw \cdot dx$ bekommt; so ist $\int_a^\alpha \int_b^\beta \varphi(x, w) \cdot dw \cdot dx = \int_a^\alpha \int_b^\beta F(x, w) \cdot dw \cdot dx$, oder vielmehr

$$\text{IV)} \quad \int_a^\alpha \int_b^\beta \varphi(x, w) \cdot dw \cdot dx = \int_a^\alpha \int_b^\beta \varphi(x, w) \cdot dw \cdot dx + \varkappa \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta y \cdot dw \cdot dx$$

$$+ \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta^2 y \cdot dw \cdot dx + \ldots\ldots$$

Diese Gleichung findet statt, während der Werth des $\varkappa$ ein im Momente des Verschwindens befindlicher ist; sie ist also nur möglich, wenn einzeln stattfindet

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \delta y \cdot dw \cdot dx = 0, \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta^2 y \cdot dw \cdot dx = 0, \int_a^\alpha \int_b^\beta \delta^3 y \cdot dw \cdot dx = 0,$$

etc. etc. Setzt man nun zur Abkürzung

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \varphi(x, w) \cdot dw \cdot dx = z_{\alpha,\beta} - z_{\alpha,b} - z_{a,\beta} + z_{a,b}$$

so kann man auch zur Abkürzung

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \delta y \cdot dw \cdot dx = \delta z_{\alpha,\beta} - \delta z_{\alpha,b} - \delta z_{a,\beta} + \delta z_{a,b}$$

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \delta^2 y \cdot dw \cdot dx = \delta^2 z_{\alpha,\beta} - \delta^2 y_{\alpha,b} - \delta^2 y_{a,\beta} + \delta^2 z_{a,b}$$

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \delta^3 y \cdot dw \cdot dx = \delta^3 z_{\alpha,\beta} - \delta^3 z_{\alpha,b} - \delta^3 z_{a,\beta} + \delta^3 z_{a,b}$$

etc. etc.
setzen; und man hat die einzelnen Gleichungen:

$$\delta z_{\alpha,\beta} - \delta z_{\alpha,b} - \delta z_{a,\beta} + \delta z_{a,b} = 0$$

$$\delta^2 z_{\alpha,\beta} - \delta^2 z_{\alpha,b} - \delta^2 z_{a,\beta} + \delta^2 z_{a,b} = 0$$

$$\delta^3 z_{\alpha,\beta} - \delta^3 z_{\alpha,b} - \delta^3 z_{a,\beta} + \delta^3 z_{a,b} = 0$$

etc. etc.

Es gibt aber eine unendliche Menge Functionen δz von x und w, welche die Eigenschaft haben, dass bei den speciellen Werthen $x = a$, $x = \alpha$, $w = b$, $w = \beta$, die Gleichung

$$\delta z_{\alpha,\beta} - \delta z_{\alpha,b} - \delta z_{a,\beta} + \delta z_{a,b} = 0$$

stattfindet; z. B. jede beliebige Function $f'(x, w, A)$, welche einen willkürlichen Constanten A enthält, der noch so bestimmt werden kann, dass die Gleichung

$$f'(\alpha, \beta, A) - f'(\alpha, b, A) - f'(a, \beta, A) + f'(a, b, A) = 0$$

stattfindet. Und so fort.

§. 91. Wenn δy jede beliebige nur keine identische Function von x vorstellt; so sind die Ausdrücke $\delta y, \frac{d\delta y}{dx}, \frac{d^2\delta y}{dx^2}, \frac{d^3\delta y}{dx^3}, \ldots\ldots, \frac{d^m\delta y}{dx^m}$ nur der Form nach voneinander abhängig, dem Werthe nach sind sie von einander unabhängig und willkürlich.

Beweis. Alle diese Ausdrücke sind der Form nach von einander abhängig, weil mit der Form der (beliebigen) Urfunction δy auch jedesmal die Form aller ihrer Differentialquotienten mitgegeben ist. Alle diese Ausdrücke sind aber dem Werthe nach von einander unabhängig und willkürlich, weil dieser nicht bloss durch die Form des δy sondern auch durch die Werthe der in δy enthaltenen Constanten bedingt ist, welche willkürlich sind, eben weil δy selbst willkürlich ist. Um jedoch der Anschauung zu Hilfe zu kommen, nehme man für δy eine ganz bestimmte mit noch wenigstens (m + 1) willkürlichen Constanten versehene Function

$$\delta y = f(x, K_0, K_1, K_2 \ldots\ldots K_m)$$

und lege dem x einen speciellen Werth $\mathfrak{x}$ bei. Dann kann man verlangen, dass jeder der Ausdrücke $\delta y_{\mathfrak{x}}$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_{\mathfrak{x}}$, $\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_{\mathfrak{x}} \ldots\ldots \left(\frac{d^m\delta y}{dx^m}\right)_{\mathfrak{x}}$ bezüglich einen nach Willkür zu wählenden bestimmten Werth $H_0, H_1, H_2, \ldots\ldots H_m$ annehme, so dass folgende (m + 1) Gleichungen

$$f(\mathfrak{x}, K_0, K_1, K_2, \ldots. K_m) = H_0$$

$$\left(\frac{df(x, K_0, K_1, K_2 \ldots.. K_m)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}} = H_1$$

$$\left(\frac{d^2f(x, K_0, K_1, K_2, \ldots.. K_m)}{dx^2}\right)_{\mathfrak{x}} = H_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{d^mf(x, K_0, K_1, K_2, \ldots.. K_m)}{dx^m}\right)_{\mathfrak{x}} = H_m$$

stattfinden. Aus diesen (m + 1) Gleichungen erhält jeder der (m + 1) willkürlichen Constanten $K_0, K_1, K_2 \ldots\ldots K_m$ eine Bestimmung. Aber eben weil die Werthe H_0, H_1, $H_2 \ldots\ldots H_m$ ganz nach Willkür gewählt werden können; so können auch die Werthe der (m + 1) Ausdrücke $\delta y_{\mathfrak{x}}$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_{\mathfrak{x}}$, $\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_{\mathfrak{x}} \ldots\ldots \left(\frac{d^m\delta y}{dx^m}\right)_{\mathfrak{x}}$ ganz nach Willkür genommen werden. Der vorgelegte Satz gilt nun schon, wenn δy eine bestimmte Function von x ist, und x einen speciellen Werth $\mathfrak{x}$ hat; er muss also um so mehr gelten, so lange δy noch jede beliebige Function von x vorstellt, und x noch jeden beliebigen Werth annehmen kann.

Diese Wahrheit kann auch, wenn man will, als die Grundlage zum Beweise der jetzt nachfolgenden Sätze benützt werden.

I. Wenn für δy jede beliebige nur keine identische Function von x gesetzt werden darf; und wenn die Coefficienten $\mathfrak{A}$ und A_0 nur aus x und constanten Elementen gebildete dagegen von δy ganz unabhängige Ausdrücke sind; so kann die Gleichung

$$\mathfrak{A} + A_0 \cdot \delta y = 0$$

nur wahr sein, wenn bei jedem Werthe des x einzeln stattfindet $\mathfrak{A} = 0$ und $A_0 = 0$.

Beweis. Wäre weder $\mathfrak{A} = 0$ noch $A_0 = 0$; so würde aus obiger Gleichung $\delta y = -\frac{\mathfrak{A}}{A_0}$ folgen, d. h. δy wäre eine ganz bestimmte Function von x, was der Voraussetzung widerspricht. Wäre nur $\mathfrak{A} = 0$; so würde sich obige Gleichung zurückziehen auf $A_0 \cdot dy = 0$, woraus, eben wegen der Willkürlichkeit des δy, auch $A_0 = 0$ folgen muss. Wäre aber nur $A_0 = 0$, so würde sich die vorgelegte Gleichung schon

von selbst auf $\mathfrak{A} = 0$ zurückziehen. Aus allem diesem folgt, dass die hiesige Voraussetzung nur erfüllt wird, wenn identisch $\mathfrak{A} = 0$ und $A_0 = 0$ stattfindet.

II. Wenn für δy jede beliebige nur keine identische Function von x gesetzt werden darf; und wenn die Coefficienten $\mathfrak{A}$, A_0, A_1 nur aus x und constanten Elementen gebildete dagegen von δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ ganz unabhängige Ausdrücke sind; so kann die Gleichung

$$\mathfrak{A} + A_0 \cdot \delta y + A_1 \cdot \frac{d\delta y}{dx} = 0$$

nur wahr sein, wenn bei jedem Werthe des x einzeln stattfindet $\mathfrak{A} = 0$, $A_0 = 0$ und $A_1 = 0$.

Beweis. Wäre weder $\mathfrak{A} = 0$, noch $A_0 = 0$, noch $A_1 = 0$; so könnte man die vorgelegte Gleichung als totale Differentialgleichung der ersten Ordnung integriren, und es würde sich für δy eine ganz bestimmte Function von x mit einem willkürlichen Constanten ergeben, was der Voraussetzung widerspricht. Wäre nur $\mathfrak{A} = 0$, so würde sich die vorgelegte Gleichung auf $A_0 \cdot \delta y + A_1 \cdot \frac{d\delta y}{dx} = 0$ reduciren; man könnte also wieder integriren, und würde für dy wieder eine ganz bestimmte Function von x mit einem willkürlichen Constanten erhalten, was der Voraussetzung widerspricht. Wäre aber nur $A_0 = 0$, so würde sich die vorgelegte Gleichung auf $\mathfrak{A} + A_1 \cdot \frac{d\delta y}{dx} = 0$ reduciren; und man könnte abermals integriren, und würde für δy abermals eine ganz bestimmte Function von x mit einem willkürlichen Constanten erhalten, was der Voraussetzung widerspricht. Wäre nur $A_1 = 0$, so würde sich die vorgelegte Gleichung auf $\mathfrak{A} + A_0 \cdot \delta y = 0$ reduciren, welches wieder der vorhergehende (in Nro. 1 aufgestellte) Fall ist. Wären aber von den Coefficienten $\mathfrak{A}$, A_0, A_1, zwei identisch Null, so müsste nothwendig auch der dritte identisch Null sein. Aus allem diesem geht hervor, dass jeder der drei Coefficienten $\mathfrak{A}$, A_0, A_1 auch schon dann identisch Null sein muss, wenn δy eine bestimmte aber mit mehr als einem willkürlichen Constanten versehene Function von x ist.

III. Allgemein. Wenn man für δy jede beliebige nur keine identische Function von x setzen darf, und wenn die Coefficienten $\mathfrak{A}$, A_0, A_1, A_2 A_m nur aus x und aus constanten Elementen gebildete, dagegen von δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$ $\frac{d^m\delta y}{dx^m}$ ganz unabhängige Ausdrücke sind; so kann die Gleichung

$$\mathfrak{A} + A_0 \cdot \delta y + A_1 \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + A_m \cdot \frac{d^m\delta y}{dx^m} = 0$$

nur wahr sein, wenn bei jedem Werthe des x einzeln stattfindet $\mathfrak{A} = 0$, $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ $A_m = 0$.

Beweis. Wäre keiner der Coefficienten dieser Gleichung Null, so könnte man sie als totale Differentialgleichung der m-ten Ordnung integriren, und es würde sich für δy eine ganz bestimmte Function von x mit m willkürlichen Constanten ergeben. Und so fort, wenn schon ursprünglich einer oder mehrere der Coefficienten der vorgelegten Gleichung Null wären. Zuletzt kommt man zu der Erkenntniss, dass jeder einzelne Coefficient $\mathfrak{A}$, A_0, A_1, A_2 A_m schon in dem Falle identisch Null sein muss, wenn δy eine bestimmte Function von x mit mehr als m willkürlichen Constanten ist.

(Zerlegungen dieser Art findet man ausgeführt in §. 230 und §. 235; sodann in den Aufgaben 158, 159, 162, 163, etc.)

§. 92. I. Wenn δy jede beliebige nichtidentische Function von x vorstellt, und wenn man sich unter a, b, c bestimmte Werthe des x zu denken hat; so sind die Werthe von δy_a, δy_b, δy_c ganz voneinander unabhängig und willkürlich.

Beweis. Man denke sich unter δy eine bestimmte Function f(x, g, h, k) mit drei

noch willkürlichen Constanten g, h, k; so kann man verlangen, dass bei den bestimmten Werthen $x = a$, $x = b$, $x = c$ diese Function die ganz nach Willkür zu wählenden Werthe G, H, K annehme, so dass dann die drei Gleichungen $f(a, g, h, k) = G$, $f(b, g, h, k) = H$ und $f(c, g, h, k) = K$ stattfinden. Aber eben weil die drei Werthe G, H, K ganz nach Willkür genommen werden können, so können auch den aus $\delta y = f(x, g, h, k)$ hervorgehenden drei Ausdrücken δy_a, δy_b, δy_c ganz beliebige Werthe beigelegt werden; und da der vorgelegte Satz schon gilt, wenn δy eine ganz bestimmte Function ist, so muss er um so mehr gelten, so lange δy noch jede beliebige Function vorstellt.

II. Wenn δy jede beliebige nichtidentische Function von x vorstellt und wenn man sich unter a, b, c bestimmte Werthe des x zu denken hat; so sind auch die Werthe folgender sechs Ausdrücke δy_a, δy_b, δy_c, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_b$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_c$ ganz voneinander unabhängig und willkürlich.

Beweis. Diesen kann man ebenso, wie im vorigen Falle, dadurch führen, dass man für δy irgend eine bestimmte Function mit noch wenigstens sechs willkürlichen Constanten setzt; denn da der vorgelegte Satz schon gilt, wenn δy eine ganz bestimmte Function ist, so muss er um so mehr gelten, so lange δy noch jede beliebige Function vorstellt.

Und so fort.

Diese Wahrheiten können auch, wenn man will, als die Grundlage zum Beweise des jetzt nachfolgenden Satzes benützt werden.

Wenn man für δy jede beliebige nur keine identische Function von x setzen darf; und wenn alle die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, A_0, B_0, C_0, etc. von den Ausdrücken δy_a, δy_b, δy_c, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_b$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_c$, etc. unabhängig sind; und wenn man sich unter a, b, c bestimmte Werthe zu denken hat; so kann die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A} + A_0 \cdot \delta y_a + A_1 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a + \dots\dots\dots + A_m \cdot \left(\frac{d^m\delta y}{dx^m}\right)_a \\
&+ \mathfrak{B} + B_0 \cdot \delta y_b + B_1 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_b + \dots\dots\dots + B_n \cdot \left(\frac{d^n\delta y}{dx^n}\right)_b \\
&+ \mathfrak{C} + C_0 \cdot \delta y_c + C_1 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_c + \dots\dots\dots + C_p \cdot \left(\frac{d^p\delta y}{dx^p}\right)_c \\
&= 0
\end{aligned}$$

nur wahr sein, wenn einzeln stattfindet

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 0 \\
&A_0 = 0,\ A_1 = 0,\ A_2 = 0, \dots\dots A_m = 0, \\
&B_0 = 0,\ B_1 = 0,\ B_2 = 0, \dots\dots B_n = 0, \\
&C_0 = 0,\ C_1 = 0,\ C_2 = 0, \dots\dots C_p = 0.
\end{aligned}$$

Beweis. Da die $(m + n + p + 4)$ Ausdrücke $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})$, A_0, $A_1 \dots\dots A_m$, B_0, $B_1, \dots, B_n$, C_0, $C_1, \dots, C_p$ ganz unabhängig sind von den $(m + n + p + 3)$ Ausdrücken δy_a, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a, \dots\dots, \left(\frac{d^m\delta y}{dx^m}\right)_a$, δy_b, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_b, \dots\dots, \left(\frac{d^n\delta y}{dx^n}\right)_b$, δy_c, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_c, \dots\dots, \left(\frac{d^p\delta y}{dx^p}\right)_c$; so erleiden erstere nicht die geringste Aenderung, man mag

für δy was immer für eine beliebige Function von x setzen. Hat man also bewiesen, dass der hier gestellte Satz bei irgend einem δy gilt, so gilt er auch bei jedem andern δy. Man nehme also für δy irgend eine (z. B. eine algebraische rationale ganze) Function von x mit noch wenigstens $(m + n + p + 3)$ voneinander unabhängigen und willkürlichen Constanten, so lassen sich diese Constanten allemal anders und anders nehmen und zugleich auch so, dass die $(m + n + p + 3)$ Ausdrücke δy_a, δy_b, δy_c, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$, etc. alle zu Null werden, wesshalb schon

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 0$$

sein muss. Lässt man aber diese drei Theilsätze gleich anfangs aus der ursprünglichen Gleichung weg, so kann man wiederum den $(m + n + p + 3)$ willkürlichen Constanten solche Werthe beilegen, dass von den $(m + n + p + 3)$ Ausdrücken δy_a, δy_b, δy_c, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$, etc. alle bis auf einen zu Null werden, dieser eine aber, welcher nicht zu Null wird, einen bestimmten Werth bekommt. Dann könnte aber die gegebene Gleichung nicht bestehen, wenn nicht der Coefficient dieses letzteren zu Null würde. Und da dieser letztere jeder der Ausdrücke δy_a, δy_b, δy_c, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$, etc. sein kann; so müssen alle ihre Coefficienten einzeln Null sein.

§. 93. Wenn man für δy jede beliebige nur keine identische Function von x setzen darf; und wenn alle die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, A_0, B_0, A_1, B_1, etc. von den Ausdrücken δy, δy_a, $\frac{d\delta y}{dx}$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$, etc. unabhängig sind; so kann die Gleichung

$$\mathfrak{A} + A_0 \cdot \delta y + A_1 \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \ldots\ldots\ldots + A_m \cdot \frac{d^m \delta y}{dx^m}$$

$$+ \mathfrak{B} + B_0 \cdot \delta y_a + B_1 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a + \ldots\ldots\ldots + B_n \cdot \left(\frac{d^n \delta y}{dx^n}\right)_a$$

$$= 0$$

nur wahr sein, wenn einzeln stattfindet $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 0$, $A_0 = 0$, $A_1 = 0 \ldots . A_m = 0$, $B_0 = 0$, $B_1 = 0 \ldots\ldots B_n = 0$.

Beweis. Da die $(m + n + 3)$ Ausdrücke $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$, A_0, $A_1 \ldots\ldots A_m$, B_0, $B_1 \ldots\ldots B_n$ ganz unabhängig sind von den $(m + n + 2)$ Ausdrücken dy, $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^m\delta y}{dx^m}$, δy_a, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_a, \ldots, \left(\frac{d^n\delta y}{dx^n}\right)_a$; so erleiden erstere nicht die geringste Aenderung, man mag für δy was immer für eine beliebige Function von x setzen. Hat man daher bewiesen, dass der vorliegende Satz bei irgend einem δy giltig ist, so gilt er auch bei jedem andern δy. Man setze also für δy irgend eine (z. B. eine algebraische rationale ganze) Function von x mit noch wenigstens $(m + n + 2)$ willkürlichen Constanten, so dass $(n + 1)$ derselben verbraucht werden können, um die $(n + 1)$ Ausdrücke δy_a, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a, \ldots, \left(\frac{d^n\delta y}{dx^n}\right)_a$ alle zu Null zu machen. Dann reducirt sich die gegebene Gleichung auf

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + A_0 \cdot \delta y + A_1 \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \ldots\ldots\ldots + A_m \cdot \frac{d^m\delta y}{dx^m} = 0$$

wo das δy eine Function von x ist, welche noch $(m + 1)$ willkürliche Constanten enthält, so dass hier (ebenso wie in §. 91) einzeln stattfinden muss $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = 0$, $A_0 = 0$, $A_1 = 0 \ldots . A_m = 0$, und dass sich die gegebene Gleichung im Allgemeinen zurückzieht auf

$$B_0 \cdot \delta y_a + B_1 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a + B_2 \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_a + \ldots\ldots + B_n \cdot \left(\frac{d^n\delta y}{dx^n}\right)_a = 0$$

welche Gleichung wiederum für jedes δy gelten muss, so dass sie (nach vorigem §.) nur wahr sein kann, wenn auch hier einzeln stattfindet $B_0 = 0$, $B_1 = 0 \ldots$, $B_n = 0$.

§. 94. Wenn nebst δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, etc. noch andere Mutationscoefficienten und ihre Differentialquotienten δz, $\frac{d\delta z}{dx}$, $\frac{d^2\delta z}{dx^2}$, etc., δv, $\frac{d\delta v}{dx}$, $\frac{d^2\delta v}{dx^2}$, etc. vorkommen, wo δy, δz, δv ganz unabhängig untereinander sind; so müssen die bisherigen Sätze auch für diesen Fall gelten (Eine Anwendung liefert die Zerlegung der Gleichung V in §. 239).

Wenn zwischen den Ausdrücken

$$\delta y, \frac{d\delta y}{dx}, \frac{d^2\delta y}{dx^2}, \ldots\ldots, \frac{d^m\delta y}{dx^m}$$

wo x noch jeden beliebigen Werth annehmen kann; oder wenn zwischen den Ausdrücken

$$\delta y_a, \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a, \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_a, \ldots\ldots, \left(\frac{d^n\delta y}{dx^n}\right)_a$$

$$\delta y_b, \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_b, \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_b, \ldots\ldots, \left(\frac{d^p\delta y}{dx^p}\right)_b$$

etc. etc.
wo das x bereits specielle Werthe angenommen hat, noch Bedingungsgleichungen gegeben sind; so muss man aus den (in den §§. 91—94) hingestellten Gleichungen soviele Stücke eliminiren, als Bedingungsgleichungen gegeben sind. Bedarf keines Beweises. Bei diesem Eliminationsprocesse wird die (in den §. 68, etc. gebrauchte) Multiplicatorenmethode oft grosse Bequemlichkeiten bieten.

§. 95. Wenn δy jede beliebige nur keine identische Function von x und w vorstellt; so sind die Ausdrücke δy, $\frac{d_x\delta y}{dx}$, $\frac{d_w\delta y}{dw}$, $\frac{d_x^2\delta y}{dx^2}$, $\frac{d_x d_w\delta y}{dx\,.\,dw}$, $\frac{d_w^2\delta y}{dw^2}$, etc. nur der Form nach von einander abhängig; dem Werthe nach sind sie von einander unabhängig und willkürlich.

Beweis. Alle diese Ausdrücke sind der Form nach von einander abhängig, weil mit der Form der (beliebigen) Urfunction δy auch jedesmal die Form ihrer partiellen Differentialquotienten mitgegeben ist. Alle diese Ausdrücke sind aber dem Werthe nach von einander unabhängig und willkürlich, weil dieser nicht bloss durch die Form des δy sondern auch durch die Werthe der in δy enthaltenen Constanten bedingt ist, welche willkürlich sind, eben weil δy selbst willkürlich ist. Man kann aber (nach Analogie des §. 91) der Anschauung zu Hilfe kommen, wenn man für δy eine ganz bestimmte mit einer hinlänglichen Anzahl willkürlicher Constanten versehene Function von x und w nimmt, und dem x und w bezüglich die speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{w}$ beilegt. Dann kann man verlangen, dass jeder der Ausdrücke $\delta y_{\mathfrak{x},\mathfrak{w}}$, $\left(\frac{d_x\delta y}{dx}\right)_{\mathfrak{x},\mathfrak{w}}$, $\left(\frac{d_w\delta y}{dw}\right)_{\mathfrak{x},\mathfrak{w}}$, $\left(\frac{d_x^2\delta y}{dx^2}\right)_{\mathfrak{x},\mathfrak{w}}$, $\left(\frac{d_x d_w\delta y}{dx\,.\,dw}\right)_{\mathfrak{x},\mathfrak{w}}$, $\left(\frac{d_w^2\delta y}{dw^2}\right)_{\mathfrak{x},\mathfrak{w}}$, etc. bezüglich einen nach Willkür zu wählenden bestimmten Werth H_0, H_1', H_1'', H_2', H_2'', H_2''', etc. annehme. Der vorgelegte Satz gilt nun schon, wenn δy eine bestimmte Function von x und w ist, und x und w bezüglich die speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{w}$ haben; er muss also um so mehr gelten, so lange δy noch jede beliebige Function von x und w vorstellt, und x und w noch jeden beliebigen Werth annehmen können.

Diese Wahrheit kann, wenn man will, als die Grundlage zum Beweise der jetzt nachfolgenden Sätze benützt werden.

I. Wenn für δy jede beliebige nur keine identische Function von x und w gesetzt werden darf; und wenn die Coefficienten $\mathfrak{A}$ und A_0 nur aus x, w und constanten Elementen gebildete, dagegen von δy ganz unabhängige Ausdrücke sind; so kann die Gleichung

$$\mathfrak{A} + A_0 \cdot \delta y = 0$$

nur wahr sein, wenn bei jedem Werthe des x und w einzeln stattfindet $\mathfrak{A} = 0$ und $A_0 = 0$.

Beweis. Ganz nach Analogie von Nro. I des §. 91.

II. Wenn für δy jede beliebige nur keine identische Function von x und w gesetzt werden darf; und wenn die Coefficienten $\mathfrak{A}$, A_0, A_1', A_1'', nur aus x und w und constanten Elementen gebildete dagegen von δy, $\frac{d_x\delta y}{dx}$, $\frac{d_w\delta y}{dw}$ unabhängige Ausdrücke sind; so kann die Gleichung

$$\mathfrak{A} + A_0 \cdot \delta y + A_1' \cdot \frac{d_x dy}{dx} + A_1'' \cdot \frac{d_w \delta y}{dw} = 0$$

nur wahr sein, wenn bei jedem Werthe des x und des w einzeln stattfindet $\mathfrak{A} = 0$, $A_0 = 0$, $A_1' = 0$, und $A_1'' = 0$.

Beweis. Wäre keiner der vier Coefficienten $\mathfrak{A}$, A_0, A_1', A_1'' Null; so könnte man die vorgelegte Gleichung als Partialdifferentialgleichung der ersten Ordnung integriren. Man würde dann, eben weil in keinem einzigen der vier Coefficienten das δy enthalten ist, für δy einen aus den Elementen x, w, $\psi(\omega)$ auf ganz bestimmte Weise gebildeten Ausdruck bekommen, wo $\psi(\omega)$ eine zwar willkürliche Function von ω vorstellt, ω selbst aber ein ganz bestimmter aus x und w gebildeter Ausdruck ist (Man sehe eine derartige Integration in den Gleichungen ⊙ und ☽ der sogleich nachfolgenden Anmerkung). Somit könnte jetzt δy nicht jede beliebige Function, sondern nur eine gewisse Klasse Functionen von x und w sein, was der Voraussetzung widerspricht. Wäre nur $A_1'' = 0$, so würde die hier vorgelegte Gleichung sich auf $\mathfrak{A} + A_0 \cdot \delta y + A_1' \cdot \frac{d_x\delta y}{dx} = 0$ reduciren; und durch Integration würde man für δy einen aus den Elementen x, w, $\psi(w)$ auf ganz bestimmte Weise gebildeten Ausdruck bekommen, wo $\psi(w)$ eine willkürliche Function von w vorstellt. Somit könnte auch jetzt δy nicht jede beliebige Function sondern nur eine gewisse Klasse Functionen von x und w vorstellen, was abermals der Voraussetzung widerspricht. Und so fort, nach Analogie von Nro. II des §. 91. Man kommt zuletzt zu der Erkenntniss, dass schon dann jeder einzelne der vier Coefficienten $\mathfrak{A}$, A_0, A_1', A_1'' Null sein muss, wenn für δy eine solche bestimmte Function von x und w gesetzt werden darf, welche kein besonderes Integral der vorgelegten Partialdifferentialgleichung ist, und mehr als zwei (in der vorgelegten Gleichung nicht vorkommende) willkürliche Constanten enthält.

Folgende Erinnerung aus dem Integralcalcul ist vielleicht nicht überflüssig:

1) Ein singuläres Integral einer Partialdifferentialgleichung der ersten Ordnung kann höchstens zwei willkürliche Constanten enthalten, welche nicht in der vorgelegten Differentialgleichung vorkommen.

2) Ein besonderes Integral einer Partialdifferentialgleichung der ersten Ordnung kann mehr als zwei willkürliche Constanten enthalten, welche nicht in der vorgelegten Differentialgleichung vorkommen. Ist z. B. gegeben

$$⊙ \quad k + (-1) \cdot \delta y + (x - n) \cdot \frac{d_x\delta y}{dx} + (w - m) \cdot \frac{d_w\delta y}{dw} = 0$$

wo k, m und n willkürliche Constanten sind; so folgt daraus das **allgemeine** Integral

$$☽ \quad \delta y = k + (x - n) \cdot \psi\left(\frac{w-m}{x-n}\right)$$

wo $\psi\left(\frac{w-m}{x-n}\right)$ eine ganz willkürliche Function des Quotienten $\frac{w-m}{x-n}$ vorstellt; und wenn man bestimmte Functionen von $\frac{w-m}{x-n}$ nimmt, so bekommt man **besondere** Integrale. Setzt man z. B.

$$\psi\left(\frac{w-m}{x-n}\right) = B \cdot \left(\frac{x-n}{w-m}\right) + C \cdot \left(\frac{x-n}{w-m}\right)^2 + E \cdot \left(\frac{x-n}{w-m}\right)^3 + G \cdot \left(\frac{x-n}{w-m}\right)^4$$

so geht Gleichung ☽ über in

$$♀ \quad \delta y = k + (x-n) \cdot \left(B \cdot \left(\frac{x-n}{w-m}\right) + C \cdot \left(\frac{x-n}{w-m}\right)^2 + E \cdot \left(\frac{x-n}{w-m}\right)^3 + G \cdot \left(\frac{x-n}{w-m}\right)^4\right)$$

in welchem **besondern** Integrale vier willkürliche Constanten B, C, E, G vorkommen, die in Gleichung ⊙ nicht enthalten sind. Setzt man nun zur Abkürzung:

$$Q = B \cdot \left(\frac{x-n}{w-m}\right) + C \cdot \left(\frac{x-n}{w-m}\right)^2 + E \cdot \left(\frac{x-n}{w-m}\right)^3 + G \cdot \left(\frac{x-n}{w-m}\right)^4$$

und

$$R = B + 2\,C \cdot \left(\frac{x-n}{w-m}\right) + 3E \cdot \left(\frac{x-n}{w-m}\right)^2 + 4G \cdot \left(\frac{x-n}{w-m}\right)^3$$

so bekommt man aus der Gleichung ♀

$$\delta y = k + (x-n) \cdot Q$$

$$\frac{d_x \delta y}{dx} = Q + \frac{x-n}{w-m} \cdot R$$

$$\frac{d_w \delta y}{dw} = -\left(\frac{x-n}{w-m}\right)^2 \cdot R$$

Substituirt man diese drei Ausdrücke in Gleichung ⊙, so wird ihr genügt, unabhängig von den Werthen der vier willkürlichen Constanten B. C, E, G.

III. Wenn für δy jede beliebige nur keine identische Function von x und w gesetzt werden darf; und wenn die Coefficienten $\mathfrak{A}$, A_0, A_1', A_1'', A_2', A_2'', A_2''' nur aus x und w und constanten Elementen gebildete, dagegen von δy, $\frac{d_x \delta y}{dx}$, $\frac{d_w \delta y}{dw}$, $\frac{d_x^2 \delta y}{dx^2}$, $\frac{d_x d_w \delta y}{dx \cdot dw}$, $\frac{d_w^2 \delta y}{dw^2}$ unabhängige Ausdrücke sind; so kann die Gleichung

$$\mathfrak{A} + A_0 \cdot \delta y + A_1' \cdot \frac{d_x \delta y}{dx} + A_1'' \cdot \frac{d_w \delta y}{dw} + A_2' \cdot \frac{d_x^2 \delta y}{dx^2} + A_2'' \cdot \frac{d_x d_w \delta y}{dx \cdot dw} + A_2''' \cdot \frac{d_w^2 \delta y}{dw^2} = 0$$

nur wahr sein, wenn bei jedem Werthe des x und des w einzeln stattfindet $\mathfrak{A} = 0$, $A_0 = 0$, $A_1' = 0$, $A_1'' = 0$, $A_2' = 0$, $A_2'' = 0$, $A_2''' = 0$.

Beweis. Wird geführt, wie beim vorigen Falle. Zuletzt kommt man zu der Erkenntniss, dass schon dann jeder einzelne der sieben Coefficienten $\mathfrak{A}$, A_0, A_1', A_1'', A_2', A_2'', A_2''' Null sein muss, wenn für δy eine solche bestimmte Function von x und w gesetzt werden darf, welche kein besonderes Integral der vorgelegten Partialdifferentialgleichung ist, und mehr als fünf (in der gegebenen Gleichung nicht vorkommende) willkürliche Constanten enthält.

Und so fort bei noch ausgedehnteren Fällen. (Zerlegungen dieser Art sind ausgeführt in den Aufgaben 251 bis 257.)

§. 96. Wenn man für δy jede beliebige nur keine identische Function von x und w setzen darf, und in der Gleichung

$$\mathfrak{A} + A_0 \cdot \delta y_{a,b} + A_1' \cdot \left(\frac{d_x \delta y}{dx}\right)_{a,b} + A_1'' \cdot \left(\frac{d_w \delta y}{dw}\right)_{a,b} + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \mathfrak{B} + B_0 \cdot \delta y_{\alpha,\beta} + B_1' \cdot \left(\frac{d_x \delta y}{dx}\right)_{\alpha,\beta} + B_1'' \cdot \left(\frac{d_w \delta y}{dw}\right)_{\alpha,\beta} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 0$$

die Coefficienten alle von den Ausdrücken $\delta y_{a,b}$, $\delta y_{\alpha,\beta}$, $\left(\frac{d_x \delta y}{dx}\right)_{a,b}$, $\left(\frac{d_w \delta y}{dw}\right)_{a,b}$, $\left(\frac{d_x \delta y}{dx}\right)_{\alpha,\beta}$, etc. unabhängig sind; so kann diese Gleichung, in welcher a und α bestimmte constante Werthe des x, und b und β bestimmte constante Werthe des w vorstellen, nur wahr sein, wenn einzeln stattfindet, $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = 0$, $A_0 = 0$, $B_0 = 0$, $A_1' = 0$, $A_1'' = 0$, $B_1' = 0$, $B_1'' = 0$, etc.

Der Beweis ist nach dem Vorgange des §. 92 und des §. 95 von selbst klar.

§. 97. Wenn man für δy jede beliebige nur keine identische Function von x und w setzen darf, und in der Gleichung

$$\mathfrak{A} + A_0 \cdot \delta y + A_1' \cdot \frac{d_x \delta y}{dx} + A_1'' \cdot \frac{d_w \delta y}{dw} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \mathfrak{B} + B_0 \cdot \delta y_{a,b} + B_1' \cdot \left(\frac{d_x \delta y}{dx}\right)_{a,b} + B_1'' \cdot \left(\frac{d_w \delta y}{dw}\right)_{a,b} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 0$$

die Coefficienten alle von den Ausdrücken δy, $\delta y_{a,b}$, $\frac{d_x \delta y}{dx}$, $\left(\frac{d_x \delta y}{dx}\right)_{a,b}$, $\frac{d_w \delta y}{dw}$, $\left(\frac{d_w \delta y}{dw}\right)_{a,b}$, etc. unabhängig sind; so kann diese Gleichung nur wahr sein, wenn einzeln stattfindet $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 0$, $A_0 = 0$, $B_0 = 0$, $A_1' = 0$, etc. etc.

Der Beweis ist nach dem Vorgange des §. 93 und des §. 95 von selbst klar.

§. 98. Wenn zwischen den Ausdrücken

$$\delta y,\ \frac{d_x \delta y}{dx},\ \frac{d_w \delta y}{\delta w},\ \frac{d_x^2 \delta y}{dx^2},\ \frac{d_x d_w \delta y}{dx.dw},\ \frac{d_w^2 \delta y}{dw^2},\ \text{etc.}$$

wo x und w noch ganz beliebige Werthe annehmen können, oder wenn zwischen den Ausdrücken

$$\delta y_{a,b},\ \left(\frac{d_x \delta y}{dx}\right)_{a,b},\ \left(\frac{d_w \delta y}{dw}\right)_{a,b},\ \left(\frac{d_x^2 \delta y}{dx^2}\right)_{a,b},\ \left(\frac{d_x d_w \delta y}{dx.dw}\right)_{a,b},\ \left(\frac{d_w^2 \delta y}{dw^2}\right)_{a,b},\ \ldots\ldots\ldots$$

$$\delta y_{\alpha,\beta},\ \left(\frac{d_x \delta y}{dx}\right)_{\alpha,\beta},\ \left(\frac{d_w \delta y}{dw}\right)_{\alpha,\beta},\ \left(\frac{d_x^2 \delta y}{dx^2}\right)_{\alpha,\beta},\ \left(\frac{d_x d_w \delta y}{dx.dw}\right)_{\alpha,\beta},\ \left(\frac{d_w^2 \delta y}{dw^2}\right)_{\alpha,\beta},\ \ldots\ldots\ldots$$

wo x und w bereits specielle Werthe angenommen haben, noch Bedingungsgleichungen gegeben sind; so muss man aus den vorhandenen Gleichungen noch soviele Stücke eliminiren, als Bedingungsgleichungen gegeben sind. Bedarf keines Beweises. Bei diesem Eliminationsprocesse wird die (in den §§. 68, etc. gebrauchte) Multiplicatorenmethode oft grosse Bequemlichkeiten bieten.

§. 99. Wenn man für δy jede beliebige nur keine identische Function von x setzen darf, und $\alpha > a$ ist; so kann die Gleichung

$$\int_a^\alpha \varphi(x) \cdot \delta y \cdot dx = 0$$

nur wahr sein, wenn identisch $\varphi(x) = 0$ ist.

Beweis. Wäre nicht identisch $\varphi(x) = 0$, so dürfte δy unter seinen verschiedenen Formen auch einmal die Form $\frac{1}{\varphi(x)} \cdot \frac{dF(x)}{dx}$ annehmen, wo $F(x)$ jede beliebige Function von x vorstellt; und dabei wäre $\int_a^\alpha \varphi(x) \cdot \delta y \cdot dx = \int_a^\alpha \frac{dF(x)}{dx} \cdot dx = F(\alpha) - F(a)$, d. h. man käme jetzt auf den Widerspruch, dass der Ausdruck $F(\alpha) - F(a)$ jeden beliebigen Werth haben könne, und doch wiederum jedesmal Null sein müsse. Insoferne nun die Annahme „dass $\varphi(x)$ nicht identisch Null sein müsse" Fälle zulässt, welche der Voraussetzung widersprechen, bleibt nur übrig, dass $\varphi(x)$ identisch Null sein muss, damit unter allen Umständen die Gleichung $\int_a^\alpha \varphi(x) \cdot \delta y \cdot dx = 0$ erfüllt wird.

§. 100. Wenn $\alpha > a$ und $\beta > b$ ist, und δy jede beliebige nur keine identische Function von x und w sein darf; so ist die Gleichung

$$\int_a^\alpha \int_b^\beta \varphi(x, w) \cdot \delta y \cdot dw \cdot dx = 0$$

nur wahr, wenn identisch $\varphi(x, w) = 0$ ist, d. h. von jedem Werthe des x und von jedem Werthe des w erfüllt wird.

Beweis. Wird geführt, wie im vorigen §., d. h. dadurch, dass, wenn $\varphi(x, w)$ nicht identisch Null wäre, es Fälle gibt, welche der Voraussetzung widersprechen.

§. 101. Wenn wieder δy jede beliebige nur keine identische Function von x sein darf, und wenn in der Gleichung

$$Q_\alpha \cdot \delta y_\alpha + R_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha + \ldots\ldots + V_\alpha \cdot \left(\frac{d^m\delta y}{dx^m}\right)_\alpha$$

$$- Q_a \cdot \delta y_a - R_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a - \ldots\ldots\ldots - V_a \cdot \left(\frac{d^m\delta y}{dx^m}\right)_a$$

$$+ \int_a^\alpha \varphi(x) \cdot \delta y \cdot dx = 0$$

die Coefficienten alle von den Ausdrücken δy_α, δy_a, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$, etc. unabhängig sind, und wenn ferner zwischen letzteren Ausdrücken gleichfalls keine Abhängigkeit stattfindet; so ist diese Gleichung nur wahr, wenn zuerst identisch $\varphi(x) = 0$ ist, und ausserdem noch alle Coefficienten Q_α, Q_a, R_α, R_a V_α, V_a einzeln zu Null werden.

Beweis. Wäre $\varphi(x)$ nicht identisch Null, so könnte man $\delta y = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \frac{dF(x)}{dx}$ setzen, wo $\frac{dF(x)}{dx}$ eine ganz beliebige Function mit einer beliebigen Menge willkürlicher Constanten sein mag. Von diesen Constanten kann man nun $(2m + 2)$ so verbrauchen,

dass die (2m + 2) Ausdrücke δy_a, δy_α, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$, etc. alle zu Null werden, und die gegebene Gleichung sich auf

$$\int_a^\alpha \varphi(x) \cdot \delta y \cdot dx = 0$$

d. h. auf

$$\int_a^\alpha \varphi(x) \cdot \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \frac{dF(x)}{dx} \cdot dx = F(\alpha) - F(a) = 0$$

zurückzieht. Die Annahme, dass $\varphi(x)$ nicht identisch Null sei, führt also jetzt auf den Widerspruch, dass der Ausdruck $F(\alpha) - F(a)$ jeden beliebigen Werth haben könne, und doch wiederum jedesmal Null sein müsse; also ist auch jetzt nothwendig $\varphi(x)$ identisch Null (wie in §. 99). Die gegebene Gleichung reducirt sich also jedenfalls auf

$$Q_\alpha \cdot \delta y_\alpha + R_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha + \ldots\ldots\ldots + V_\alpha \cdot \left(\frac{d^m\delta y}{dx^m}\right)_\alpha$$
$$- Q_a \cdot \delta y_a - R_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a - \ldots\ldots\ldots - V_a \cdot \left(\frac{d^m\delta y}{dx^m}\right)_a$$
$$= 0$$

und von dieser Gleichung kann man (wie in §. 92) beweisen, dass einzeln stattfinden muss $Q_\alpha = 0$, $Q_a = 0$, $R_\alpha = 0$, $R_a = 0 \ldots\ldots V_\alpha = 0$, $V_a = 0$.

§. 102. Wenn δy wiederum keine identische Function von x sein darf, aber zwischen den Ausdrücken δy_α, δy_a, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$, etc. etc. Bedingungsgleichungen

$$\text{I)}\ f' = 0,\quad \text{II)}\ f'' = 0,\quad \text{III)}\ f''' = 0,\ \text{etc.}$$

gegeben sind, und zugleich noch die Gleichung

$$\text{IV)}\ Q_\alpha \cdot \delta y_\alpha + R_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha + \ldots\ldots\ldots + V_\alpha \cdot \left(\frac{d^m\delta y}{dx^m}\right)_\alpha$$
$$- Q_a \cdot \delta y_a - R_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a - \ldots\ldots\ldots - V_a \cdot \left(\frac{d^m\delta y}{dx^m}\right)_a$$
$$+ \int_a^\alpha \varphi(x) \cdot \delta y \cdot dx = 0$$

stattfinden soll; so kann jetzt δy nicht mehr unbedingt jede beliebige Function von x sein, sondern man kann sich jetzt unter δy nur noch alle diejenigen unendlichvielen Functionen von x denken, durch welche den Bedingungsgleichungen I, II, III, etc. genügt wird. Man wird also von den Ausdrücken δy_α, δy_a, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$, etc. alle diejenigen, die dem Werthe nach abhängig sind, aus IV eliminiren. Es sind aber soviele dem Werthe nach abhängig, als Bedingungsgleichungen stattfinden. Hat man besagte Elimination ausgeführt, dann gelangt man wiederum zuerst auf die identische Gleichung $\varphi(x) = 0$, und weiter noch auf soviele einzelne Gleichungen, als von den Ausdrücken δy_α, δy_a, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$, etc. in Gleichung IV zurückgeblieben sind.

Der Beweis wird auch hier geführt, indem man $\delta y = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \frac{dF(x)}{dx}$ setzt, und sich unter $\frac{dF(x)}{dx}$ eine ganz beliebige Function mit der nöthigen Anzahl willkürlicher Constanten denkt, etc. etc.

Es ist leicht, noch weitere Fälle hinzustellen und zu beweisen, namentlich auch die Fälle, wo δy eine Function zweier oder mehrerer nichtmutabler Veränderlicher $x \ldots\ldots w$ ist.

§. 103. Es sei die Gleichung

$$\text{I)} \quad F\left(a, \alpha, y_a, y_\alpha\right) = 0$$

gegeben, welche bei $y = \psi(x)$ erfüllt wird. Soll sie auch bei

$$y + \Delta y = \psi(x) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

erfüllt werden, so ist es jedesmal möglich, wenn die einzelnen Ausdrücke δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. solche Functionen von x sind, deren jede einen willkürlichen Constanten enthält.

Beweis. Man setze $y_a = p$ und $y_\alpha = q$, so folgt aus I nach und nach

$$\text{II)} \quad \frac{d_p F}{dp} \cdot \delta y_a + \frac{d_q F}{dq} \cdot \delta y_\alpha = 0$$

$$\text{III)} \quad \frac{d_p F}{dp} \cdot \delta^2 y_a + \frac{d_q F}{dq} \cdot \delta^2 y_\alpha + \frac{d_p^2 F}{dp^2} \cdot \delta y_a^2 + 2 \cdot \frac{d_p d_q F}{dp \cdot dq} \cdot \delta y_a \cdot \delta y_\alpha + \frac{d_q^2 F}{dq^2} \cdot \delta y_\alpha^2 = 0$$

etc. etc.

Setzt man ganz beliebig $\delta y = f'(x, m)$, so geht II über in

$$\text{IV)} \quad \frac{d_p F}{dp} \cdot f'(a, m) + \frac{d_q F}{dq} \cdot f'(\alpha, m) = 0$$

welche Gleichung nur dazu benützt zu werden braucht, um m zu bestimmen. Setzt man $\delta^2 y = f''(x, n)$, so geht III über in

$$\text{V)} \quad \frac{d_p F}{dp} \cdot f''(a, n) + \frac{d_q F}{dq} \cdot f''(\alpha, n) + \frac{d_p^2 F}{dp^2} \cdot (f'(a, m))^2 + 2 \cdot \frac{d_p d_q F}{dp \cdot dq} \cdot f'(a, m) \cdot f'(\alpha, m) + \frac{d_q^2 F}{dq^2} \cdot (f'(\alpha, m))^2 = 0$$

Da m schon in Gleichung IV bestimmt worden ist, so dient Gleichung V, um n zu bestimmen. Und so fort.

§. 104. Es sei die Gleichung

$$F\left(a, \alpha, y_a, y_\alpha, \left(\frac{dy}{dx}\right)_a, \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha, \ldots\ldots \left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)_a, \left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)_\alpha\right) = 0$$

gegeben, welche bei $y = \psi(x)$ erfüllt wird. Soll sie auch bei

$$y + \Delta y = \psi(x) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

erfüllt werden; so ist es jedesmal möglich, wenn die einzelnen Ausdrücke δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. solche Functionen von x sind, deren jede einen für sich willkürlichen Constanten enthält.

Beweis. Wird geführt, wie im vorigen §.

Es ist leicht, noch weitere Fälle hinzustellen und zu beweisen, namentlich auch die Fälle, wo y eine Function zweier oder mehrerer nichtmutabler Veränderlicher x w ist.

§. 105. Es sei die Gleichung

$$\text{I)}\quad F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

gegeben. Ihr allgemeines Integral sei

$$\text{II)}\quad y = \varphi(x,\ m)$$

wo m der durch die Integration eingegangene willkürliche Constante ist. Soll nun Gleichung I auch durch

$$y + \Delta y = \varphi(x,\ m) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

erfüllt werden; so sind die Formen der Functionen δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. nicht mehr willkürlich, sondern bestimmt.

Erster Beweis. Die verschiedenen Functionen, wodurch Gleichung I identisch gemacht werden kann, unterscheiden sich nur durch die Aenderungen des m. Man setze also (m + Dm) oder vielmehr

$$m + \varkappa \cdot \vartheta m + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 m + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 m + \ldots\ldots\ldots$$

an die Stelle des m in Gleichung II ein; und es gibt sich

$$\text{III)}\quad y + \Delta y = \varphi(x,\ m) + \varkappa \cdot \frac{d_m \varphi(x,\ m)}{dm} \cdot \vartheta m$$
$$+ \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d_m \varphi(x,\ m)}{dm} \cdot \vartheta^2 m + \frac{d_m^2 \varphi(x,\ m)}{dm^2} \cdot \vartheta m^2\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Man zerlege Δy in seine Bestandtheile

$$\varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots$$

so bekommt man

$$\text{IV)}\quad \delta y = \frac{d_m \varphi(x,\ m)}{dm} \cdot \vartheta m$$

$$\text{V)}\quad \delta^2 y = \frac{d_m \varphi(x,\ m)}{dm} \cdot \vartheta^2 m + \frac{d_m^2 \varphi(x,\ m)}{dm^2} \cdot \vartheta m^2$$

etc. etc.

Daraus folgt durch Differentiation

$$\text{VI)}\quad \frac{d\delta y}{dx} = \frac{d_x d_m \varphi(x,\ m)}{dx \cdot dm} \cdot \vartheta m$$

$$\text{VII)}\quad \frac{d\delta^2 y}{dx} = \frac{d_x d_m \varphi(x, m)}{dx \cdot dm} \cdot \vartheta^2 m + \frac{d_x d_m^2 \varphi(x, m)}{dx \cdot dm^2} \cdot \vartheta m^2$$

etc. etc.

Hiermit ist bewiesen, dass die Formen von δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, $\delta^2 y$, $\frac{d\delta^2 y}{dx}$, etc., wenn sie der Gleichung I genügen sollen, ganz bestimmte Formen sind.

Zweiter Beweis. Man setze p statt $\frac{dy}{dx}$, so folgt aus I nach und nach

$$\text{VIII)}\quad \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p F}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx} = 0$$

$$\text{IX)}\quad \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_p F}{dp} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{d_y^2 F}{dy^2} \cdot \delta y^2$$

$$+ 2 \cdot \frac{d_y d_p F}{dy . dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2 F}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 = 0$$

etc. etc.

Man führe nun $\varphi(x, m)$ in Gleichung VIII ein, so kann man sie darstellen durch

$$\text{X)}\quad P \cdot \delta y + Q \cdot \frac{d\delta y}{dx} = 0$$

wo P und Q kein y und kein $\frac{dy}{dx}$ mehr enthalten. Nun lässt sich Gleichung X umformen in $\frac{d\delta y}{\delta y} = -\frac{P}{Q} \cdot dx$; und daraus gibt sich durch Integration $\lg \text{nat} \frac{\delta y}{g} = \int\left(-\frac{P}{Q}\right) . dx$, wo g der durch die Integration eingegangene willkürliche Constante ist. Dieser Integralgleichung kann man auch noch folgende Form geben

$$\text{XI)}\quad \delta y = \chi \cdot g$$

und wenn man diese Gleichung mit IV vergleicht, so sieht man, dass χ die Stelle des $\frac{d_m \varphi(x, m)}{dm}$, und dass g die Stelle des ϑm vertritt.

Man kann die Gleichung X auch durch einen Factor integriren; dieser Factor sei $\mathfrak{L}$, und Gleichung X geht über in

$$\text{XII)}\quad \mathfrak{L} \cdot P \cdot \delta y + \mathfrak{L} \cdot Q \cdot \frac{d\delta y}{dx} = 0$$

Daraus folgt $\pi \cdot \delta y = g$, odor $\delta y = \frac{1}{\pi} \cdot g$; und wenn man χ statt $\frac{1}{\pi}$ setzt, so bekommt man

$$\text{XIII)}\quad \delta y = \chi \cdot g$$

welche Form schon in Gleichung XI aufgestellt ist. Man setze nun $\varphi(x, m)$ an die Stelle des y, und $\chi \cdot g$ an die Stelle des δy in Gleichung IX ein; so nimmt sie folgende Form an

$$P \cdot \delta^2 y + Q \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + R \cdot g^2 = 0$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dem schon einmal angewandten Factor $\mathfrak{L}$, so gibt sich

$$\mathfrak{L} \cdot P \cdot \delta^2 y + \mathfrak{L} \cdot Q \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \mathfrak{L} \cdot R \cdot g^2 = 0$$

Integrirt man, so gibt sich eine Gleichung von folgender Form

$$\pi \cdot \delta^2 y + \omega \cdot g^2 = h$$

wo h der durch die Integration eingegangene willkürliche Constante ist. Letztere Gleichung kann man auch umformen in $\delta^2 y = \frac{1}{\pi} \cdot h - \frac{\omega}{\pi} \cdot g^2$; und wenn man χ statt $\frac{1}{\pi}$, und χ' statt $\left(-\frac{\omega}{\pi}\right)$ setzt, so nimmt letztere Gleichung folgende Form an

$$\text{XIV)} \quad \delta^2 y = \chi \cdot h + \chi' \cdot g^2$$

Wenn man diese Gleichung mit V vergleicht, so sieht man, das χ die Stelle des $\frac{d_m \varphi(x, m)}{dm}$, dass χ' die Stelle des $\frac{d_m^2 \varphi(x, m)}{dm^2}$, dass g die Stelle des ϑm, und dass h die Stelle $\vartheta^2 m$ vertritt.

Hiermit ist also abermals bewiesen, dass die Formen von δy, δ^2 y, etc., wenn sie der Gleichung I genügen sollen, ganz bestimmte Formen sind.

§. 106. Es sei die Gleichung

$$\text{I)} \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0$$

gegeben. Ihr allgemeines Integral sei

$$\text{II)} \quad y = \varphi(x, m, n)$$

wo m und n die durch die Integration eingegangenen willkürlichen Constanten sind. Soll nun Gleichung I auch durch

$$y + \Delta y = \varphi(x, m, n) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

erfüllt werden; so sind die Formen der Functionen δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. nicht mehr willkürlich, sondern bestimmt.

Erster Beweis. Die verschiedenen Functionen, wodurch Gleichung I identisch gemacht werden kann, unterscheiden sich nur durch die Aenderungen des m und des n. Verfahrt man wie im vorigen §., so bekommt man

$$\text{III)} \quad \delta y = \frac{d_m \varphi(x, m, n)}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n \varphi(x, m, n)}{dn} \cdot \vartheta n$$

$$\text{IV)} \quad \delta^2 y = \frac{d_m \varphi(x, m, n)}{dm} \cdot \vartheta^2 m + \frac{d_n \varphi(x, m, n)}{dn} \cdot \vartheta^2 n + \frac{d_m^2 \varphi(x, m, n)}{dm^2} \cdot \vartheta m^2$$
$$+ 2 \cdot \frac{d_m d_n \varphi(x, m, n)}{dm \cdot dn} \cdot \vartheta m \cdot \vartheta n + \frac{d_n^2 \varphi(x, m, n)}{dn^2} \cdot \vartheta n^2$$

etc. etc.

Hiermit ist die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen.

Zweiter Beweis. Man setze p statt $\frac{dy}{dx}$, und q statt $\frac{d^2 y}{dx^2}$; so folgt aus Gleichung I nach und nach

$$\text{V)} \quad \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p F}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_q F}{dq} \cdot \frac{d^2 \delta y}{dx^2} = 0$$

etc. etc.

Mit diesen Gleichungen verfahre man ebenso, wie man im vorigen §. mit den Gleichungen VIII und IX verfahren ist; und man wird für δy, $\delta^2 y$, etc. Formen bekommen, welche mit den in Gleichung III und IV dieses §. aufgestellten Formen übereinstimmen.

§. 107. Es sei die Gleichung

$$\text{I)}\quad F\left(a, x, y, y_a, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

gegeben. Ihr allgemeines Integral sei

$$\text{II)}\quad y = \varphi(x, m)$$

wo m der willkürliche Constante ist. Soll nun Gleichung I auch durch

$$y + \Delta y = \varphi(x, m) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$y_a + \Delta y_a = \varphi(a, m) + \varkappa \cdot \delta y_a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y_a \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d\Delta y}{dx} = \frac{d_x\varphi(x, m)}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d\delta^3 y}{dx} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

erfüllt werden; so sind die Formen von δy, $\delta^2 y$, etc. nicht mehr willkürlich, sondern bestimmt.

Beweis. Aus Gleichung II folgt

$$\text{III)}\quad \delta y = \frac{d_m\varphi(x, m)}{dm} \cdot \vartheta m$$

$$\text{IV)}\quad \delta y_a = \frac{d_m\varphi(a, m)}{dm} \cdot \vartheta m$$

$$\text{V)}\quad \frac{d\delta y}{dx} = \frac{d_x d_m\varphi(x, m)}{dx \cdot dm} \cdot \vartheta m$$

$$\text{VI)}\quad \delta^2 y = \frac{d_m\varphi(x, m)}{dm} \cdot \vartheta^2 m + \frac{d_m^2\varphi(x, m)}{dm^2} \cdot \vartheta m^2$$

etc. etc.

Hiermit ist die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen.

Es ist leicht, auch diese (in §. 105, 106, 107 abgehandelten) Lehrsätze zu erweitern, und namentlich auf solche Fälle auszudehnen, wo y eine Function zweier oder mehrerer nichtmutabler Veränderlicher x w ist, z. B. auf den Fall, wo die Gleichung

$$F\left(x, w, y, \frac{d_x y}{dx}, \frac{d_w y}{dw}\right) = 0$$

gegeben ist.

§. 108. Es sei die Gleichung

$$\text{I)}\quad F(a, y_a) = 0$$

gegeben, welche bei $y = \psi(x)$ erfüllt wird, so dass

$$\text{II)}\quad F(a, \psi(a)) = 0$$

ist. Diese Gleichung II ist aber keine identische, d. h. gilt nicht bei jedem Werthe des a, sondern nur bei einer bestimmten Anzahl von Werthen des a; und alle diese Werthe

des a ergeben sich, wenn man die Wurzeln der Gleichung II aufsucht. Will man aber dem a einen andern Werth $(a + Da)$ beilegen, welcher der Gleichung II nicht entspricht; so darf man an die Stelle des y_a nicht y_{a+Da}, d. h. nicht $\psi(a + Da)$ setzen, sondern man muss eine andere Function $(y + \Delta y)_{a+Da}$, d. h. man muss

$$\psi(a + Da) + \varkappa \cdot \delta\psi(a + Da) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\psi(a + Da) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\psi(a + Da) \cdot \cdot \cdot$$

an die Stelle des y_a in Gleichung I einsetzen; und man bekommt

$$\text{III)} \quad F(a + Da,\ \psi(a + Da) + \varkappa \cdot \delta\psi(a + Da) + \ldots\ldots) = 0$$

oder, was das nemliche ist,

$$\text{IV)} \quad F\left(a + Da,\ y_{a+Da} + \varkappa \cdot \delta y_{a+Da} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta y_{a+Da} + \ldots\ldots\right) = 0$$

Setzt man statt $(a + Da)$ die Reihe

$$a + \varkappa \cdot \vartheta a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 a + \ldots\ldots$$

und setzt man noch zur Abkürzung p anstatt y_a, so ergeben sich aus IV die successiven Gleichungen:

$$\text{V)} \quad \frac{d_p F}{dp} \cdot \delta y_a + \frac{dF}{da} \cdot \vartheta a = 0$$

$$\text{VI)} \quad \frac{d_p F}{dp} \cdot \delta^2 y_a + \frac{d_p^2 F}{dp^2} \cdot \delta y_a^2 + 2 \cdot \left(\frac{d\left(\frac{d_p F}{dp}\right)}{da} \cdot \delta y_a + \frac{d_p F}{dp} \cdot \frac{d\delta y_a}{da} \right) \cdot \vartheta a$$

$$+ \frac{d^2 F}{da^2} \cdot \vartheta a^2 + \frac{dF}{da} \cdot \vartheta^2 a = 0$$

etc. etc.

Die Bedeutung von $\frac{dF}{da}$, $\frac{d^2F}{da^2}$, $\frac{d\left(\frac{d_p F}{dp}\right)}{da}$, etc. ist (aus §. 2) bekannt.

Erstens. Nimmt man ϑa, $\vartheta^2 a$, etc. als willkürlich, so ergeben sich die Werthe von δy_a, $\delta^2 y_a$, etc. aus den Gleichungen V, VI, etc. Dabei kann man aber für δy noch jede beliebige Function nehmen, wenn sie nur einen willkürlichen Constanten m enthält. Man setze $\delta y = f'(x, m)$, so geht Gleichung V über in

$$\text{VII)} \quad \frac{d_p F}{dp} \cdot f'(a, m) + \frac{dF}{da} \cdot \vartheta a = 0$$

Hieran erkennt man, wie der Werth des m von dem Werthe des ϑa abhangt. Setzt man $\delta^2 y = f''(x, n)$, so geht Gleichung VI über in

$$\text{VIII)} \quad \frac{d_p F}{dp} \cdot f''(a, n) + \frac{d_p^2 F}{dp^2} \cdot (f'(a, m))^2 + 2 \cdot \left(\frac{d\left(\frac{d_p F}{dp}\right)}{da} \cdot f'(a, m) \right.$$

$$\left. + \frac{d_p F}{dp} \cdot \frac{df'(a, m)}{da} \right) \cdot \vartheta a + \frac{d^2 F}{da^2} \cdot \vartheta a^2 + \frac{dF}{da} \cdot \vartheta^2 a = 0$$

Der willkürliche Werth des ϑa ist hier derselbe, wie in Gleichung VII, und der Werth des m ist auch schon durch Gleichung VII bestimmt. Sonach ist durch Gleichung VIII ausgesprochen, wie der Werth des n von dem schon vorhin willkürlich angenommenen, Werthe des ϑa und von dem jetzt noch willkürlich anzunehmenden Werthe des $\vartheta^2 a$ abhangt. Und so fort.

Zweitens. Nimmt man aber ϑa, $\vartheta^2 a$, etc. als abhängig, so ist das Geschäft noch viel einfacher; denn man kann jetzt für δy jede Function von x annehmen, ohne dass sie noch einen willkürlichen Constanten zu enthalten braucht. Aus Gleichung V gibt sich dann der Werth des ϑa. Diesen Werth sowie auch die einmal für δy genommene Function führe man in Gleichung VI ein, nehme für $\delta^2 y$ aufs Neue irgend eine beliebige Function von x, und es ergibt sich der Werth des $\vartheta^2 a$. Und so fort.

Hierher gehört der besondere Fall, wo zwei ganz verschiedene Functionen $y = \psi(x)$ und $b = \varphi(a)$ gegeben sind, und wo bei irgend einem besonderen Werthe $x = a$ der Ausdruck $\psi(a)$ denselben Werth bekommt, wie $\varphi(a)$. Hierbei findet dann die Gleichung

$$\text{IX)} \quad \varphi(a) = \psi(a)$$

statt; und wenn man Alles auf die linke Seite des Gleichheitszeichens bringt, so gibt sich

$$\text{X)} \quad \varphi(a) - \psi(a) = 0$$

welche Gleichung ein besonderer Fall von Gleichung II ist. Aus Gleichung X lässt sich bestimmen, welchen Werth a man dem x beilegen muss, damit $\psi(x)$ denselben Werth bekommt, wie $\varphi(a)$. (Grade dieser besondere Fall ist z. B. angewendet in der Aufgabe 160; nur steht dort α, während hier a steht).

§. 109. Es sei die Gleichung

$$\text{I)} \quad F(a, \alpha, y_a, y_\alpha) = 0$$

gegeben, welche bei $y = \psi(x)$ erfüllt wird, so dass

$$\text{II)} \quad F(a, \alpha, \psi(a), \psi(\alpha)) = 0$$

ist. Diese Gleichung II ist aber keine identische, d. h. gilt nicht bei jedem Werthe des a und des α; sondern wenn das eine dieser beiden Elemente irgend einen entweder bedingten oder unbedingten Werth annimmt, dann entsprechen dem andern nur diejenigen Werthe, welche als Wurzeln der Gleichung II erscheinen. Will man aber den beiden Elementen a und α solche Werthe $(a + Da)$ und $(\alpha + D\alpha)$ beilegen, welche keine solche zusammengehörigen sind, dass die Gleichung II erfüllt wird; so darf man an die Stelle des y_a und des y_α nicht bezüglich y_{a+Da} und $y_{\alpha+D\alpha}$, d. h. nicht bezüglich $\psi(a + Da)$ und $\psi(\alpha + D\alpha)$, sondern man muss eine andere Function $(y + \varDelta y)_{a+Da}$ und $(y + \varDelta y)_{\alpha+D\alpha}$, d. h. man muss

$$\psi(a + Da) + \varkappa \cdot \delta\psi(a + Da) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\psi(a + Da) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\psi(a + Da) \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\psi(\alpha + D\alpha) + \varkappa \cdot \delta\psi(\alpha + D\alpha) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\psi(\alpha + D\alpha) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\psi(\alpha + D\alpha) \cdot \cdot \cdot \cdot$$

bezüglich an die Stelle des y_a und y_α in Gleichung I einsetzen; und man bekommt

$$\text{III)} \quad F(a + Da, \alpha + D\alpha, \psi(a + Da) + \varkappa \cdot \delta\psi(a + Da) + \ldots\ldots,$$
$$\psi(\alpha + D\alpha) + \varkappa \cdot \delta\psi(\alpha + D\alpha) + \ldots\ldots) = 0$$

oder was das nemliche ist

$$\text{IV)} \quad F\Big(a + Da, \alpha + D\alpha, y_{a+Da} + \varkappa \cdot \delta y_{a+Da} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_{a+Da} + \ldots\ldots,$$
$$y_{\alpha+D\alpha} + \varkappa \cdot \delta y_{\alpha+D\alpha} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_{\alpha+D\alpha} + \ldots\ldots\Big) = 0$$

Setzt man nun noch statt $(a + Da)$ und $(\alpha + D\alpha)$ die Reihen

$$a + \varkappa \cdot \vartheta a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 a + \ldots\ldots$$

$$\alpha + \varkappa \cdot \vartheta\alpha + \frac{\varkappa^2}{1\ 2} \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3\alpha + \ldots\ldots$$

so bekommt man, wenn man zur Abkürzung noch p statt y_a und q statt y_α setzt, aus IV die successiven Gleichungen

$$\text{V)}\quad \frac{d_p F}{dp} \cdot \delta y_a + \frac{d_q F}{dq} \cdot \delta y_\alpha + \frac{d_a F}{da} \cdot \vartheta a + \frac{d_\alpha F}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha = 0$$

$$\text{VI)}\quad \frac{d_p F}{dp} \cdot \delta^2 y_a + \frac{d_q F}{dq} \cdot \delta^2 y_\alpha + \frac{d_p^2 F}{dp^2} \cdot \delta y_a^2 + 2 \cdot \frac{d_p d_q F}{dp \cdot dq} \cdot \delta y_a \cdot \delta y_\alpha$$

$$+ \frac{d_q^2 F}{dq^2} \cdot \delta y_\alpha^2 + 2 \cdot \left(\frac{d_a\left(\frac{d_p F}{dp}\right)}{da} \cdot \delta y_a + \frac{d_p F}{dp} \cdot \frac{d\delta y_a}{da} + \frac{d_a\left(\frac{d_q F}{dq}\right)}{da} \cdot \delta y_\alpha \right) \cdot \vartheta a$$

$$+ 2 \cdot \left(\frac{d_\alpha\left(\frac{d_p F}{dp}\right)}{d\alpha} \cdot \delta y_a + \frac{d_\alpha\left(\frac{d_q F}{dq}\right)}{d\alpha} \cdot \delta y_\alpha + \frac{d_q F}{dq} \cdot \frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha} \right) \cdot \vartheta\alpha + \frac{d_a^2 F}{da^2} \cdot \vartheta a^2$$

$$+ 2 \cdot \frac{d_a d_\alpha F}{da \cdot d\alpha} \cdot \vartheta a \cdot \vartheta\alpha + \frac{d_\alpha^2 F}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 + \frac{d_a F}{da} \cdot \vartheta^2 a + \frac{d_\alpha F}{d\alpha} \cdot \vartheta^2\alpha = 0$$

Sind keine anderen Gleichungen als I und II gegeben, so haben in Gleichung V drei der Elemente δy_a, δy_α; ϑa, $\vartheta\alpha$ willkürliche Werthe, und eines derselben hat einen abhängigen Werth. Ebenso haben in Gleichung VI drei der Elemente $\delta^2 y_a$, $\delta^2 y_\alpha$, $\vartheta^2 a$, $\vartheta^2\alpha$ willkürliche Werthe, und eines derselben hat einen abhängigen Werth.

Und so fort.

Es ist leicht, diese Sätze zu erweitern und durchzuführen (Ausgedehntere Fälle findet man z. B. in den Aufgaben 176, 177, 187, besonders aber in 178, 179, 180).

§. 110. **Hiermit soll nun die Theorie dieses Calcul's, dessen Sätze noch bis ins Ungeheure vermehrt werden könnten, geschlossen sein. Viele Sätze, welche, weil sie bei den Anwendungen häufig vorkommen, in der Theorie einen Platz verdient hätten, werden geeigneten Ortes ihre Erledigung finden. Wer aber alles Theoretische und Praktische, welches in diesem Werke vorkommt, versteht und sich geläufig gemacht hat; der bedarf keiner Anleitung mehr, er ist fähig sich in jedem Falle selbst zu helfen.**

Ihrer Wichtigkeit wegen komme ich noch einmal auf die dritte Bemerkung des §. 61 zurück, wo es heisst: „Es gibt Lehrer und Schriftsteller, welche sich begnügen, „auch in den Fällen, wo eine Function $\varphi(x \ldots . w)$ eine ganz allgemeine (d. h. noch „ganz unbestimmte) unmittelbare Mutation erleiden soll, bloss die allereinfachste ge- „schlossene Reihenform

$$\varphi(x \ldots\ldots w) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x \ldots\ldots w)$$

„zu setzen.“ Dagegen lässt sich einwenden:

A. **Dieses Verfahren** enthält einen Widerspruch in sich selbst; denn eine ganz allgemeine Mutation kann (man sehe §. 60) nur durch eine unaufhörliche Reihe dargestellt werden. Sonach muss aber auch

B. Dieses Verfahren ohneweiters durch eine Menge Ungereimtheiten von sich selbst bestraft werden. Um diese Behauptung zu begründen, könnte eine Menge Thatsachen hier aufgeführt werden; es mag aber an folgenden **vier** Beispielen genügen:

1) Man sehe auf §. 103 zurück, wo die Gleichung

$$\text{I)}\quad F(a, \alpha, y_a, y_\alpha) = 0$$

vorgelegt ist. Diese Gleichung wird durch $y = \psi(x)$ erfüllt. Würde man aber $\psi(x) + \varkappa \cdot \delta y$ an die Stelle des y in Gleichung I einsetzen, so würde man

$$F + \varkappa \cdot \delta F + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 F + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 F + \ldots\ldots = 0$$

bekommen; und da (man sehe den Schluss des §. 48) das $\varkappa$ weiter nichts als ein blosses Operationsmittel ist, so zerfällt (man sehe noch §. 66 und 67) diese Gleichung in folgende einzelne:

$$\text{II)}\quad \frac{d_p F}{dp} \cdot \delta y_a + \frac{d_q F}{dq} \cdot \delta y_\alpha = 0$$

$$\text{III)}\quad \frac{d_p^2 F}{dp^2} \cdot \delta y_a^2 + 2 \cdot \frac{d_p d_q F}{dp \, . \, dq} \cdot \delta y_a \cdot \delta y_\alpha + \frac{d_q^2 F}{dq^2} \cdot \delta y_\alpha^2 = 0$$

etc. etc.

wo p und q die bereits (in §. 103) angezeigte Bedeutung haben. Aus Gleichung II ergibt sich die Abhängigkeit zwischen δy_a und δy_α. Kann aber durch diese Abhängigkeit auch die Gleichung III erfüllt werden? — Man sieht also, dass, weil Gleichung II schon zuerst stattfindet, Gleichung III unstatthaft ist; und hiermit ist bereits der Beweis geführt, dass es ein Irrthum ist, $\psi(x) + \varkappa \cdot \delta y$ an die Stelle des y in I einzusetzen. Wenn man aber der Gleichung III noch zwei Theilsätze hinzufügt, so nimmt sie folgende Form an:

$$\text{IV)}\quad \frac{d_p F}{dp} \cdot \delta^2 y_a + \frac{d_q F}{dq} \cdot \delta^2 y_\alpha + \frac{d_p^2 F}{dp^2} \cdot \delta y_a^2$$

$$+ 2 \cdot \frac{d_p d_q F}{dp \, . \, dq} \cdot \delta y_a \cdot \delta y_\alpha + \frac{d_q^2 F}{dq^2} \cdot \delta y_\alpha^2 = 0$$

Diese Gleichung kann neben der Gleichung II bestehen, und liefert die Abhängigkeit zwischen $\delta^2 y_a$ und $\delta^2 y_\alpha$.

Und so fort.

2) Man sehe (auf die §§. 105, 106, 107) zurück, und man wird abermals erkennen, dass es unzulässig ist, eine noch ganz allgemeine unmittelbare Mutation nur aus dem ersten Gliede bestehen zu lassen.

3) Man sehe zurück (auf die §§. 108 und 109) oder vorwärts (auf die §§. 259 bis 263). Die dort befindlichen Untersuchungen sind, soviel ich weiss, noch von Niemand vorgenommen worden. Aus diesen §§. erkennt man abermals, dass es unzulässig ist, für eine noch ganz allgemeine unmittelbare Mutation nur das erste Glied zu setzen.

4) Man sehe vorwärts (auf §§. 265, 266, 267, etc.), wo eine Untersuchung auf eine Weise geführt werden wird, wie sie, soviel ich weiss, noch von Niemand geführt worden ist. Aus diesen §§. wird man abermals erkennen, dass es unzulässig ist, für eine noch ganz allgemeine unmittelbare Mutation nur das erste Glied zu setzen.

Der an obgenannten Leuten hier gerügte Irrthum ist um so gröber, weil er schon bei der allerersten Begründung, ja eigentlich schon bei der Definition des hier vorgelegten Calculs begangen, und somit dessen ganze Theorie und Anwendung verkümmert wird. Es ist aber aus dem Inhalte dieses §. ersichtlich, dass jene Leute ihren Irrthum begingen, weil sie über das, was sie unternahmen, nicht sich selbst klar waren, weil sie ohne alle Umsicht, Uebersicht und Erfahrung zu Werke gingen, weil es ihnen gleichgiltig war.

ob sie eine gediegene Arbeit oder ein übereiltes Machwerk dem Publikum darböten. Es ist ferner aus diesem §. ersichtlich, dass jene Leute nicht durch Anwendungen auf die Entdeckung ihres Irrthumes geführt wurden; denn, indem sie diesen Calcul nur auf das Grösste und Kleinste anwendeten, haben sie bei diesen Anwendungen nur die allereinfachsten Aufgaben vorgenommen, und sich begnügt, nur den Mutationscoefficienten der ersten Ordnung herzustellen, und ihn zu Null werden zu lassen. Der Ausdruck, welchen sie für den Mutationscoefficienten der ersten Ordnung bekamen, ist (aber freilich nur durch die Zufälligkeiten des Calculs) zwar jedesmal richtig; dagegen der Ausdruck für den Mutationscoefficienten der zweiten Ordnung würde, wenn sie ihn hergestellt hätten, in den meisten Fällen falsch sein. Allein diesen haben sie, sei es um aus Bequemlichkeit oder aus Unfähigkeit, niemals hergestellt, sondern sind auf halbem Wege stehen geblieben, und haben (aber nur höchst selten!!) über das, was sie noch erreichen sollten, Betrachtungen und Vergleichungen angestellt, die nur zu oft allen möglichen Täuschungen unterworfen sein können. Es war also unmöglich, dass jene Leute durch ihre, schon vom Ursprunge her einfachen, und ausserdem nur zur Hälfte durchgeführten, Aufgaben auf die Entdeckung ihres Irrthums geführt werden konnten. Hätte ihnen nur ein Ungefähr z. B. den sechsten Fall der 158ten Aufgabe (und das ist wahrlich eine einfache Untersuchung) vorgelegt, und hätten sie den richtigen Mutationscoefficienten der zweiten Ordnung herzustellen gestrebt; so hätten sie sofort ihren Irrthum einsehen müssen. Zu dem, was hier gesprochen worden ist, gehören jedoch noch folgende zwei Zusätze:

1) Aus allem Vorhergehenden ist bekannt, dass unmittelbare Mutationen, wenn sie bestimmt gegeben sind, sich oft in geschlossene Reihen, ja oft in solche entwickeln lassen, wo die Gesammtmutation nur aus einem Gliede besteht (darauf ist schon in den §§. 64, 65, etc. aufmerksam gemacht worden; man sehe auch die Beispiele in §. 58).

2) Man wird im Laufe dieses Werkes ersehen, dass es bei Anwendungen wirklich so einfache Fälle gibt, wo die Untersuchung keine Noth leidet, wenn man für noch ganz allgemeine unmittelbare Mutationen eine geschlossene Reihe, ja sogar nur das erste Glied setzt. Damit ist aber nur gesagt, dass die Untersuchung keine Noth leide; und man kann in solchen Fällen den in ihrer höchsten Allgemeinheit ausgeführten Entwickelungen, wo man die unmittelbaren Mutationen als aus unaufhörlichen Reihen bestehend bereits behandelt hat, ihre einfachste Form, wenn man diese grade will, dadurch geben, dass man alle diejenigen der unmittelbaren Mutationscoefficienten, welche überflüssig sind, zu Null werden lässt.

VII. Theorie des Grössten und Kleinsten und andere damit zusammenhangende Untersuchungen, gegründet auf die Mutationen.

1. *Allgemeiner Theil dieser Theorie.*

§. 111. Unter den verschiedenen Zuständen, in welche ein mit mutablen und nichtmutablen Veränderlichen gebildeter Ausdruck versetzt werden kann, sind, wenn man sie ihrem Werthe nach untersucht, folgende vier Zustände vorzüglich zu berücksichtigen.

1) Derjenige aus diesem Ausdrucke entstandene reelle Zustand, dessen nächstanliegenden Nachbarzustände auch alle reell sind, und dessen Werth grösser ist, als der Werth jedes einzelnen dieser Nachbarzustände.

2) Derjenige aus diesem Ausdrucke entstandene reelle Zustand, dessen nächstanliegenden Nachbarzustände auch alle reell sind, und dessen Werth kleiner ist, als der Werth jedes einzelnen dieser Nachbarzustände.

3) Derjenige aus diesem Ausdrucke entstandene reelle Zustand, dessen nächstanliegenden Nachbarzustände theils reell theils imaginär sind.

4) Derjenige aus diesem Ausdrucke entstandene reelle Zustand, dessen nächstanliegenden Nachbarzustände alle imaginär sind.

Man beobachte sorgfältig, dass man hier nur die einem reellen Zustande des vorgelegten Ausdruckes nächstanliegenden Nachbarzustände berücksichtigen darf, und dass Zustände, welche in einer angebbaren Entfernung liegen, unberücksichtigt bleiben müssen.

In der Analysis ist jedesmal $\alpha > a$, so oft die Differenz $(\alpha - a)$ positiv ist. Daraus folgt: jeder positive Ausdruck, sowie auch Null, ist grösser, als irgend ein negativer Ausdruck; und unter negativen Ausdrücken ist derjenige der grösste, dessen Werth am nächsten bei Null liegt. In der Analysis wird also ein negativer Ausdruck als Grösstes betrachtet, welcher, absolut genommen, als Kleinstes betrachtet werden müsste.

Mit jedem Ausdrucke, welcher mutable Elemente enthält, können zweierlei Untersuchungen, nemlich

α) Untersuchungen, wo man reine (einfache oder zusammengesetzte) Mutationen anwendet, und

β) Untersuchungen, wo man gemischte (einfache oder zusammengesetzte) Mutationen anwendet,

vorgenommen werden.

Diese zweierlei Untersuchungen sollen sogleich (§. 112 und 113) näher auseinander gesetzt werden.

§. 112. Wenn U ein aus mutablen und nichtmutablen Veränderlichen gebildeter Ausdruck ist; so bestehen die Untersuchungen, wo man reine Mutationen anwendet, aus folgenden zwei successiven Geschäften:

Erstens. Man sucht für die mutablen Elemente bestimmte aus nichtmutablen Veränderlichen bestehende reelle Functionen, und legt jedem einzelnen derjenigen nichtmutablen Veränderlichen, welche absolut unabhängig sind, irgend einen beliebigen reellen Werth bei. Der durch Einführung dieser gesuchten Functionen erzeugte Zustand des U, welcher nun eine Function lauter nichtmutabler Veränderlicher ist, und durch U′ bezeichnet werden mag, mag der primäre Zustand genannt werden. Um aber diesen primären Zustand U′ mit seinen nächstanliegenden primären Nachbarzuständen, welche durch 𝔘 bezeichnet sein mögen, vergleichen zu können; setze man an die Stelle der nichtmutablen Elemente die den gesuchten Functionen nächstanliegenden reellen Nachbarfunctionen, wobei, wie sich von selbst versteht, in diesen nächstanliegenden Nachbarfunctionen jedem der absolut unabhängigen Veränderlichen derselbe beliebige Werth beigelegt werden muss, welcher bezüglich einem jeden dieser Elemente in den gesuchten Functionen beigelegt worden ist. Man hat aber, wie auch schon der vorige §. bestimmt, diesen primären Zustand U′ nur dann zu beachten, wenn er reell ist; und unter dieser Voraussetzung unterscheide man folgende drei Fälle:

I) Die durch 𝔘 repräsentirten und dem U′ nächstanliegenden primären Nachbarzustände sind alle reell; und wenn dabei

a) die Differenz 𝔘 — U′, deren Werth also der Null nächstanliegt, ihr Zeichen unter allen Umständen unverändert erhält; so ist

aa) der primäre Zustand U′ ein Maximum-stand (primäres Grösstes), wenn die der Null nächstanliegende Differenz 𝔘 — U′ negativ bleibt; dagegen ist

bb) der primäre Zustand U′ ein Minimum-stand (primäres Kleinstes), wenn die der Null nächstanliegende Differenz 𝔘 — U′ positiv bleibt; kann aber

b) die der Null nächstanliegende Differenz 𝔘 — U′ ihr Zeichen wechseln, so findet weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

II) Die durch 𝔘 repräsentirten und dem U′ nächstanliegenden primären Nachbarzustände sind theils reell theils immaginär. Hier wird der primäre Zustand U′ ein Gränz-stand genannt, und zwar desshalb, weil nach den Richtungen hin, wo die imaginären Zustände anliegen, die (nächstanliegenden) reellen Nachbarzustände unterbrochen sind.

III) Die durch $\mathfrak{U}$ repräsentirten und dem U' nächstanliegenden primären Nachbarzustände sind alle imaginär. Hier wird der primäre Zustand U' ein Einzel-stand genannt, und zwar desshalb, weil ihm nach keiner Richtung hin reelle Nachbarzustände nächstanliegen.

Die hier besagten vier Zustände, wobei der vorgelegte Ausdruck zwar eine bestimmte Gestalt bekommt, aber dem Gehalte (Werthe) nach meistentheils unbestimmt sein wird, mögen den gemeinschaftlichen Namen „ausgezeichnete Zustände" führen. Ihre Auffindung und Beurtheilung ist, wie man aus dem Bisherigen ersehen hat, Sache der reinen Mutationen.

Zweitens. Hat man nun irgend einen primären Zustand, welcher kein mutables Element mehr enthalten darf, hergestellt; so kann man noch für die nichtmutablen Veränderlichen constante reelle Werthe aufsuchen. Der durch Einführung dieser gesuchten Werthe aus U' sich ergebende (einen constanten Werth habende) Zustand des U, welcher mit U'' bezeichnet werden mag, mag der secundäre Zustand genannt werden. Um aber diesen dem U'' zukommenden constanten Werth mit seinen nächstanliegenden Nachbarwerthen (secundären Nachbarzuständen), welche durch (U'' + DU) bezeichnet sein mögen, vergleichen zu können; setze man in U' an die Stelle der nichtmutablen Veränderlichen die jenen gesuchten Werthen nächstanliegenden reellen Nachbarwerthe. Man hat aber auch jetzt diesen dem U'' zukommenden constanten Werth nur dann zu berücksichtigen, wenn er reell ist; und indem man ihn mit seinen nächstanliegenden Nachbarwerthen vergleicht, kommt man wieder zur Unterscheidung folgender drei Fälle:

I) Die durch (U'' + DU) repräsentirten und dem U'' nächstanliegenden Nachbarwerthe sind alle reell; und wenn dabei

a) die Differenz (U'' + DU) — U'', deren Werth also der Null nächstanliegt, ihr Zeichen unter allen Umständen unverändert erhält; so ist

aa) der secundäre Zustand U'' ein Maximumwerth (secundäres Grösstes), wenn die der Null nächstanliegende Differenz (U'' + DU) — U'' negativ bleibt; dagegen ist

bb) der secundäre Zustand U'' ein Minimumwerth (secundäres Kleinstes), wenn die der Null nächstanliegende Differenz (U'' + DU) — U'' positiv bleibt; kann aber

b) die der Null nächstanliegende Differenz (U'' + DU) — U'' ihr Zeichen wechseln, so findet weder ein Maximumwerth noch Minimumwerth statt.

II) Die durch (U'' + DU) repräsentirten und dem U'' nächstanliegenden Nachbarwerthe sind theils reell theils imaginär. Hier wird der secundäre Zustand U'' ein Gränzwerth genannt, und zwar desshalb, weil nach den Richtungen hin, wo die imaginären Nachbarwerthe anliegen, die (nächstanliegenden) reellen Nachbarwerthe unterbrochen sind.

III) Die durch (U'' + DU) repräsentirten und dem U'' nächstanliegenden Nachbarwerthe sind alle imaginär. Hier wird der secundäre Zustand U'' ein Einzelwerth genannt, und zwar desshalb, weil ihm nach keiner Richtung hin reelle Nachbarwerthe nächstanliegen.

Die bei den secundären Zuständen gemachten Unterscheidungen sind also denen, welche bei den primären Zuständen gemacht wurden, ganz analog.

Die hier besagten vier secundären Zustände, wobei der vorgelegte Ausdruck sowohl eine bestimmte Gestalt als auch einen festen Gehalt bekommt, mögen den gemeinschaftlichen Namen „ausgezeichnete Werthe" führen. Ihre Auffindung und Beurtheilung ist bekanntlich Sache des Differentialcalculs.

Schluss. Da nun, wie gesagt, ein primärer Zustand einen festen Werth erst dadurch bekommt, dass man den nichtmutablen Veränderlichen constante Werthe beilegt; so ist von selbst klar:

A. Unter den constanten Werthen eines Maximum-standes können sich Maximumwerthe, Minimumwerthe, Gränzwerthe und Einzelwerthe befinden.

B. Unter den constanten Werthen eines Mimimum-standes können sich Maximumwerthe, Minimumwerthe, Gränzwerthe und Einzelwerthe befinden.

C. Unter den constanten Werthen eines Gränz-standes können sich Maximumwerthe, Minimumwerthe, Gränzwerthe und Einzelwerthe befinden.

D. Unter den constanten Werthen eines Einzel-standes können sich Maximumwerthe, Minimumwerthe, Gränzwerthe und Einzelwerthe befinden.

Von den hier ausgezeichneten Werthen hat man vorzüglich zu beachten:

𝔄. den Maximumwerth eines Maximum-standes, und

𝔅. den Minimumwerth eines Minimum-standes.

Wenn man alle Maximum-stände, alle Gränz-stände und alle Einzel-stände eines Ausdruckes hergestellt, und wenn man hierauf von jedem einzelnen dieser Zustände alle Maximumwerthe, Gränzwerthe und Einzelwerthe aufgesucht hat; so befindet sich unter diesen ausgezeichneten Werthen auch der absolut gröste Werth, dessen der vorgelegte Ausdruck fähig ist. Und dieser so aufgesuchte absolut gröste Werth ist ein Maximum Maximorum im vollsten Sinne.

Wenn man alle Minimum-stände, alle Gränz-stände und alle Einzel-stände eines Ausdruckes hergestellt, und wenn man hierauf von jedem einzelnen dieser Zustände alle Minimumwerthe, Gränzwerthe und Einzelwerthe aufgesucht hat; so befindet sich unter diesen ausgezeichneten Werthen auch der absolut kleinste Werth, dessen der vorgelegte Ausdruck fähig ist. Und dieser so aufgesuchte absolut kleinste Werth ist ein Minimum Minimorum im vollsten Sinne.

§. 113. Wenn U ein aus mutablen und nichtmutablen Veränderlichen gebildeter Ausdruck ist; so bestehen die Untersuchungen, wo man gemischte Mutationen anwendet, aus folgendem Geschäfte:

Man sucht gleichzeitig für die mutablen Elemente bestimmte aus nichtmutablen Veränderlichen gebildete reelle Functionen, und für die nichtmutablen Veränderlichen constante reelle Werthe. Führt man letztere in die für die mutablen Elemente gesuchten Functionen ein, so werden auch diese mit festen Werthen versehen. Der hierdurch erzeugte Zustand des U hat dann auch einen constanten Werth, und soll, wie der (im vorigen §. definirte) secundäre Zustand, mit U'' bezeichnet werden. Seine ihm nächstanliegenden Nachbarzustände, welche jetzt durch (𝔘) bezeichnet werden mögen, stellt man dadurch her, dass man in dem vorgegebenen Ausdrucke U gleichzeitig, aber auch ja gleichzeitig

1. an die Stelle der nichtmutablen Veränderlichen die ihren gesuchten Werthen nächstanliegenden reellen Nachbarwerthe, und dass man

2. an die Stelle der mutablen Elemente die den constanten Werthen der gesuchten Functionen nächstanliegenden reellen Nachbarwerthe setzt, welche letzteren insgesammt man dadurch bekommt, dass sowohl in den gesuchten Functionen selbst als auch in ihren nächstanliegenden reellen Nachbarfunctionen an die Stelle der nichtmutablen Veränderlichen die ihren gesuchten Werthen nächstanliegenden reellen Nachbarwerthe eingehen.

An der Differenz (𝔘) — U'' wird man erkennen,

I. ob der durch die Mutationen erzeugte und der durch die Werthänderungen erzeugte Zustand übereinstimmen, d. h.

A) ob ein Maximumwerth eines Maximum-standes,

B) oder ob ein Minimumwerth eines Minimum-standes,

C) oder ob ein Gränzwerth eines Gränz-standes,

D) oder ob ein Einzelwerth eines Einzel-standes

vorhanden ist. An dieser Differenz wird man aber auch erkennen,

II. ob der durch die Mutationen erzeugte und der durch die Werthänderungen erzeugte Zustand verschieden sind, d. h.

A) ob der feste Werth eines Maximum-standes ein Minimumwerth, ein Gränzwerth, ein Einzelwerth, oder keiner von den vier ausgezeichneten Werthen ist;

B) ob der feste Werth eines Minimum-standes ein Maximumwerth, ein Gränzwerth, ein Einzelwerth oder keiner von den vier ausgezeichneten Werthen ist;

C) ob der feste Werth eines Gränz-standes ein Maximumwerth, ein Minimumwerth, ein Einzelwerth, oder keiner von den vier ausgezeichneten Werthen ist;

D) ob der feste Werth eines Einzel-standes ein Maximumwerth, ein Minimumwerth, ein Gränzwerth, oder keiner von den vier ausgezeichneten Werthen ist.

Man beachte ganz besonders noch folgende zwei Unterscheidungen:

α) Nur in den Fällen, wo Mutationen von Werthänderungen abhängig sind, oder umgekehrt, ist man gezwungen, gemischte Mutationen anzuwenden, weil in solchen Fällen das Hauptgeschäft darin besteht, dass man die abhängigen Stücke eliminire, d. h. durch unabhängige Stücke ausdrücke (Man sehe z. B. die Untersuchung in den §§. 259 bis 263; die in §. 265, die in §. 266, die in §§. 267 und 268, die in §. 269, sodann auch die Aufgaben 160, 161, 176, 177, 178, 179, 180, 187, 195, 197, 212, 213, 214, 215, 216, etc. etc.).

β) Dagegen in den Fällen, wo die Mutationen von den Werthänderungen unabhängig sind, und umgekehrt, hat man die Wahl, entweder gemischte Mutationen oder die (im vorigen §. beschriebenen) zwei successiven Geschäfte anzuwenden.

§. 114. Hiermit ist der allgemeine Theil der vorgelegten Theorie beendigt. Für das Praktische jedoch mögen noch einige Bemerkungen beigefügt werden. Zu diesem Ende kehre man

A) wieder zu den Untersuchungen mit reinen Mutationen zurück, und nehme zuerst die primären Zustände vor.

α) Um einen primären Zustand beurtheilen zu können, muss man die Eigenschaften der Differenz $\mathfrak{U} - U'$ untersuchen. Diese ist aber jedesmal eine nach Potenzen eines Fortschreitungselementes aufsteigende Reihe; und es ist selten nöthig, sehr viele Glieder dieser Reihe herzustellen. Oefters genügt schon das erste Glied; und somit ist man den Weitläufigkeiten der Reihenentwickelungen nicht sehr ausgesetzt. Ja oft ist es nicht einmal nöthig, dieses erste Glied auf analytischem Wege herzustellen; sondern es kann genügen, durch die der speciellen Aufgabe eigenthümlichen Betrachtungen sich zu der Ueberzeugung hinzuarbeiten, ob ein Maximum-stand, Minimum-stand, Gränzstand, Einzel-stand, oder keiner von diesen vier ausgezeichneten Zuständen stattfinde.

Wie man zu verfahren hat, wenn man die Reihe $\mathfrak{U}$ aus einer ungesonderten Function entwickeln muss; darüber vergleiche man §. 46, und die Aufgaben 18, 19, 20, 21, 22, 23, 34, 35, 36.

β) Besondere Aufmerksamkeit nehmen die vielförmigen Ausdrücke in Anspruch. Dabei ist es rathsam, vorerst alle die verschiedenen Formen systematisch voneinander abzusondern, und jede Form einzeln für sich zu untersuchen. Da kann es sich dann ergeben, dass bei irgend einem Ausdrucke alle seine reellen Formen gemeinschaftlich denselben Maximum-stand oder denselben Minimum-stand liefern, während bei einem andern Ausdrucke die eine reelle Form ein Maximum-stand, und eine andere ein Minimum-stand werden kann. (Man sehe in Aufgabe 11, 12 und 15 die Schlussbemerkungen).

γ) Oft mag es Fälle geben, wo wegen eines Radicals das Zeichen des im Momente des Verschwindens befindlichen Ausdruckes ($\mathfrak{U} - U'$) zweideutig ist, d. h. sowohl positiv als auch negativ genommen werden kann, so dass es den Anschein hat, als dürfe man sich weder für einen Maximum-stand noch für einen Minimum-stand entscheiden. Allein man unterscheide folgende Fälle:

1. Wenn dieses Radical gleich anfangs in der Aufgabe vorkommt, und gleich anfangs eine bestimmte Bedeutung beigelegt erhalten hat; dann behält es diese Bedeutung durch die ganze Aufgabe bei. Hier kann also von einer Zweideutigkeit keine Rede sein. (Aufgabe 45, 51, 68, 104, 134, 158, 159, 175, 258, etc.)

2. Wenn dieses Radical gleich anfangs in der Aufgabe als zweideutig vorkommt, oder wenn es erst im Verlaufe der Untersuchung als zweideutig in die für U' und ($\mathfrak{U} - U'$) hergestellten Ausdrücke eingeht; so beachte man Folgendes:

a) Dieses Radical ist bei U' und beim ersten Gliede der für (𝔘 — U') hergestellten Reihe gemeinschaftlicher Factor. Hier ändert sich mit dem Zeichen des Radicals auch gleichzeitig das Zeichen des U' und des (𝔘 — U'); und es ist erlaubt, sich auf folgende Weise zu entscheiden:

Legt man dem Radical diejenige Bedeutung bei, bei welcher der im Momente des Verschwindens befindliche Ausdruck (𝔘 — U') negativ wird; so ist U', sei es nun positiv oder negativ, ein Maximum-stand (in der Analysis gilt ein negativer Ausdruck für desto grösser, je näher sein Werth bei Null liegt. §. 111).

Legt man dem Radical diejenige Bedeutung bei, bei welcher der im Momente des Verschwindens befindliche Ausdruck (𝔘 — U') positiv wird, so ist U', sei es nun positiv oder negativ, ein Minimum-stand (in der Analysis gilt ein negativer Ausdruck für desto kleiner, je weiter sein Werth von Null absteht. §. 111).

(Man sehe Aufgabe 7; 23; 44; 76; 77; 78; 79; 90; 91; 168; 169; 170; 181.)

Man kann, wenn bei U' und beim ersten Gliede der für (𝔘 — U') hergestellten Reihe das zweideutige Radical als gemeinschaftlicher Factor vorkommt, manchmal in solchen Untersuchungen, wo man den Begriff der negativen Grössen durchaus nicht zulassen will, sich auf folgende Weise entscheiden: Wenn U' und (𝔘 — U') immer einerlei Zeichen behalten, so findet ein Minimum-stand statt; wenn aber U' und (𝔘 — U') immer entgegengesetzte Zeichen behalten, so findet ein Maximum-stand statt. (Auf diese Weise wird man sich zuweilen bei geometrischen, mechanischen, etc. Untersuchungen entscheiden können.)

b) Dieses Radical geht zwar in U' ein, jedoch so, dass es nicht zu U' und zum ersten Gliede der für (𝔘 — U') herzustellenden Reihe gemeinschaftlicher Factor ist. Hier findet ein Maximum-stand statt, wenn bei irgend einer Bedeutung des Radicals der Ausdruck (𝔘 — U') negativ ist; und es findet ein Minimum-stand statt, wenn bei irgend einer Bedeutung des Radicals der Ausdruck (𝔘 — U') positiv ist. Kann aber, obgleich man dem Radical eine feste Bedeutung beilegt, das (𝔘 — U') dennoch weder für positiv noch für negativ gelten; so findet auch weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt. Ist z. B.

$$U' = V + P \cdot \sqrt{Q}, \text{ und } \mathfrak{U} - U' = \varkappa^{2m} \cdot R \cdot \sqrt{Q} \cdot \dots\dots\dots$$

so ist, wenn R ein festes Zeichen behält, U' ein Maximum-stand, sobald man $\sqrt{Q}$ so nimmt, dass $R \cdot \sqrt{Q}$ negativ wird; dagegen ist U' ein Minimum-stand, sobald man $\sqrt{Q}$ so nimmt, dass $R \cdot \sqrt{Q}$ positiv wird. Ist aber das Zeichen von R unsicher, so ist U' weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand. Ist ferner

$$U' = V + P \cdot \sqrt{Q}, \text{ und } \mathfrak{U} - U' = \varkappa^{2m} \cdot (S + R \cdot \sqrt{Q}) \cdot \dots\dots$$

so muss man den Zeichenstand des ganzen Ausdruckes $(S + R \cdot \sqrt{Q})$ untersuchen; und dabei kann es sich ergeben, dass sowohl bei dem positiven $R \cdot \sqrt{Q}$ als auch bei dem negativen $R \cdot \sqrt{Q}$ ein Maximum-stand stattfindet, und umgekehrt (Aufgabe 8, 9, 13, 38, 42, 43, etc.).

c) Wenn aber das Zeichen des Ausdruckes (𝔘 — U') wegen eines Radicals zweideutig ist, während der für U' hergestellte Ausdruck mit diesem Radical nichts zu thun hat; so muss man sich natürlich dahin entscheiden, dass weder ein Maximum-stand noch ein Minimum-stand stattfinde (Aufgabe 76; ferner im ersten Falle der Aufgaben 105 und 107, etc. etc.).

δ) Das Null, wenn es ohne alle Beziehung für sich allein gegeben ist, kann weder als positiv noch als negativ betrachtet werden. Ist aber ein erzeugender Ausdruck U gegeben, und U' = 0 eine Specialität von U; so muss man folgende Unterscheidungen machen:

1) Die Specialität U' = 0 muss als positiv gelten, wenn alle nächstanliegenden Nachbarzustände 𝔘 reell und positiv sind. Dabei ist die unendlichkleine Differenz (𝔘 — U') positiv, und somit U' ein Minimum-stand, d. h. unter allen positiven Ausdrücken ist das Null der kleinste (§. 111).

2) Die Specialität U' = 0 muss als negativ gelten, wenn alle nächstanliegenden

Nachbarzustände reell und negativ sind. Dabei ist die unendlichkleine Differenz (𝔘 — U′) negativ, und somit U′ = 0 ein Maximum-stand, d. h. unter allen negativen Ausdrücken ist das Null der grösste, da in der Analysis überhaupt unter negativen Ausdrücken derjenige für den kleinsten genommen wird, dessen Werth am weitesten von Null absteht (§. 111).

3) Die Specialität U′ = 0 kann weder als positiv noch als negativ gelten, wenn zwar alle nächstanliegenden Nachbarzustände 𝔘 reell aber theils positiv theils negativ sind. Dabei kann auch die unendlichkleine Differenz 𝔘 — U′ weder als positiv noch als negativ gelten, und U′ = 0 ist jetzt weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand, d. h. das Null, welches weder als positiv noch als negativ gelten kann, kann auch weder als Maximum-stand noch als Minimum-stand gelten.

4) Die Specialität U′ = 0 ist ein Gränz-stand, wenn die nächstanliegenden Nachbarzustände theils reell theils imaginär sind. Hierbei ist U′ = 0 positiv, wenn die reellen Nachbarzustände 𝔘 auch alle positiv sind; aber U′ = 0 ist negativ, wenn die reellen Nachbarzustände auch alle negativ sind; dagegen ist U′ = 0 weder negativ noch positiv, wenn die reellen Nachbarzustände theils negativ theils positiv sind.

5) Die Specialität U′ = 0 ist ein Einzel-stand, wenn alle nächstanliegenden Nachbarzustände 𝔘 imaginär sind. Dabei kann U′ = 0 weder als positiv noch als negativ gelten

B) Die in diesem §. hinsichtlich der primären Zustände gemachten Bemerkungen leiden, wie sich von selbst versteht, eine ganz analoge Anwendung auf die secundären Zustände.

C) Auch können diese Bemerkungen ohneweiters auf die Untersuchungen, wo man gemischte Mutationen anwendet, ausgedehnt werden.

Von nun an, wo die Theorie in das Einzelne geht, wird es zweckmässig sein, zu unterscheiden:

A) Ausdrücke, welche wirkliche Urfunctionen sind,

B) Ausdrücke, wo auch Differentiale vorkommen,

C) Ausdrücke, wo auch Integrale vorkommen,

und nach diesen Unterscheidungen drei Abtheilungen zu machen. Jede Abtheilung zerfällt von selbst in einzelne Untersuchungen.

2) *Besonderer Theil dieser Theorie.*

A. Ausdrücke, welche wirkliche Urfunctionen sind.

Untersuchung 1.

Es ist U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x w, y gebildeter Ausdruck, und man sucht für y eine solche reelle Function aller der nichtmutablen Veränderlichen x w, dass U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 115. Da U ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden soll, so sind die nichtmutablen Veränderlichen x w noch ganz allgemein, d. h. man kann jedem einzelnen dieser Elemente was immer für einen beliebigen besonderen reellen Werth beilegen. Wenn man nun irgend eine durch $\varphi(x \ldots\ldots w)$ dargestellte reelle Function an die Stelle des y in die ursprüngliche Gleichung einsetzt; so bekommt man auch für U eine Function von x w, welche durch $\psi(x \ldots\ldots w)$ bezeichnet sein mag.

Es werden (nach §. 60) alle die der Function $\varphi(x \ldots . w)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen dargestellt durch

$$\text{I)}\quad \varphi(x \ldots . w) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x \ldots . w) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x \ldots . w) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x \ldots . w)$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Der Allgemeinheit wegen hat man hier die unaufhörliche Reihenform genommen, weil die geschlossene als specieller Fall darin enthalten ist. Auch versteht sich von selbst, dass man den willkürlichen reellen Werth, welchen man dem x in $\varphi(x \ldots . w)$ beilegt, auch dem in $\delta\varphi(x \ldots . w)$, $\delta^2\varphi(x \ldots . w)$, $\delta^3\varphi(x \ldots . w)$, etc. enthaltenen x beilegen muss; und so fort; ebenso muss man den willkürlichen reellen Werth, welchen man dem w in $\varphi(x \ldots w)$ beilegt, auch dem in $\delta\varphi(x \ldots w)$, $\delta^2\varphi(x \ldots w)$, $\delta^3\varphi(x \ldots w)$, etc. enthaltenen w beilegen. Soll aber obige Reihe, welche mit der bestimmten Function $\varphi(x \ldots . w)$ anfangt, alle beliebigen dem $\varphi(x \ldots . w)$ nächstanliegenden, d. h. alle hinsichtlich des Werthes dem $\varphi(x \ldots . w)$ nächstvorangehenden und nächstnachfolgenden reellen Nachbarfunctionen vorstellen; so muss (nach §. 60)

1) jeder einzelne der Coefficienten $\delta\varphi(x \ldots . w)$, $\delta^2\varphi(x \ldots . w)$, $\delta^3\varphi(x \ldots w)$, etc. eine für sich beliebige und reelle Function sein; ferner muss

2) das Element $\varkappa$ bald als positiv bald als negativ in dem Momente des Verschwindens befindlich gedacht werden.

Führt man die Reihe I, welche kürzer auch dargestellt werden kann durch

$$\text{II)}\quad \varphi(x \ldots . w) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots \ldots$$

an die Stelle des y in den ursprünglichen Ausdruck ein; so bekommt man die dem $U' = \psi(x \ldots . w)$ nächstanliegenden Nachbarzustände, welche mit $(U' + \Delta U)$ oder mit $(\psi(x \ldots . w) + \Delta U)$ bezeichnet werden, und, wenn man sie in eine nach Potenzen des $\varkappa$ fortschreitende Reihe entwickeln will, nur in eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt werden dürfen, eben weil $\varkappa$ im Momente des Verschwindens befindlich ist. Wenn nun die Differenz $(\psi(x \ldots . w) + \Delta U) - \psi(x \ldots . w)$ bei dem im Momente des Verschwindens gedachten und bald als positiv bald als negativ genommenen $\varkappa$ sowie bei allen beliebigen reellen Werthen der Elemente $x \ldots \ldots w$ reell bleibt; so findet

1) ein Maximum-stand statt, wenn diese Differenz beständig negativ ist; dagegen findet

2) ein Minimum-stand statt, wenn diese Differenz beständig positiv ist; es findet aber

3) weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt, wenn diese Differenz weder als positiv noch als negativ gelten kann.

§. 116. Soll nun bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ die Differenz $(\psi(x \ldots \ldots w) + \Delta U) - \psi(x \ldots . w)$ unter allen Umständen ihr Zeichen nicht wechseln können; so darf sich, wenn man für ΔU die nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt, keineswegs die (in §. 62 und 64 aufgestellte) allgemeine Reihenform

$$\Delta U = \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U + \ldots \ldots$$

ergeben, wo

$$\delta U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y$$

$$\delta^2 U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \delta y^2$$

etc. etc.

ist; denn hierbei würde ΔU zugleich mit $\varkappa$ das Zeichen ändern. Die für ΔU herzustellende Reihe darf also nicht mit $\varkappa \cdot \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y$ anfangen, während δy jede beliebige reelle Function von x w ist, und man jedem einzelnen der Elemente x w was immer für beliebige reelle Werthe beilegen kann. Die Reihe fängt aber nicht mit $\varkappa \cdot \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y$ an, wenn eine von folgenden Gleichungen

$$\frac{d_y U}{dy} = 0 \text{ oder } \frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$$

stattfindet. Beide Gleichungen müssen für jeden beliebigen reellen Werth der Elemente x w gelten, und können rückwärts eben noch dazu benützt werden, zu bestimmen, was $\varphi(x \ldots . w)$ für eine Function ist, bei welcher möglicherweise das U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird. Das Praktische des Verfahrens ist also:

A) Man sehe zu, ob die Gleichung $\frac{d_y U}{dy} = 0$ möglich ist, und verbinde diese Gleichung mit der ursprünglichen, wodurch man für y und U gleichfalls Functionen von x w bekommt.

B) Hierauf sehe man zu, ob die Gleichung $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ möglich ist, und verbinde auch diese Gleichung mit der ursprünglichen, wodurch man für y und U gleichfalls Functionen von x w bekommt.

Dabei ist besonders zu berücksichtigen, dass man jedesmal soviel als möglich in Factoren zerlegt.

Das Prüfungsmittel für das Vorhandensein eines Maximum-standes oder Minimum-standes gewinnt man, wie gesagt, dadurch, dass man die Reihe II an die Stelle des y in die ursprüngliche Gleichung einsetzt. Es ist aber bequem, vorerst nur $\varphi(x \ldots w) + \varkappa \cdot \mathfrak{P}$ statt der Reihe II zu nehmen, und erst, wenn man den sich für ΔU ergebenden Ausdruck auf die geeignete Form gebracht hat, wieder die entsprechende Reihe an die Stelle des $\varkappa \cdot \mathfrak{P}$ zurückzuführen.

Dabei ist $\mathfrak{P} = \delta y + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots$, und man erkennt, dass, weil $\varkappa$ im Momente des Verschwindens ist, $\mathfrak{P}$ gleichzeitig mit δy endlich und positiv oder negativ ist, jenachdem man das willkürliche δy wählt.

Das erste Glied der für ΔU herzustellenden und nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigenden Reihe muss, weil es sein Zeichen nicht ändern darf, den Factor $\varkappa$ in der Weise enthalten, dass sein Exponent entweder eine ganze grade Zahl oder ein in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch ist, dessen Zähler aus einer graden und dessen Nenner aus einer ungraden Zahl besteht.

Sollte einmal der Quotient $\frac{d_y U}{dy}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen; so wird die directe Reihenentwicklung nicht nur die dem $\psi(x \ldots . w)$ nächstanliegenden Nachbarzustände herstellen; sondern sie wird auch die wahre Bedeutung dieser Form angeben (man sehe Aufgabe 18, 20, 33, 34).

§. 117. Die beiden Gleichungen $\frac{d_y U}{dy} = 0$ und $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ sind die einzigen, aus welchen man solche Specialitäten entnehmen kann, bei denen möglicherweise ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet; denn ist weder $\frac{d_y U}{dy} = 0$ noch $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$, so muss das erste Glied der für ΔU herzustellenden Reihe nothwendig $\varkappa \cdot \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y$ sein, wie (aus §. 62) bekannt ist.

Wenn aber diese beiden Gleichungen zugleich bestehen, oder wenn man sie in Factoren zerlegen kann; dann gibt es öfters mehrere Functionen für y, welche einen

Maximum-stand oder Minimum-stand liefern. Es ist daher nicht überflüssig, hier noch einmal darauf aufmerksam zu machen, dass jeder durch irgend eine für y gefundene Function erzeugte primäre Zustand $U' = \psi(x \ldots w)$ niemals mit den dem Werthe nach in angebbarer Entfernung befindlichen Zuständen, sondern nur mit allen seinen nächstanliegenden Nachbarzuständen verglichen werden darf. Insofern aber bei mehreren für y gefundenen Functionen sich grössere U ergeben, als bei den den gefundenen Functionen nächstanliegenden Nachbarfunctionen; da ist auch U mehrmals ein Maximum-stand. Insofern aber bei mehreren für y gefundenen Functionen sich kleinere U ergeben, als bei den den gefundenen Functionen nächstanliegenden Nachbarfunctionen; da ist auch U mehrmals ein Minimum-stand.

§. 118. Besonders in den Aufgaben 11, 12 und 15 mag man erkennen, wie nöthig es ist, sich bei Herstellung des Prüfungsmittels zu der Ueberzeugung hinzuarbeiten, dass kein einziges wenn auch noch so spätes Glied der für ΔU herzustellenden Reihe aus irgend einem Grunde, z. B. wenn $\varkappa$ vom Positiven ins Negative oder umgekehrt übergeht, und drgl., imaginär werden kann. Hat man sich aber zu dieser Ueberzeugung hingearbeitet, so ist es schon genug, wenn man nur das erste Glied vollständig hergestellt hat, da alle folgenden Glieder nichts mehr zum Zeichenstande des verschwindendkleinen ΔU beitragen. In Beziehung auf die Herstellung dieses ersten Gliedes bemerke man nun Folgendes:

1) Ist $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ gesetzt worden, so muss man dieses erste Glied durch die bereits besagte directe Reihenentwickelung herstellen; ist aber

2) $\frac{d_y U}{dy} = 0$ gesetzt worden, so ist es nicht immer nöthig, directe Reihenentwicklung zu Hilfe zu nehmen, sondern man kann auch auf folgende Weise verfahren:

A) Wegen $\frac{d_y U}{dy} = 0$ bleibt im Allgemeinen nur

$$\Delta U = \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \delta y^2 + \ldots\ldots\ldots$$

Bekommt nun bei den jetzigen Specialitäten kein Glied der Reihe Null in den Nenner, und ist der Quotient $\frac{d_y^2 U}{dy^2}$ beständig negativ oder positiv; so findet bezüglich ein Maximum-stand oder Minimum-stand statt. Wird aber $\frac{d_y^2 U}{dy^2} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$, so muss man, da kein Glied einer Reihe Null in den Nenner bekommen darf, die Entwickelungsweise mittelst Differentiation jetzt aufgeben, und directe Reihenentwickelung zu Hilfe nehmen.

B) Wird bei den jetzigen Specialitäten aber $\frac{d_y^2 U}{dy^2} = 0$, so bleibt im Allgemeinen nur

$$\Delta U = \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d_y^3 U}{dy^3} \cdot \delta y^3 + \ldots\ldots$$

Da aber im Falle des Maximum-standes und Minimum-standes das erste Glied der für ΔU herzustellenden Reihe kein solches sein darf, welches den Factor $\varkappa^3$ enthält, weil dabei ΔU mit $\varkappa$ sein Zeichen wechseln würde; so muss entweder $\frac{d_y^3 U}{dy^3} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$ oder $\frac{d_y^3 U}{dy^3} = 0$ sein. Ist $\frac{d_y^3 U}{dy^3} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$, so muss man das Prüfungsmittel durch directe Reihenentwickelung herstellen; wird dagegen $\frac{d_y^3 U}{dy^3} = 0$, so kann

C) im Allgemeinen nur

$$\Delta U = \frac{\varkappa^4}{1.2.3.4} \cdot \frac{d_y^4 U}{dy^4} \cdot \delta y^4 + \ldots\ldots\ldots$$

bleiben; und bekommt bei den jetzigen Specialitäten kein Glied der Reihe Null in den Nenner, und ist der Quotient $\frac{d_y^4 U}{dy^4}$ beständig negativ oder positiv, so findet bezüglich ein Maximum-stand oder ein Minimum-stand statt. Ist aber $\frac{d_y^4 U}{dy^4} = \frac{\mathfrak{D}}{0}$, so muss man das Prüfungsmittel durch directe Reihenentwickelung herstellen; ist aber $\frac{d_y^4 U}{dy^4} = 0$, so kann

D) im Allgemeinen nur

$$\Delta U = \frac{\varkappa^5}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{d_y^5 U}{dy^5} \cdot \delta y^5 + \ldots\ldots\ldots$$

bleiben. Da aber im Falle des Maximum-standes und Minimum-standes das erste Glied der für ΔU herzustellenden Reihe kein solches sein darf, welches den Factor $\varkappa^5$ enthält; so muss entweder $\frac{d_y^5 U}{dy^5} = \frac{\mathfrak{E}}{0}$ oder $\frac{d_y^5 U}{dy^5} = 0$ sein. Ist $\frac{d_y^5 U}{dy^5} = \frac{\mathfrak{E}}{0}$, so muss man das Prüfungsmittel auf directem Wege herstellen; wird dagegen $\frac{d_y^5 U}{dy^5} = 0$, so kann

E) im Allgemeinen nur

$$\Delta U = \frac{\varkappa^6}{1.2.3\ldots.6} \cdot \frac{d_y^6 U}{dy^6} \cdot \delta y^6 + \ldots\ldots\ldots$$

bleiben; und bekommt bei den jetzigen Specialitäten kein Glied der Reihe Null in den Nenner, und ist der Quotient $\frac{d_y^6 U}{dy^6}$ beständig negativ oder positiv, so findet bezüglich ein Maximum-stand oder Minimum-stand statt; ist aber $\frac{d_y^6 U}{dy^6} = \frac{\mathfrak{F}}{0}$, so muss man das Prüfungsmittel auf directem Wege herstellen; wird dagegen $\frac{d_y^6 U}{dy^6} = 0$, so kann

F) im Allgemeinen nur

$$\Delta U = \frac{\varkappa^7}{1.2.3\,.\,.7} \cdot \frac{d_y^7 U}{dy^7} \cdot \delta y^7 + \ldots\ldots$$

bleiben, etc. etc.

Wie man weiter zu gehen hat, ist nach allem Vorhergehenden hinlänglich klar. Auch erkennt man jetzt, dass die directe Reihenentwicklung das allgemeine nie versagende Prüfungsmittel ist; denn sowie überhaupt keine Reihe eine richtige ist, wo irgend ein Glied Null in den Nenner bekommt; so sind auch die durch Differentiation entwickelten Reihen bekanntlich nur bis zu dem Gliede richtig, welches zuerst Null in den Nenner bekommt. Dieses Glied ist jedesmal ein falsches, und die Reihe muss an dieser Stelle eine andere Form haben, welche jedesmal durch directe Entwicklung hergestellt werden kann.

Dass übrigens Fälle, wo (bei einer und derselben Specialität) von obigen partiellen Differentialquotienten

a) entweder der erste und zweite
b) oder der erste, zweite und dritte,
c) oder der erste, zweite, dritte und vierte,

etc. etc. gleichzeitig zu Null werden, nur selten vorkommen können, bedarf keines nähern Nachweises.

§. 119. Weil man den Elementen x w beliebige specielle Werthe $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{w}$ beilegt, so kann es eine Menge Functionen von x w geben, welche jetzt alle mit $\varphi(\mathfrak{x} \dots \mathfrak{w})$ einerlei Werth haben. Es wird also auch unter den Functionen, welche dem $\varphi(x \dots w)$ bei jedem Werthe der Elemente x w nächstanliegen, und bekanntlich alle in der allgemeinen Form

$$\varphi(x \dots w) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x \dots w) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x \dots w) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x \dots w) + \dots\dots$$

enthalten sind, eine Menge solcher geben, die bei $x = \mathfrak{x}, \dots\dots, w = \mathfrak{w}$ alle mit $\varphi(\mathfrak{x} \dots \mathfrak{w})$ einerlei Werth haben. Zwischen den so geeigenschafteten Functionen und der gesuchten Function findet dabei folgende Gleichung statt:

$$\varphi(\mathfrak{x} \dots \mathfrak{w}) = \varphi(\mathfrak{x} \dots \mathfrak{w}) + \varkappa \cdot \delta\varphi(\mathfrak{x} \dots \mathfrak{w}) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(\mathfrak{x} \dots \mathfrak{w}) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(\mathfrak{x} \dots \mathfrak{w}) + \dots\dots$$

Da aber hier das $\varkappa$ im Momente des Verschwindens befindlich ist, also kein Glied durch die Summe aller nachfolgenden um etwas Angebbares vermehrt oder vermindert werden kann; so ist letztere Gleichung nur möglich, wenn einzeln stattfindet

$$\delta\varphi(\mathfrak{x} \dots \mathfrak{w}) = 0,\ \delta^2\varphi(\mathfrak{x} \dots \mathfrak{w}) = 0,\ \delta^3\varphi(\mathfrak{x} \dots \mathfrak{w}) = 0, \text{ etc.}$$

Diese Gleichungen sind aber keine identischen, sondern gelten nur bei den grade genommenen speciellen Werthen $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{w}$. Sowie nun diejenigen dem $\varphi(x \dots w)$ nächstanliegenden Functionen, welche bei den speciellen Werthen $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{w}$ mit $\varphi(\mathfrak{x} \dots \mathfrak{w})$ einerlei Werth bekommen, immer andere und andere sind, je nachdem man sich unter $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{w}$ immer andere und andere specielle Werthe denkt; ebenso müssen die Gleichungen $\delta\varphi(\mathfrak{x} \dots \mathfrak{w}) = 0$, $\delta^2\varphi(\mathfrak{x} \dots \mathfrak{w}) = 0$, $\delta^3\varphi(\mathfrak{x} \dots \mathfrak{w}) = 0$, etc., immer andere und andere sein, je nachdem man sich unter $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{w}$ immer andere und andere Werthe denkt (man vergleiche §. 88, besonders Seite 139 bis 142).

Untersuchung 2.

Es ist U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x w, y, z gebildeter Ausdruck, wo die Elemente y und z ganz unabhängig untereinander sind; und man sucht eine reelle Function der nichtmutablen Veränderlichen x w für y, und auch eine für z, welche beiden Functionen so geeigenschaftet sind, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 120. Da U ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden soll, so sind die nichtmutablen Veränderlichen x w noch ganz allgemein, d. h. man kann jedem einzelnen dieser Elemente was immer für einen beliebigen besondern reellen Werth beilegen. Wenn man nun irgend zwei durch $\varphi'(x \dots w)$ und $\varphi''(x \dots w)$ dargestellte reelle Functionen bezüglich an die Stelle des y und des z in die ursprüngliche Gleichung einsetzt; so bekommt man auch für U eine Function von x w, welche durch $\psi(x \dots w)$ bezeichnet sein mag.

Es werden (nach §. 60) alle die den Functionen $\varphi'(x \dots w)$ und $\varphi''(x \dots w)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen bezüglich dargestellt durch

$$\text{I)}\quad \varphi'(x\,\ldots\,w) + \varkappa\cdot\delta\varphi'(x\,\ldots\,w) + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2\varphi'(x\,\ldots\,w) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3\varphi'(x\,\ldots\,w)$$
$$+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{II)}\quad \varphi''(x\,\ldots\,w) + \varkappa\cdot\delta\varphi''(x\,\ldots\,w) + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2\varphi''(x\,\ldots\,w) + \frac{\varkappa^3}{1.2.2}\cdot\delta^3\varphi''(x\,\ldots\,w)$$
$$+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Der Allgemeinheit wegen hat man die unaufhörliche Reihenform genommen, weil die geschlossene als specieller Fall darin enthalten ist. Auch versteht sich von selbst, dass man den willkürlichen reellen Werth, welchen man dem x in $\varphi'(x\ldots w)$ und $\varphi''(x\ldots w)$ beilegt, auch dem in $\delta\varphi'(x\ldots w)$, $\delta\varphi''(x\ldots w)$, $\delta^2\varphi'(x\ldots w)$, $\delta^2\varphi''(x\ldots w)$, etc. enthaltenen x beilegen muss; und so fort; ebenso muss man den willkürlichen reellen Werth, welchen man dem w in $\varphi'(x\ldots w)$ und in $\varphi''(x\ldots w)$ beilegt, auch dem in $\delta\varphi'(x\ldots w)$, $\delta\varphi''(x\ldots w)$, $\delta^2\varphi'(x\ldots w)$, $\delta^2\varphi''(x\ldots w)$, etc. enthaltenen w beilegen. Soll aber die Reihe I, welche mit der bestimmten Function $\varphi'(x\ldots w)$ anfangt, alle beliebigen dem $\varphi'(x\ldots w)$ nächstanliegenden, d. h. alle hinsichtlich des Werthes dem $\varphi'(x\ldots w)$ nächstvorangehenden und nächstnachfolgenden reellen Nachbarfunctionen vorstellen; und soll ebenso die Reihe II, welche mit der bestimmten Function $\varphi''(x\ldots w)$ anfangt, alle beliebigen dem $\varphi''(x\ldots w)$ nächstanliegenden, d. h. alle hinsichtlich des Werthes dem $\varphi''(x\ldots w)$ nächstvorangehenden und nächstnachfolgenden reellen Nachbarfunctionen vorstellen; so muss (nach §. 60)

1) jeder einzelne der Coefficienten $\delta\varphi'(x\ldots w)$, $\delta\varphi''(x\ldots w)$, $\delta^2\varphi'(x\ldots w)$, $\delta^2\varphi''(x\ldots w)$, etc. eine für sich beliebige und reelle Function sein; ferner muss

2) das Element $\varkappa$ bald als positiv bald als negativ in dem Momente des Verschwindens befindlich gedacht werden.

Da ferner durch die Reihen I und II Functionen dargestellt werden, welche von einander ganz unabhängig sind; so ist jeder Coefficient der einen Reihe von jedem Coefficient der andern Reihe unabhängig.

§. 121. Weil man den Elementen $x\ldots w$ beliebige specielle Werthe $\mathfrak{x}\ldots\mathfrak{w}$ beilegt; so kann es

1) eine Menge Functionen von $x\ldots w$ geben, welche jetzt alle mit $\varphi'(\mathfrak{x}\ldots\mathfrak{w})$ einerlei Werth haben. Es wird also auch unter den Functionen, welche dem $\varphi'(x\ldots w)$ bei jedem Werthe der Elemente $x\ldots w$ nächstanliegen, und bekanntlich alle in der Reihe I enthalten sind, eine Menge solcher geben, die bei $x=\mathfrak{x},\ldots\ldots,\ w=\mathfrak{w}$ alle mit $\varphi'(\mathfrak{x}\ldots\mathfrak{w})$ einerlei Werth haben. Zwischen den so geeigenschafteten Functionen und der für y gesuchten Function findet dabei folgende Gleichung statt:

$$\varphi'(\mathfrak{x}\ldots\mathfrak{w}) = \varphi'(\mathfrak{x}\ldots\mathfrak{w}) + \varkappa\cdot\delta\varphi'(\mathfrak{x}\ldots\mathfrak{w}) + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2\varphi'(\mathfrak{x}\ldots\mathfrak{w})$$
$$+ \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3\varphi'(\mathfrak{x}\ldots\mathfrak{w}) + \ldots\ldots$$

2) Es kann aber auch eine Menge Functionen von $x\ldots w$ geben, welche jetzt alle mit $\varphi''(\mathfrak{x}\ldots\mathfrak{w})$ einerlei Werth haben. Es wird also auch unter den Functionen, welche dem $\varphi''(x\ldots w)$ bei jedem Werthe der Elemente $x\ldots w$ nächstanliegen, und bekanntlich alle in der Reihe II enthalten sind, eine Menge solcher geben, die bei $x=\mathfrak{x},\ldots\ldots,\ w=\mathfrak{w}$ alle mit $\varphi''(\mathfrak{x}\ldots\mathfrak{w})$ einerlei Werth haben. Zwischen den so geeigenschafteten Functionen und der für z gesuchten Function findet dabei folgende Gleichung statt:

$$\varphi''(\mathfrak{x}\ldots\mathfrak{w}) = \varphi''(\mathfrak{x}\ldots\mathfrak{w}) + \varkappa\cdot\delta\varphi''(\mathfrak{x}\ldots\mathfrak{w}) + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2\varphi''(\mathfrak{x}\ldots\mathfrak{w})$$
$$+ \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3\varphi''(\mathfrak{x}\ldots\mathfrak{w}) + \ldots\ldots$$

Da aber hierbei das $\varkappa$ im Momente des Verschwindens befindlich ist, also kein Glied durch die Summe aller nachfolgenden um etwas Angebbares vermehrt oder vermindert werden kann; so sind die beiden letzten Gleichungen nur möglich, wenn einzeln stattfindet $\delta\varphi'(\mathfrak{x} \ldots\ldots \mathfrak{w}) = 0$, $\delta\varphi''(\mathfrak{x} \ldots\ldots \mathfrak{w}) = 0$, $\delta^2\varphi'(\mathfrak{x} \ldots\ldots \mathfrak{w}) = 0$, $\delta^2\varphi''(\mathfrak{x} \ldots\ldots \mathfrak{w}) = 0$, etc. etc. Diese Gleichungen sind aber keine identischen, sondern gelten nur bei den grade genommenen speciellen Werthen $\mathfrak{x} \ldots\ldots \mathfrak{w}$. Sowie nun diejenigen dem $\varphi'(x \ldots\ldots w)$ oder dem $\varphi''(x \ldots\ldots w)$ nächstanliegenden Functionen, welche bei den speciellen Werthen $\mathfrak{x} \ldots\ldots \mathfrak{w}$ entweder mit $\varphi'(\mathfrak{x} \ldots\ldots \mathfrak{w})$ oder mit $\varphi''(\mathfrak{x} \ldots\ldots \mathfrak{w})$ einerlei Werth bekommen, immer andere und andere sind, je nachdem man sich unter $\mathfrak{x} \ldots\ldots \mathfrak{w}$ immer andere und andere specielle Werthe denkt; ebenso müssen die Gleichungen $\delta\varphi'(\mathfrak{x} \ldots\ldots \mathfrak{w}) = 0$, $\delta\varphi''(\mathfrak{x} \ldots\ldots \mathfrak{w}) = 0$, $\delta^2\varphi'(\mathfrak{x} \ldots\ldots \mathfrak{w}) = 0$, $\delta^2\varphi''(\mathfrak{x} \ldots\ldots \mathfrak{w}) = 0$, etc. immer andere und andere sein, je nachdem man sich unter $\mathfrak{x} \ldots\ldots \mathfrak{w}$ immer andere und andere specielle Werthe denkt (man vergleiche §. 88, besonders Seite 139 bis 142).

§. 122. Setzt man die Reihen I und II, welche kürzer auch dargestellt werden können durch

$$\text{III)}\quad \varphi'(x \ldots\ldots w) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots$$

$$\text{IV)}\quad \varphi''(x \ldots\ldots w) + \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 z + \ldots\ldots$$

bezüglich an die Stelle des y und des z in die ursprüngliche Gleichung überall ein; so bekommt man die dem $U' = \psi(x \ldots\ldots w)$ nächstanliegenden Nachbarzustände, welche mit $(U' + \Delta U)$ oder mit $(\psi(x \ldots\ldots w) + \Delta U)$ bezeichnet werden, und, wenn man sie in eine nach Potenzen des $\varkappa$ fortschreitende Reihe entwickeln will, nur in eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt werden dürfen, eben weil $\varkappa$ im Momente des Verschwindens befindlich ist. Wenn nun die Differenz $(\psi(x \ldots w) + \Delta U) - \psi(x \ldots w)$ bei dem im Momente des Verschwindens gedachten und bald als negativ bald als positiv genommenen $\varkappa$ sowie bei allen beliebigen reellen Werthen der Elemente $x \ldots\ldots w$ reell bleibt; so findet

1) ein Maximum-stand statt, wenn diese Differenz beständig negativ ist; dagegen findet

2) ein Minimum-stand statt, wenn diese Differenz beständig positiv ist; es findet aber

3) weder ein Maximum-stand noch ein Minimum-stand statt, wenn diese Differenz weder als positiv noch als negativ gelten kann.

Da die Coefficienten der Reihe I (oder III) von den Coefficienten der Reihe II (oder IV) unabhängig sind, so ist es nicht nöthig, zur Gewinnung des Prüfungsmittels diese ganzen Reihenformen in die ursprüngliche Gleichung einzusetzen, sondern man kann auch hier zur Bequemlichkeit

$$\varkappa \cdot \mathfrak{P} \text{ anstatt } \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots$$

und

$$\varkappa \cdot \mathfrak{Q} \text{ anstatt } \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 z + \ldots\ldots$$

einführen, und erst, wenn man den für ΔU sich ergebenden Ausdruck auf die geeignete Form gebracht hat, statt $\varkappa \cdot \mathfrak{P}$ und $\varkappa \cdot \mathfrak{Q}$ die entsprechenden Reihen zurückführen.

$$\text{Dabei ist } \mathfrak{P} = \delta y + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots$$

$$\text{und } \mathfrak{Q} = \delta z + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 z + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 z + \ldots\ldots$$

woran man erkennt, dass, weil $\varkappa$ im Momente des Verschwindens ist, das $\mathfrak{P}$ gleichzeitig mit δy, und das $\mathfrak{Q}$ gleichzeitig mit δz endlich und positiv oder negativ ist, jenachdem man das willkürliche δy und das willkürliche δz wählt.

Hat man nun auf diese Weise für ΔU eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt, so hat man zu unterscheiden:

1) das erste Glied enthält $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ zugleich. Hier hat man nur (nach §. 11—19) zu untersuchen, ob dieses erste Glied beständig einerlei Zeichen behält, und kein einziges wenn auch noch so spätes Glied aus irgend einem Grunde imaginär werden kann. Soll aber dieses erste Glied beständig einerlei Zeichen behalten, so muss namentlich der Exponent des $\varkappa$ eine ganze gerade Zahl oder ein in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch mit gradem Zähler und ungradem Nenner sein.

2) Das erste Glied der für ΔU hergestellten Reihe enthält nur $\mathfrak{P}$ und nicht auch $\mathfrak{Q}$, sondern das $\mathfrak{Q}$ kommt erst in einem späteren Gliede vor. Hier ist nicht genug, wenn das erste Glied das Zeichen nicht wechseln kann; sondern man bedenke, dass die dem $U' = \psi(x \ldots\ldots w)$ nächstanliegenden Nachbarzustände $(\psi(x \ldots . w) + \Delta U)$ dadurch erzeugt werden, dass man an die Stelle des y alle dem $\varphi'(x \ldots\ldots w)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen setzt, wobei man sorgsam zu beachten hat, dass die Elemente $x \ldots\ldots w$ jeden beliebigen reellen Werth annehmen können. Unter den dem $\varphi'(x \ldots . w)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen befinden sich dann auch die, welche bei speciellen Werthen $x = \mathfrak{x} \ldots\ldots w = \mathfrak{w}$ alle mit $\varphi'(\mathfrak{x} \ldots\ldots \mathfrak{w})$ einerlei Werth haben, wo also $\delta\varphi'(\mathfrak{x} \ldots\ldots \mathfrak{w}) = 0$, $\delta^2\varphi'(\mathfrak{x} \ldots\ldots \mathfrak{w}) = 0$, etc. ist, so dass es Fälle gibt, wo $\mathfrak{P} = 0$ ist, während das $\mathfrak{Q}$ nicht zu Null wird. Hat man nun eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe für ΔU hergestellt, wo erst in einem späteren Gliede das $\mathfrak{Q}$ vorkommt; und hat man sich überzeugt, dass kein einziges wenn auch noch so spätes Glied aus irgend einem Grunde imaginär werden kann; und behält das erste Glied beständig einerlei Zeichen: so muss man noch zusehen, ob bei $\mathfrak{P} = 0$ dasjenige von den zurückbleibenden Gliedern, welches jetzt mit der niedrigsten Potenz des $\varkappa$ sowie auch mit $\mathfrak{Q}$ versehen ist, mit dem (vorher vorhandenen nun aber weggefallenen) ersten Gliede einerlei und ein unwandelbares Zeichen behält. Nur unter dieser Bedingung kann ein Maximum-stand oder Minimum-stand bestehen (Man sehe die Aufgaben 26 und 27).

3) Sollte das erste Glied der für ΔU hergestellten Reihe nur $\mathfrak{Q}$ und nicht auch $\mathfrak{P}$ enthalten, sondern das $\mathfrak{P}$ erst in einem späteren Gliede vorkommen; so verfahre man jetzt mit $\mathfrak{Q}$, wie vorher mit $\mathfrak{P}$, und umgekehrt.

§. 123. Soll nun bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ die Differenz $(\psi(x \ldots\ldots w) + \Delta U) - \psi(x \ldots\ldots w)$ unter allen Umständen ihre Zeichen nicht wechseln können; so müssen (wie schon im vorigen §. erörtert ist) in der für ΔU herzustellenden Reihe alle die verschiedenen Ausdrücke, welche möglicherweise das erste Glied werden können, einerlei und ein unwandelbares Zeichen haben; denn das Zeichen der Summe aller Glieder ist mit dem Zeichen des jedesmaligen ersten Gliedes einerlei. Wenn man also für ΔU die nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt, so darf sich keineswegs die (in §. 63 und 65 aufgestellte) allgemeine Reihenform

$$\Delta U = \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U + , \ldots\ldots$$

ergeben, wo

$$\delta U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_z U}{dz} \cdot \delta z$$

etc. etc.

ist; denn dabei würde das ΔU zugleich mit $\varkappa$ sein Zeichen ändern. Die für ΔU herzustellende Reihe darf also, was man auch immer für Umstände eintreten lassen mag, weder mit $\varkappa \cdot \left(\frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_z U}{dz} \cdot \delta z\right)$, noch mit $\varkappa \cdot \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y$, noch mit $\varkappa \cdot \frac{d_z U}{dz} \cdot \delta z$ anfangen, während sowohl δy als auch δz jede beliebige reelle Function von $x \ldots\ldots w$ vorstellt, und man jedem einzelnen der Elemente $x \ldots\ldots w$ was immer für beliebige

reelle Werthe beilegen kann. Es können aber keinerlei Umstände eintreffen, bei welchen die Reihe mit einem dieser drei Ausdrücke anfängt, sobald eines von folgenden vier Systemen zweier Gleichungen stattfindet:

$$1)\quad \frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_zU}{dz} = 0$$

$$2)\quad \frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_zU}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

$$3)\quad \frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_zU}{dz} = 0$$

$$4)\quad \frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_zU}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

Alle diese Gleichungen müssen für jeden beliebigen Werth der Elemente x....... w gelten; und jedes dieser vier Systeme, welches überhaupt möglich ist, kann rückwärts eben noch dazu benützt werden, zu bestimmen, was $\varphi'(x\ldots\ldots w)$ und $\varphi''(x\ldots\ldots w)$ für Functionen sind, bei denen möglicherweise U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Dabei ist besonders zu berücksichtigen, dass man jedesmal soviel als möglich in Factoren zerlegt.

Sollte einmal einer der Quotienten $\frac{d_yU}{dy}$ oder $\frac{d_zU}{dz}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen, so wird die (schon im vorigen §. beschriebene) directe Reihenentwickelung nicht allein die dem $\psi(x\ldots\ldots w)$ nächstanliegenden Nachbarzustände herstellen, sondern sie wird auch die wahre Bedeutung dieser unbestimmten Formen angeben, wie dieses in Aufgabe 33 und 34 geschehen ist.

§. 124. Diese (im vorigen §. aufgestellten) vier Systeme zweier Gleichungen sind aber die einzigen, aus welchen man für y und z solche Functionen entnehmen kann, bei denen möglicherweise ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet, wovon man sich auf folgende Weise überzeugt:

1) Wenn keiner der Quotienten $\frac{d_yU}{dy}$ und $\frac{d_zU}{dz}$ zu Null werden oder Null in den Nenner bekommen kann, so ist $\varkappa\cdot\left(\frac{d_yU}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_zU}{dz}\cdot dz\right)$ jedenfalls das erste Glied der für ΔU herzustellenden Reihe, wobei ΔU zugleich mit dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ sein Zeichen wechselt.

2) Ist entweder $\frac{d_yU}{dy} = 0$ oder $\frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$, während weder $\frac{d_zU}{dz} = 0$ noch $\frac{d_zU}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$ ist; so kann in der für ΔU herzustellenden Reihe das Glied, welches unter den mit der Mutation des z behafteten das erste ist, kein anderes als $\varkappa\cdot\frac{d_zU}{dz}\cdot\delta z$ sein. Nun sind unter den der für y gesuchten Function nächstanliegenden Nachbarfunctionen auch diejenigen enthalten, welche bei den beliebigen speciellen Werthen $\mathfrak{x}\ldots\ldots\mathfrak{w}$ alle mit $\varphi'(\mathfrak{x}\ldots\ldots\mathfrak{w})$ einerlei Werth bekommen; dabei ist $\delta y = \delta\varphi'(\mathfrak{x}\ldots\ldots\mathfrak{w}) = 0$, $\delta^2 y = \delta^2\varphi'(\mathfrak{x}\ldots\ldots\mathfrak{w}) = 0$, etc., so dass unter den Ausdrücken, die jetzt zurückbleiben, $\varkappa\cdot\frac{d_zU}{dz}\cdot\delta z$ der erste ist, also jetzt ΔU mit $\varkappa$ sein Zeichen ändern könnte.

3) Ist $\frac{d_zU}{dz} = 0$ oder $\frac{d_zU}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$, während weder $\frac{d_yU}{dy} = 0$ noch $\frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ ist; so verhält es sich jetzt mit dem Ausdrucke $\varkappa\cdot\frac{d_yU}{dy}\cdot\delta y$, wie vorhin mit $\varkappa\cdot\frac{d_zU}{dz}\cdot\delta z$, und umgekehrt.

Wenn aber mehrere dieser Systeme zweier Gleichungen zugleich bestehen, oder wenn man jede einzelne Gleichung in Factoren zerlegen kann; dann gibt es öfters mehrere Functionen sowohl für y als auch für z, welche einen Maximum-stand oder Minimum-stand liefern. Man erinnere sich also abermals daran, dass jeder durch irgend eine für y und z gefundene Function erzeugte primäre Zustand $U' = \psi(x \ldots . w)$ niemals mit den dem Werthe nach in angebbarer Entfernung befindlichen Zuständen, sondern nur mit seinen nächstanliegenden Nachbarzuständen verglichen werden darf. Insoferne daher bei mehreren für y und z gefundenen Functionen sich grössere U ergeben, als bei den den gefundenen Functionen nächstanliegenden Nachbarfunctionen; da ist auch U mehrmals ein Maximum-stand. Insoferne aber bei mehreren für y und z gefundenen Functionen sich kleinere U ergeben, als bei den den gefundenen Functionen nächstanliegenden Nachbarfunctionen; da ist auch U mehrmals ein Minimum-stand.

§. 125. Hier mag noch ein Nachtrag zur Herstellung des Prüfungsmittels folgen. Wenn man sich auf irgend einem Wege überzeugt hat, dass kein einziges wenn auch noch so spätes Glied der für ΔU herzustellenden Reihe aus irgend einem Grunde, z. B. wenn $\varkappa$ vom Positiven ins Negative übergeht, und dergl., imaginär werden kann; so hat man zweierlei zu unterscheiden, nemlich wenn

1) die für y und z gesuchten Functionen aus einem der Systeme, wo von den Quotienten $\frac{d_y U}{dy}$ und $\frac{d_z U}{dz}$ entweder einer oder auch beide Null in den Nenner bekommen haben, entnommen sind; so muss das Prüfungsmittel durch directe Reihenentwickelung hergestellt werden. Sind aber

2) die für y und z gesuchten Functionen aus dem Systeme, wo zugleich $\frac{d_y U}{dy} = 0$ und $\frac{d_z U}{dz} = 0$ ist, entnommen; so ist es nicht immer nöthig, directe Reihenentwickelung zu Hilfe zu nehmen. Wegen $\frac{d_y U}{dy} = 0$ und $\frac{d_z U}{dz} = 0$ bleibt nemlich im Allgemeinen nur

$$\Delta U = \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_z U}{dy.dz} \cdot \delta y \cdot \delta z + \frac{d_z^2 U}{dz^2} \cdot \delta z^2\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wenn nun von diesen partiellen Differentialquotienten keiner zu Null wird, und keiner Null in den Nenner bekommt; so ist bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$

A) das ΔU negativ, wenn der zu $\frac{\varkappa^2}{1.2}$ gehörige Factor beständig negativ bleibt, was (nach §. 11 — 19) eintrifft, wenn $\frac{d_y^2 U}{dy^2}$ und $\frac{d_z^2 U}{dz^2}$ gleichzeitig negativ, und der Ausdruck $\frac{d_y^2 U}{\delta y^2} \times \frac{d_z^2 U}{dz^2} - \left(\frac{d_y d_z U}{dy.dz}\right)^2$ positiv ist. In diesem Falle findet ein Maximum-stand statt. Dagegen ist

B) das ΔU positiv, wenn der zu $\frac{\varkappa^2}{1.2}$ gehörige Factor beständig positiv bleibt, was (nach §. 11—19) eintrifft, wenn $\frac{d_y^2 U}{dy^2}$ und $\frac{d_z^2 U}{dz^2}$ und der Ausdruck $\frac{d_y^2 U}{dy^2} \times \frac{d_z^2 U}{dz^2} - \left(\frac{d_y d_z U}{dy.dz}\right)^2$ gleichzeitig positiv sind. In diesem Falle findet ein Minimum-stand statt.

Ist aber $\frac{d_z^2 U}{dz^2} = 0$, so bleibt im Allgemeinen nur

$$\Delta U = \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_z U}{dy.dz} \cdot dy \cdot dz\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hier kann der zu $\frac{\varkappa^2}{1.2}$ gehörige Factor sein Zeichen wechseln, und es findet weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt (Man sehe z. B. Aufgabe 25). Wenn aber $\frac{d_y^2 U}{dy^2} = 0$ ist, und nur bleibt

$$\varDelta U = \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(2 \cdot \frac{d_y d_z U}{dy.dy} \cdot dy \cdot dz + \frac{d_z^2 U}{dz^2} \cdot dz^2\right) + \dots\dots\dots$$

so kann der zu $\frac{\varkappa^2}{1.2}$ gehörige Factor wieder sein Zeichen wechseln, und es findet abermals weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt (Man sehe z. B. wieder die Aufgabe 25).

Ist aber gleichzeitig $\frac{d_z^2 U}{dz^2} = 0$ und $\frac{d_y d_z U}{dy \cdot dz} = 0$, so bleibt im Allgemeinen nur

$$\varDelta U = \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \delta y^2 + \dots\dots\dots\dots$$

Ob aber jetzt ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinde, wird sich durch directe Reihenentwickelung zeigen (Man sehe Aufgabe 26).

Ist aber gleichzeitig $\frac{d_y d_z U}{dy.dz} = 0$ und $\frac{d_y^2 U}{dy^2} = 0$, so bleibt im Allgemeinen nur

$$\varDelta U = \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d_z^2 U}{dz^2} \cdot \delta z^2 + \dots\dots\dots\dots$$

wobei ebenfalls das Prüfungsmittel durch directe Reihenentwickelung hergestellt werden muss.

Sollte aber von den Coefficienten $\frac{d_y^2 U}{dy^2}$, $\frac{d_y d_z U}{dy.dz}$, $\frac{d_z^2 U}{dz^2}$ einer oder zwei, oder alle drei Null in den Nenner bekommen so muss man das Prüfungsmittel jedenfalls auf directem Wege herstellen. Werden aber diese drei Coefficienten gleichzeitig Null, so bleibt im Allgemeinen nur

$$\varDelta U = \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \left(\frac{d_y^3 U}{dy^3} \cdot \delta y^3 + 3 \cdot \frac{d_y^2 d_z U}{dy^2 \cdot dz} \cdot \delta y^2 \cdot \delta z + 3 \cdot \frac{d_y d_z^2 U}{dy \cdot dz^2} \cdot \delta y \cdot \delta z^2 + \frac{d_z^3 U}{dz^3} \cdot \delta z^3\right) + \dots\dots\dots\dots$$

Wenn nun kein einziger dieser partiellen Differentialquotienten zu Null wird, oder Null in den Nenner bekommt; so findet weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt. Bekommen aber einige oder alle Null in den Nenner; so muss man das Prüfungsmittel auf directem Wege herstellen. Sind aber alle Null, so bleibt im Allgemeinen nur

$$\varDelta U = \frac{\varkappa^4}{1.2.3.4} \cdot \left(\frac{d_y^4 U}{dy^4} \cdot \delta y^4 + 4 \cdot \frac{d_y^3 d_z U}{dy^3 \cdot dz} \cdot \delta y^3 \cdot \delta z + 6 \cdot \frac{d_y^2 d_z^2 U}{dy^2 \cdot dz^2} \cdot \delta y^2 \cdot \delta z^2 + 4 \cdot \frac{d_y d_z^3 U}{dy \cdot dz^3} \cdot \delta y \cdot \delta z^3 + \frac{d_z^4 U}{dz^4} \cdot \delta z^4\right) + \dots\dots\dots\dots$$

Wenn kein einziger dieser partiellen Differentialquotienten zu Null wird, oder Null in den Nenner bekommt; so findet jetzt ein Maximum-stand statt, sobald der eingeklammerte Factor unter allen Umständen negativ bleibt; dagegen findet ein Minimum-stand

statt, sobald der eingeklammerte Factor unter allen Umständen positiv bleibt (Aus den §§. 11—19 ersieht man, wie die hierzu nöthigen Bedingungen aufgefunden werden).

Wie man weiter gehen muss, ist aus allem Vorhergehenden hinlänglich klar; auch bedarf es keines näheren Nachweises, dass Fälle, wo man das Prüfungsmittel an einem noch späteren Gliede der für ΔU herzustellenden Reihe entnehmen muss, nur höchst selten vorkommen.

Untersuchung 3.

Es ist U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x w, y, z, v gebildeter Ausdruck, wo die Elemente y, z, v ganz unabhängig untereinander sind; und man sucht eine reelle Function der nichtmutablen Veränderlichen x w für y, und auch eine für z, und eine für v, welche drei Functionen so geeigenschaftet sind, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 126. Da U ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden soll, so sind die nichtmutablen Veränderlichen x w noch ganz allgemein, d. h. man kann jedem einzelnen dieser Elemente was immer für einen beliebigen besonderen reellen Werth beilegen. Wenn man nun irgend drei durch $\varphi'(x \ldots\ldots w)$, $\varphi''(x \ldots\ldots w)$ und $\varphi'''(x \ldots\ldots w)$ dargestellte reelle Functionen bezüglich an die Stelle des y, des z und des v in die ursprüngliche Gleichung überall einsetzt; so bekommt man auch für U eine Function von x w, welche durch $\psi(x \ldots\ldots w)$ bezeichnet sein mag.

Es werden (nach §. 60) alle die den Functionen $\varphi'(x \ldots\ldots w)$, $\varphi''(x \ldots\ldots w)$ und $\varphi'''(x \ldots\ldots w)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen bezüglich dargestellt durch

$$\text{I)}\quad \varphi'(x \ldots w) + \varkappa \cdot \delta\varphi'(x \ldots w) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi'(x \ldots w) \ldots\ldots$$

$$\text{II)}\quad \varphi''(x \ldots w) + \varkappa \cdot \delta\varphi''(x \ldots w) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi''(x \ldots w) \ldots\ldots$$

$$\text{III)}\quad \varphi'''(x \ldots w) + \varkappa \cdot \delta\varphi'''(y \ldots w) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi'''(x \ldots w) \ldots\ldots$$

Der Allgemeinheit wegen hat man die unaufhörliche Reihenform genommen, weil die geschlossene als specieller Fall darin enthalten ist. Auch versteht sich von selbst, dass man den willkürlichen reellen Werth, welchen man dem x in $\varphi'(x \ldots w)$, in $\varphi''(x \ldots w)$ und in $\varphi'''(x \ldots w)$ beilegt, auch dem in $\delta\varphi'(x \ldots w)$, $\delta\varphi''(x \ldots w)$, $\delta\varphi'''(x \ldots w)$, $\delta^2\varphi'(x \ldots\ldots w)$, $\delta^2\varphi''(x \ldots\ldots w)$, $\delta^2\varphi'''(x \ldots\ldots w)$, etc. enthaltenen x beilegt, und so fort.

Ueberhaupt ist Alles, was den Inhalt der beiden §§. 115 und 120 ausmacht, auf die hier aufgestellten Reihen I, II und III zu erstrecken.

§. 127. Setzt man die Reihen I, II und III, welche kürzer auch dargestellt werden können durch

$$\text{IV)}\quad \varphi'(x \ldots w) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

$$\text{V)}\quad \varphi''(x \ldots w) + \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 z + \ldots\ldots\ldots$$

$$\text{VI)}\quad \varphi'''(x \ldots w) + \varkappa \cdot \delta v + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 v + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 v + \ldots\ldots\ldots$$

bezüglich an die Stelle des y, des z und des v in die ursprüngliche Gleichung überall ein; so bekommt man die dem $U' = \psi(x \ldots . w)$ nächstanliegenden Nachbarzustände, welche mit $(U' + \Delta U)$ oder mit $(\psi(x \ldots . w) + \Delta U)$ bezeichnet werden, und, wenn man sie in eine nach Potenzen des $\varkappa$ fortschreitende Reihe entwickeln will, nur in eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt werden dürfen, eben weil $\varkappa$ im Momente des Verschwindens befindlich ist. Wenn nun die Differenz $(\psi(x \ldots w) + \Delta U) - \psi(x \ldots w)$ bei dem im Momente des Verschwindens gedachten und bald als positiv bald als negativ genommenen $\varkappa$ sowie bei allen beliebigen reellen Werthen der Elemente $x \ldots . w$ reell bleibt; so findet

1) ein Maximum-stand statt, wenn diese Differenz beständig negativ ist; dagegen findet

2) ein Minimum-stand statt, wenn diese Differenz beständig positiv ist; es findet aber

3) weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt, wenn diese Differenz weder als positiv noch als negativ gelten kann.

Da die Reihen I, II, III, oder, was dasselbe ist, da die Reihen IV, V, VI, ganz unabhängig untereinander sind; so ist es nicht nöthig, zur Gewinnung des Prüfungsmittels diese ganzen Reihenformen in die ursprüngliche Gleichung einzusetzen, sondern man kann auch hier zur Bequemlichkeit

$$\varkappa \cdot \mathfrak{P} \text{ statt } \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

$$\varkappa \cdot \mathfrak{Q} \text{ statt } \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 z + \ldots\ldots\ldots$$

$$\varkappa \cdot \mathfrak{R} \text{ statt } \varkappa \cdot \delta v + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 v + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 v + \ldots\ldots\ldots$$

einführen, und erst, wenn man den für ΔU sich ergebenden Ausdruck auf die geeignete Form gebracht hat, statt $\varkappa \cdot \mathfrak{P}$, $\varkappa \cdot \mathfrak{Q}$, $\varkappa \cdot \mathfrak{R}$ die entsprechenden Reihen zurückführen.

Dabei ist $\mathfrak{P} = \delta y + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$

und $\mathfrak{Q} = \delta z + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 z + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 z + \ldots\ldots\ldots$

und $\mathfrak{R} = \delta v + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 v + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 v + \ldots\ldots\ldots$

woran man erkennt, dass, weil $\varkappa$ im Momente des Verschwindens ist, das $\mathfrak{P}$ gleichzeitig mit δy, das $\mathfrak{Q}$ gleichzeitig mit δz, und das $\mathfrak{R}$ gleichzeitig mit δv endlich und positiv oder negativ ist, je nachdem man das willkürliche δy, das willkürliche δz, und das willkürliche δv wählt.

Hat man nun auf diese Weise eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt, so hat man zu unterscheiden:

1) das erste Glied dieser Reihe enthält $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ zugleich. Hier hat man nur zu untersuchen, ob keines der folgenden wenn auch noch so späten Glieder aus irgend einem Grunde imaginär werden kann, und ob das erste Glied unter allen Umständen einerlei und ein umwandelbares Zeichen behält (welche letztere Untersuchung nach §. 11—19 vorgenommen wird).

2) Das erste Glied dieser Reihe enthält nur $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, und nicht auch $\mathfrak{R}$, sondern das $\mathfrak{R}$ kommt erst in einem spätern Gliede vor. Hier ist es nicht genug, wenn das erste Glied sein Zeichen nicht wechseln kann; sondern man bedenke, dass die dem $U' = \psi(x \ldots . w)$ nächstanliegenden Nachbarzustände $(\psi(x \ldots . w) + \Delta U)$ dadurch erzeugt werden, dass man an die Stelle des y alle dem $\varphi'(x \ldots . w)$, an die Stelle des z alle dem $\varphi''(x \ldots . w)$, und an die Stelle des v alle dem $\varphi'''(x \ldots . w)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen setzt, wobei man sorgsam zu beachten hat, dass die Elemente $x \ldots . w$ jeden beliebigen reellen Werth annehmen können. Unter den dem

$\varphi'(x \ldots w)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen befinden sich dann auch die, welche bei speciellen Werthen $x = \mathfrak{x}, \ldots, w = \mathfrak{w}$ mit $\varphi'(\mathfrak{x} \ldots \mathfrak{w})$ einerlei Werth haben, wobei $\delta\varphi'(\mathfrak{x} \ldots \mathfrak{w}) = 0$, $\delta^2\varphi'(\mathfrak{x} \ldots \mathfrak{w}) = 0$, etc. ist. Ebenso befinden sich unter den dem $\varphi''(x \ldots w)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen auch diejenigen, welche bei den nemlichen speciellen Werthen alle mit $\varphi''(\mathfrak{x} \ldots \mathfrak{w})$ einerlei Werth haben, wobei $\delta\varphi''(\mathfrak{x} \ldots \mathfrak{w}) = 0$, $\delta^2\varphi''(\mathfrak{x} \ldots \mathfrak{w}) = 0$, etc. ist. Man kann sich also Fälle denken, wo sowohl $\mathfrak{P} = 0$ als auch $\mathfrak{Q} = 0$ ist, während $\mathfrak{R}$ nicht wegfällt. Hat man nun für $\varDelta U$ eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe hergestellt, wo das erste Glied nur $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ enthält, und behält dieses erste Glied immer dasselbe unwandelbare Zeichen; so sehe man zu, ob bei $\mathfrak{P} = 0$ und $\mathfrak{Q} = 0$ dasjenige von den zurückbleibenden Gliedern, welches jetzt mit der niedrigsten Potenz des $\varkappa$ behaftet und mit $\mathfrak{R}$ versehen ist, mit dem (vorher vorhandenen nun aber weggefallenen) ersten Gliede einerlei und ein unwandelbares Zeichen behält. Nur unter dieser Bedingung kann ein Maximum-stand oder Minimum-stand bestehen.

3) Das erste Glied dieser Reihe enthält nur $\mathfrak{P}$, und nicht auch $\mathfrak{Q}$ oder $\mathfrak{R}$, sondern $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ kommen erst in späteren Gliedern vor. Man untersuche zuerst das erste Glied dieser Reihe. Hierauf setze man $\mathfrak{P} = 0$. Hat dann von den zurückbleibenden Gliedern dasjenige, welches mit der niedrigsten Potenz des $\varkappa$ behaftet ist, das $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ zugleich; so ist es hinreichend, wenn man noch dieses Glied untersucht, und findet, dass es mit dem (vorher vorhandenen nun aber weggefallenen) ersten Gliede einerlei und ein unwandelbares Zeichen behält. Hat aber dieses Glied nicht $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ zugleich, sondern etwa nur $\mathfrak{Q}$; so muss man dieses Glied untersuchen, und hierauf auch noch $\mathfrak{Q} = 0$ setzen, und von den zurückbleibenden Gliedern dasjenige, welches nun mit der niedrigsten Potenz des $\varkappa$ behaftet und mit $\mathfrak{R}$ versehen ist, untersuchen. Nur wenn bei all diesen verschiedenen Zuständen des $\mathfrak{P}$ und des $\mathfrak{Q}$ das $\varDelta U$ einerlei und ein unwandelbares Zeichen behält, kann ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinden.

Wie man zu verfahren hat, wenn $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ auf eine andere Weise in der für $\varDelta U$ herzustellenden Reihe zerstreut sind, bedarf keiner Auseinandersetzung mehr. Die Hauptrücksicht ist immer nur darauf zu nehmen, dass bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ das $\varDelta U$ sein Zeichen nicht wechseln kann, es mögen die Ausdrücke $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ alle drei zugleich bestehen, oder nach Belieben einer oder zwei zu Null werden (Man sehe noch Aufgabe 26 und 27).

§. 128. Soll nun bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ die Differenz $(\psi(x \ldots w) + \varDelta U) - \psi(x \ldots w)$ unter allen Umständen ihr Zeichen nicht wechseln können; so müssen (wie schon im vorigen §. erörtert ist) in der für $\varDelta U$ herzustellenden Reihe alle die verschiedenen Ausdrücke, welche möglicherweise das erste Glied werden können, einerlei und ein unwandelbares Zeichen behalten; denn das Zeichen der Summe aller Glieder ist mit dem Zeichen des jedesmaligen ersten Gliedes einerlei. Wenn man also für $\varDelta U$ die nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt, so darf sich keineswegs die allgemeine Reihenform

$$\varDelta U = \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U + \ldots\ldots$$

ergeben, wo

$$\delta U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_z U}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_v U}{dv} \cdot \delta v$$

etc. etc.

ist; denn dabei würde das $\varDelta U$ zugleich mit $\varkappa$ das Zeichen ändern. Die für $\varDelta U$ herzustellende Reihe darf also, was man auch immer für Umstände eintreten lassen mag,

weder mit $\varkappa \cdot \left(\frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_z U}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_v U}{dv} \cdot \delta v\right)$, noch mit $\varkappa \cdot \left(\frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_z U}{dz} \cdot \delta z\right)$,

noch mit $\varkappa \cdot \left(\frac{d_yU}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_vU}{dv} \cdot \delta v\right)$, noch mit $\varkappa \cdot \left(\frac{d_zU}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_vU}{dv} \cdot \delta v\right)$, noch mit $\varkappa \cdot \frac{d_yU}{dy} \cdot \delta y$, noch mit $\varkappa \cdot \frac{d_zU}{dz} \cdot \delta z$, noch mit $\varkappa \cdot \frac{d_vU}{dv} \cdot \delta v$ anfangen, während sowohl δy als auch δz und δv jede beliebige reelle Function von x w vorstellt, und man jedem einzelnen der Elemente x w was immer für beliebige reelle Werthe beilegen kann. Es können aber keinerlei Umstände eintreffen, bei welchen die Reihe mit einem dieser sieben Ausdrücke anfängt, sobald eines von folgenden acht Systemen dreier Gleichungen stattfindet:

$$1)\quad \frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_zU}{dz} = 0 \text{ und } \frac{d_vU}{dv} = 0$$

$$2)\quad \frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_zU}{dz} = 0 \text{ und } \frac{d_vU}{dv} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

$$3)\quad \frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_zU}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0} \text{ und } \frac{d_vU}{dv} = 0$$

$$4)\quad \frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_zU}{dz} = 0 \text{ und } \frac{d_vU}{dv} = 0$$

$$5)\quad \frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_zU}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0} \text{ und } \frac{d_vU}{dv} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

$$6)\quad \frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_zU}{dz} = 0 \text{ und } \frac{d_vU}{dv} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

$$7)\quad \frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_zU}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0} \text{ und } \frac{d_vU}{dv} = 0$$

$$8)\quad \frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_zU}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0} \text{ und } \frac{d_vU}{dv} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

Alle diese Gleichungen müssen für jeden beliebigen Werth der Elemente x w stattfinden, und jedes dieser acht Systeme, welches überhaupt möglich ist, kann rückwärts noch dazu benützt werden, zu bestimmen, was $\varphi'(x \ldots\ldots w)$, $\varphi''(x \ldots\ldots w)$ und $\varphi'''(\ldots\ldots w)$ für Functionen sind, bei welchen möglicherweise U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Dabei ist besonders zu berücksichtigen, dass man jedesmal soviel als möglich in Factoren zerlegt.

Sollte einmal einer der Quotienten $\frac{d_yU}{dy}$, $\frac{d_zU}{dz}$, $\frac{d_vU}{dv}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen, so wird die (schon im vorigen §. beschriebene) directe Reihenentwickelung nicht allein die dem $\psi(x \ldots\ldots w)$ nächstanliegenden Nachbarzustände herstellen, sondern sie wird auch die wahre Bedeutung dieser unbestimmten Formen angeben, wie dieses z. B. in Aufgabe 33 und 34 geschehen ist.

§. 129. Diese (im vorigen §. aufgestellten) acht Systeme dreier Gleichungen sind aber die einzigen, aus welchen man für y, z und v solche Functionen entnehmen kann, bei denen möglicherweise ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet. Der Beweis wird ganz nach dem Vorgange des §. 124 geführt.

Wie es zu erklären ist, wenn sich für y, z oder v mehrere verschiedene Functionen von x w ergeben, bei denen allen das U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird; das ist gleichfalls am Schlusse des §. 117 und des §. 124 auseinandergesetzt.

In Beziehung auf die Herstellung des Prüfungsmittels ist §. 125 zu vergleichen; und wenn die für y, z und v gesuchten Functionen aus dem ersten Systeme entnommen sind, so ist es nicht immer nöthig, directe Reihenentwicklung zu Hilfe zu nehmen;

denn wegen $\frac{d_y U}{dy} = 0$, $\frac{d_z U}{dz} = 0$ und $\frac{d_v U}{dv} = 0$ bleibt im Allgemeinen nur

$$\Delta U = \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_z U}{dy \cdot dz} \cdot \delta y \cdot \delta z + \frac{d_z^2 U}{dz^2} \cdot \delta z^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_v U}{dy \cdot dv} \cdot \delta y \cdot \delta v \right.$$

$$\left. + 2 \cdot \frac{d_z d_v U}{dz \cdot dv} \cdot \delta z \cdot \delta v + \frac{d_v^2 U}{dv^2} \cdot \delta v^2 \right) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wenn nun von diesen partiellen Differentialquotienten keiner zu Null wird, und keiner Null in den Nenner bekommt; so ist bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$

A) das ΔU negativ, wenn der zu $\frac{\varkappa^2}{1.2}$ gehörige Factor beständig negativ bleibt; dagegen ist

B) das ΔU positiv, wenn der zu $\frac{\varkappa^2}{1.2}$ gehörige Factor beständig positiv bleibt.

Die Bedingungen, unter welchen solche mehrtheilige Ausdrücke ihr Zeichen nicht wechseln, werden nach §. 11 bis 19 aufgesucht.

Wenn aber einige dieser partiellen Differentialquotienten zu Null werden, oder Null in den Nenner bekommen, oder wenn man das Prüfungsmittel an einem mit einer noch höhern Potenz des $\varkappa$ behafteten Gliede gewinnen muss; so verfahrt man, wie schon (§. 125) für den einfachern Fall geschehen ist, und es genügt, dahin zu verweisen.

Es ist nun nicht mehr nöthig, diejenigen Untersuchungen vorzunehmen, wo vier und noch mehr unmittelbar mutable Elemente vorkommen. Das bisherige Verfahren lässt sich gradezu auf dergleichen Untersuchungen ausdehnen.

Untersuchung 4.

Es ist U ein (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x w, y gebildeter Ausdruck, und man sucht für y eine solche reelle Function aller der nichtmutablen Veränderlichen x w, dass dabei U ein Gränz-stand wird.

§. 130. Da U ein Gränz-stand werden soll, so sind die nichtmutablen Veränderlichen x w noch ganz allgemein, d. h. man kann jedem einzelnen dieser Elemente was immer für einen beliebigen besonderen reellen Werth beilegen. Wenn man nun irgend eine durch $\varphi(x \ldots. w)$ dargestellte reelle Function an die Stelle des y in die ursprüngliche Gleichung überall einsetzt; so bekommt man auch für U eine Function von x w, welche durch $\psi(x \ldots. w)$ bezeichnet sein mag.

Indem man aber an die Stelle des y die dem $\varphi(x \ldots. w)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen, welche bekanntlich durch

$$\text{I)} \quad \varphi(x \ldots. w) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x \ldots. w) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x \ldots. w) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x \ldots. w)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder kürzer durch

$$\text{II)} \quad \varphi(x \ldots. w) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

dargestellt werden, einführt; bekommt man die dem $U' = \psi(x \ldots w)$ nächstanliegenden Nachbarzustände $(U' + \Delta U)$ oder $(\psi(x \ldots w) + \Delta U)$, welche jetzt, sobald $U' = \psi(x \ldots w)$ ein Gränz-stand ist, vom Reellen ins Imaginäre, oder vom Imaginären ins Reelle übergehen, wenn man einmal die dem $\varphi(x \ldots w)$ nächstvorhergehenden und ein andermal die dem $\varphi(x \ldots w)$ nächstnachfolgenden Nachbarfunctionen setzt, d. h. ΔU muss vom Reellen ins Imaginäre oder vom Imaginären ins Reelle übergehen, wenn man das im Momente des Verschwindens befindliche $\varkappa$ bald als positiv bald als negativ nimmt. Desshalb hann auch die für ΔU herzustellende Reihe nicht durchaus nach ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigen, sondern muss auch gebrochene Potenzen des $\varkappa$ in sich aufnehmen, sei es nun schon im ersten oder erst in einem späteren Gliede.

Man wird daher zuerst zusehen, ob die Gleichung $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ möglich ist; und dann untersuchen, ob bei der daraus sich für y ergebenden Function $\varphi(x \ldots w)$ das durch directe Reihenentwicklung hergestellte ΔU beim Zeichenwechsel des $\varkappa$ vom Imaginären ins Reelle oder umgekehrt übergeht. Dabei findet ein Gränz-stand statt.

Wenn es aber nicht angeht, $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ zu setzen, oder die daraus für y sich ergebende Function bereits geprüft ist; so sehe man zu, ob nicht auch die Gleichung $\frac{d_y^2 U}{dy^2} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$ möglich ist, und verfahre, wie im vorigen Falle.

Wenn es aber auch nicht angeht, $\frac{d_y^2 U}{dy^2} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$ zu setzen, oder die daraus für y sich ergebende Function bereits geprüft ist; so sehe man zu, ob nicht auch die Gleichung $\frac{d_y^3 U}{dy^3} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$ möglich ist, etc.

Auf diese Weise fahre man fort, bis man überzeugt ist, dass durch ferneres Mutiren in den Nenner kein neuer Ausdruck mehr kommen kann. Natürlich muss man auch die für ΔU herzustellende Reihe jedesmal soweit fortsetzen, bis man überzeugt ist, dass aus den fehlenden Gliedern nichts anderes mehr geschlossen werden kann, was nicht bereits aus den schon hergestellten Gliedern hat geschlossen werden können. Hat man sich nun vom Dasein eines Gränz-standes überzeugt, so gebe man dem ΔU diejenige Eigenschaft, bei welcher alle Glieder reell werden, und denke sich $\varkappa$ im Momente des Verschwindens. Sind dann alle reellen Zustände des ΔU negativ, so ist der Gränzstand $U' = \psi(x \ldots w)$ grösser als seine reellen Nachbarzustände; sind aber alle reellen Zustände des ΔU positiv, so ist der Gränzstand $U' = \psi(x \ldots w)$ kleiner, als seine reellen Nachbarzustände.

§. 131. Es leuchtet nun von selbst ein, dass, wenn U ein reeller mit den Elementen $x \ldots w$, y, z gebildeter Ausdruck ist, wo y und z zwei mutable aber unter sich ganz unabhängige Elemente sind, man die Gränz-stände auffindet, indem man zusieht, welche von den Gleichungen

$$\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}, \quad \frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}, \quad \frac{d_y^2 U}{dy^2} = \frac{\mathfrak{C}}{0}, \quad \frac{d_y d_z U}{dy \cdot dz} = \frac{\mathfrak{D}}{0}, \quad \frac{d_z^2 U}{dz^2} = \frac{\mathfrak{E}}{0},$$

etc. etc.
möglich sind.

Hat man aber die bis jetzt für die Aufsuchung der Gränz-stände gegebene Theorie gehörig aufgefasst, so wird man sie auf alle in der Zukunft noch vorkommenden Ausdrücke gradezu anwenden können; denn man hat nichts weiter zu thun, als zuzusehen, ob entweder der erste, oder der zweite, oder der dritte, etc. etc. Mutationscoefficient Null in den Nenner bekommt, und ob aus dem zu Null gewordenen Nenner sich für ein mutables Element eine Function bestimmen lässt. Dann hat man das Prüfungsmit-

tel durch directe Reihenentwicklung herzustellen, und zu beachten, ob die dem gesuchten Gränz-stande nächstanliegenden Nachbarzustände theils reell theils imaginär sind, welche Untersuchung auch nicht mit der geringsten Schwierigkeit verknüpft ist.

Somit erkennt man schon jetzt zur Genüge, wie die Aufsuchung der Gränz-stände mit der Aufsuchung der Maximum-stände und Minimum-stände zusammenhängt, und worin diese beiden Untersuchungen voneinander verschieden sind. Desshalb soll auch im ganzen Verlaufe dieser Theorie kein Problem mehr vorkommen, in welchem die Aufsuchung eines Gränz-standes gefordert wird.

Untersuchung 5.

Es ist U ein (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x . . w, y gebildeter Uusdruck, und man sucht für y eine solche reelle Function aller der nichtmutablen Veränderlichen x w, dass U ein Einzel-stand wird.

§. 132. Da U ein Einzel-stand werden soll, so sind die nichtmutablen Veränderlichen x w noch ganz allgemein, d. h. man kann jedem einzelnen dieser Elemente was immer für einen beliebigen besondern reellen Werth beilegen. Wenn man nun irgend eine durch $\varphi(x \ldots . w)$ dargestellte reelle Function an die Stelle des y in die ursprüngliche Gleichung überall einsetzt, bekommt man auch für U eine Function von x w, welche mit $\psi(x \ldots . w)$ bezeichnet sein mag.

Indem man aber an die Stelle des y die dem $\varphi(x \ldots . w)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen, welche bekanntlich durch

$$\text{I)}\quad \varphi(x \ldots . w) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x \ldots . w) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x \ldots . w) + \ldots \ldots .$$

oder kürzer durch

$$\text{II)}\quad \varphi(x \ldots . w) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots \ldots \ldots .$$

dargestellt werden, einführt; bekommt man die dem $U' = \psi(x \ldots . w)$ nächstanliegenden Nachbarzustände $(U' + \Delta U)$ oder $(\psi(x \ldots . w) + \Delta U)$, welche jetzt, sobald $U' = \psi(x \ldots . w)$ ein Einzel-stand ist, imaginär bleiben, man mag die dem $\varphi(x \ldots w)$ nächstvorgehenden oder nächstnachfolgenden Nachbarfunctionen setzen, d. h. ΔU muss imaginär bleiben, das $\varkappa$ mag positiv oder negativ genommen werden. Diese Eigenschaft kann aber von $\varkappa$ abhängig sein oder nicht.

1) Ist diese Eigenschaft abhängig von $\varkappa$, so muss das ΔU Glieder haben, von denen einige bei positivem $\varkappa$ und andere bei negativem $\varkappa$ imaginär sind, d. h. die für ΔU herzustellende Reihe muss wenigstens zwei Glieder mit gebrochenen Exponenten des $\varkappa$ haben, von denen das eine bei positivem $\varkappa$ das andere bei negativem $\varkappa$ imaginär wird. Ein solcher Einzel-stand wird also auch aus den Gleichungen $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$, $\frac{d_y^2 U}{dy^2} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$, $\frac{d_y^3 U}{dy^3} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$, etc. etc. gefunden (Man sehe Aufgabe 10 am Ende).

2) Ist aber diese Eigenschaft unabhängig von $\varkappa$, so kann der Einzel-stand nur durch die der speciellen Aufgabe eigenthümlichen Betrachtungen gefunden werden. Hier kann die für ΔU herzustellende Reihe lauter ganze Potenzen des $\varkappa$ oder auch gebrochene enthalten. (Man sehe Aufgabe 9.) Namentlich ist hierher der Fall zu rech-

nen, wo U ein Ausdruck ist, der einen schon von Ursprung her imaginären Theilsatz enthält, und man für y eine solche Function nimmt, wobei dieser imaginäre Theilsatz wegfällt (Man sehe die zweite Abtheilung der Aufgaben 3, 5, etc. etc.).

Diese Andeutungen für die Aufsuchung der Einzel-stände genügen in theoretischer Beziehung vollkommen; und es ist, wie schon im vorigen §. für die Aufsuchung der Gränz-stände bemerkt wurde, so auch für die Aufsuchung der Einzel-stände ganz überflüssig, im Verlaufe der bevorstehenden Theorie noch einmal ein Problem aufzustellen, in welchem die Aufsuchung eines Einzel-standes gefordert wird.

Untersuchung 6.

Es ist U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x w, y, z oder auch nur mit den Elementen x w, y gebildeter Ausdruck, und zugleich noch eine Gleichung F(x w, y, z) = 0 gegeben. Man sucht für y und z solche reelle Functionen der nichtmutablen Veränderlichen x w, dass sowohl der Gleichung F(x w, y, z) = 0 identisch genügt, als auch U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 133. Wenn U ein mit den Elementen x w, y, z gebildeter Ausdruck ist, dann ist es gleichgiltig, ob man y oder z als mittelbar mutabel behandelt; wenn aber U ein nur mit den Elementen x w, y gebildeter Ausdruck ist, dann muss y als mittelbar mutabel behandelt werden, weil sonst das in F(x w, y, z) = 0 enthaltene z keinen Einfluss auf U hätte. Man betrachte nun in beiden Fällen das y als mittelbar mutabel, so kommt man zu folgender Auflösung:

Man sondere y aus F(x w, y, z) = 0 ab, so dass man y = f(x w, z) bekommt. Diesen für y erhaltenen Ausdruck führe man in die für U bestehende Gleichung ein, so ist die jetztige Untersuchung auf die erste (§. 115 bis §. 119) zurückgebracht; denn man hat jetzt eine aus den Elementen U, x w, z zusammengesetzte Gleichung, woraus man für z eine solche Function von x w aufsuchen kann, wobei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand, etc. wird. Hat man die ganze Untersuchung ausgeführt, so setze man zuletzt die für z gefundene Function in die Gleichung F(x w, y, z) = 0 ein, wodurch sich noch y als Function von x w ergibt.

§. 134. Will man aber aus irgend einem Grunde diese Absonderung und nachherige Substitution vermeiden, so schlage man einen von folgenden zwei Wegen ein:

Erstens. Man mutire, und eliminire die mittelbaren Mutationscoefficienten auf directem Wege. Ist U ein mit den Elementen x w, y, z gebildeter Ausdruck, so bekommt man (nach §. 68).

$$\text{I)}\quad \delta U = \left[\left(\frac{d_z U}{dz} \times \frac{d_y F}{dy} - \frac{d_y U}{dy} \times \frac{d_z F}{dz}\right) : \frac{d_y F}{dy}\right] \cdot \delta z$$

Ist aber U ein mit den Elementen x w, y gebildeter Ausdruck, so bekommt man (nach §. 69).

$$\text{II)}\quad \delta U = \left[\left(-\frac{d_y U}{dy} \times \frac{d_z F}{dz}\right) : \frac{d_y F}{dy}\right] \cdot \delta z$$

B) Man sehe zuerst zu, ob der bei δz befindliche Factor zu Null werden kann, und verbinde diese Gleichung mit F(x w, y, z) = 0.

B) Hierauf sehe man zu, ob auch der bei δz befindliche Factor Null in den Nenner bekommen kann, und verbinde auch diese Gleichung mit $F(x \ldots w\ y, z) = 0$.

In beiden Fällen wird man y, z und U als Functionen von $x \ldots w$ bekommen, so dass man $y = \varphi'(x \ldots w)$, $z = \varphi''(x \ldots w)$ und $U = \psi(x \ldots w)$ hat.

Bei Herstellung des Prüfungsmittels muss man sich überzeugen, ob bei den grade in Untersuchung stehenden Specialitäten sich aus $F(x \ldots w, y, z) = 0$ für die der Function $y = \varphi'(x \ldots w)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen eine nur nach ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln lässt oder nicht.

1) Lässt sich für die der Function $y = \varphi'(x \ldots w)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen eine nur nach ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln, und kann das Prüfungsmittel an einem der Coefficienten $\delta^2 U$, $\delta^4 U$, etc. gewonnen werden; so hat man zu verfahren, wie schon öfters auseinandergesetzt.

2) Lässt sich aber für die der Function $y = \varphi'(x \ldots w)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen keine nach lauter ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln, oder kann man aus einem andern Grunde das Prüfungsmittel nicht an einem der Coefficienten $\delta^2 U$, $\delta^4 U$, etc. entnehmen; so muss man auf folgende Weise verfahren: Man setze zuerst

$$\varphi''(x \ldots w) + \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 z + \ldots\ldots\ldots$$

oder schlechthin $\varphi''(x \ldots w) + \varkappa \cdot \mathfrak{Q}$ an die Stelle des z, und $\mathfrak{Y}$ an die Stelle des y in $F(x \ldots w, y, z) = 0$ überall ein, so dass man

$$F(x \ldots w, \mathfrak{Y}, \varphi''(x \ldots w) + \varkappa \cdot \mathfrak{Q}) = 0$$

bekommt. Daraus entwickle man (nach §. 46) alle mit $\varphi'(x \ldots w)$ anfangenden und nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigenden Reihen, welche die Form

$$\text{III)} \quad \mathfrak{Y} = \varphi'(x \ldots w) + \varkappa^a \cdot A + \varkappa^b \cdot B + \ldots\ldots\ldots$$

haben werden, und wo man sich vor allem überzeugen muss, dass unter allen Umständen, unter denen man die Reihe gebraucht, kein einziges wenn auch noch so spätes Glied imaginär wird. Hierauf führe man diese Reihe an die Stelle des y, und $\varphi''(x \ldots w) + \varkappa \cdot \mathfrak{Q}$ an die Stelle des z in die für U gegebene Gleichung ein, etc. Die Differenz $\mathfrak{U} - U'$ wird dann entscheiden, ob ein Maximum-stand, Minimum-stand, Gränz-stand oder Einzel-stand stattfindet.

Zweitens. Die (man sehe §§. 68 und 69) indirecte Multiplicatorenmethode kann oft sehr gute Dienste leisten. Ist U ein mit den Elementen $x \ldots w$, y, z gebildeter Ausdruck, so bekommt man

$$\text{IV)} \quad \delta U = \left(\frac{d_z U}{dz} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_z F}{dz}\right) \cdot \delta z$$

Ist aber U ein mit den Elementen $x \ldots w$, y gebildeter Ausdruck, so bekommt man

$$\text{V)} \quad \delta U = \mathfrak{M} \cdot \frac{d_z F}{dz} \cdot \delta z$$

Mag nun die Gleichung IV oder V stattfinden, jedenfalls muss die identische Gleichung

$$\text{VI)} \quad \frac{d_y U}{dy} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_y F}{dy} = 0$$

damit verbunden werden.

A) Lässt man den bei δz befindlichen Factor zu Null werden, so hat man entweder folgende drei identische Gleichungen

$$\frac{d_y U}{dy} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_y F}{dy} = 0, \quad \frac{d_z U}{dz} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_z F}{dz} = 0, \quad F(x \ldots w, y, z) = 0$$

oder man hat folgende drei identische Gleichungen

$$\frac{d_y U}{dy} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_y F}{dy} = 0, \quad \mathfrak{M} \cdot \frac{d_z F}{dz} = 0, \quad F(x \ldots . w, y, z) = 0$$

Kann man das Prüfungsmittel an einem der Coefficienten $\delta^2 U$, $\delta^4 U$, etc. gewinnen, so verfahre man, wie schon (in den §§. 68 und 69) auseinandergesetzt ist; muss man aber directe Reihenentwickelung zu Hilfe nehmen, so verfahre man, wie in diesem §. auseinandergesetzt ist.

B) Will man zusehen, ob der bei δz befindliche Factor auch Null in den Nenner bekommen kann; so muss man vor Allem $\mathfrak{M}$ aus IV oder V eliminiren. Hier liefert aber die Multiplicatorenmethode offenbar keinen Vortheil vor der directen Elimination.

§. 135. Der Bequemlichkeit wegen wurde die Bedingungsgleichung in der Form $F(x \ldots . . w, y, z) = 0$ geschrieben, was besonders desshalb angeht, weil jede Gleichung auf diese Form gebracht werden kann, sobald man alles auf die linke Seite des Gleichheitszeichens schreibt. Hieher gehört namentlich der Fall, wo y und z solche zusammengehörige Functionen sein sollen, dass irgend ein Ausdruck $\mathfrak{F}(x \ldots . w, y, z)$ unter allen Umständen den bestimmt gegebenen constanten Werth $\mathfrak{K}$ behält, oder die bestimmt gegebene Function $f(x \ldots . . w)$ bleibt; denn in beiden Fällen, wo entweder $\mathfrak{F}(x \ldots . w, y, z) = \mathfrak{K}$ oder $\mathfrak{F}(x \ldots . w, y, z) = f(x \ldots . w)$ ist, kann man setzen $\mathfrak{F}(x \ldots . w, y, z) - \mathfrak{K} = 0$ oder $\mathfrak{F}(x \ldots . w, y, z) - f(x \ldots . w) = 0$; und somit hat man beide Fälle auf die Form $F(x \ldots . w, y, z) = 0$ gebracht.

Untersuchung 7.

Es sei U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x w, y, z oder auch nur mit den Elementen x w, y gebildeter Ausdruck, und man soll für y und z solche reelle Functionen von x w aufsuchen, dass U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während eben diese für y und z gesuchten Functionen solche zusammengehörigen sein sollen, dass irgend ein anderer Ausdruck $F(x \ldots . . w, y, z)$ entweder immer der nemlichen aber nichtgegebenen Function von x w gleich bleibt, oder immer den nemlichen aber nichtgegebenen constanten Werth behält.

§. 136. Wie bei voriger Untersuchung, so ist auch hier zu beachten: wenn U ein mit den Elementen x w, y, z gebildeter Ausdruck ist, dann ist es gleichgiltig, ob man y oder z als mittelbar mutabel behandelt; wenn aber U ein nur mit den Elementen x w, y gebildeter Ausdruck ist, dann muss y als mittelbar mutabel behandelt werden, weil sonst das in $F(x \ldots . w, y, z)$ enthaltene z keinen Einfluss auf U hätte. Man betrachte nun in beiden Fällen das y als mittelbar mutabel, so kommt man zu folgender Auflösung:

Man nehme an, m sei die immer sich gleich bleibende aber nicht gegebene Function von x w, oder der immer sich gleich bleibende aber nichtgegebene constante Werth; und setze

$$\text{I)} \quad F(x \ldots . w, y, z) = m$$

Man sondere y ab, so dass man z. B. $y = f(x \ldots . w, z, m)$ bekannt, und führe diesen Ausdruck in die für U bestehende Gleichung überall ein. Dadurch ist diese Untersuchung auf die erste zurückgeführt; denn man bekommt jetzt für U einen aus den Elementen x w, z, m gebildeten Ausdruck, der nur noch das einzige mutable Element z enthält, und aus dem sich für die Mutationscoefficienten gradezu Ausdrücke von folgender Form

$$\text{II)}\quad \delta U = \frac{d_z W}{dz} \cdot \delta z$$

$$\text{III)}\quad \delta^2 U = \frac{d_z W}{dz} \cdot \delta^2 z + \frac{d_z^2 W}{dz^2} \cdot \delta z^2$$

etc. etc.

ergeben. Man sehe nun zu, welche der Gleichungen $\frac{d_z W}{dz} = 0$ oder $\frac{d_z W}{dz} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ möglich ist, oder ob beide zugleich möglich sind, und bestimme daraus für z eine Function von x . . . w, m, welche durch $z = \pi(x \ldots w, m)$ dargestellt sein mag. Das unbestimmte m kann man aber wieder mittelst I eliminiren, so dass man $z = \pi(x \ldots w, F(x \ldots w, y, z))$ bekommt, woraus sich weiter für z eine Function von x w, y absondern lässt, welche dargestellt sein mag durch

$$\text{IV)}\quad z = \chi(x \ldots\ldots w, y)$$

Nun aber existirt keine Gleichung mehr, wodurch bestimmt werden kann, was y für eine Function von x w ist; und somit kann man für das mittelbar mutable y jede beliebige Function von x w annehmen. Hat man aber die gehörige Form für das Prüfungsmittel hergestellt, so wird sie im Allgemeinen auch das noch willkürliche Element y enthalten; und diesen Umstand kann man dazu benützen, für y nur solche Functionen von x w zu wählen, bei denen für das verschwindend kleine $\varkappa$ die Differenz $(U' + \Delta U) - U'$ beständig negativ oder positiv bleibt (Man sehe z. B. die Aufgabe 48).

Der Unterschied zwischen der sechsten und siebenten Untersuchung besteht also darin, dass in der sechsten sich sowohl für z als auch für y bestimmte Functionen von x w ergaben, während in der siebenten das mittelbar mutable y eine ganz willkürliche Function von x w bleibt, so dass man hier eine Art diophantischer Aufgabe hat.

§. 137. Es ist leicht zu erkennen, dass die im vorigen §. angewendete Absonderung und Substitution weitläufig ist; und man verfahre lieber auf folgende Weise: Man verwandle Gleichung I in

$$\text{V)}\quad F(x \ldots\ldots w, y, z) - m = 0$$

und man kann die mittelbaren Mutationscoefficienten des y entweder direct oder mittelst eines Multiplicators eliminiren.

Erstens. Man eliminire die Mutationscoefficienten des y direct; so wird man, wenn U ein mit den Elementen x w, y, z gebildeter Ausdruck ist, bekommen:

$$\text{VI)}\quad \delta U = \left[\left(\frac{d_z U}{dz} \times \frac{d_y F}{dy} - \frac{d_y U}{dy} \times \frac{d_z F}{dz}\right) : \frac{d_y F}{dy}\right] \cdot \delta z$$

Wenn aber U ein mit den Elementen x w, y gebildeter Ausdruck ist, so wird man bekommen

$$\text{VII)}\quad \delta U = \left[\left(-\frac{d_y U}{dy} \times \frac{d_z F}{dz}\right) : \frac{d_y F}{dy}\right] \cdot \delta z$$

Man sehe zu, ob der bei δz befindliche Factor zu Null werden oder Null in den Nenner bekommen kann. Dadurch gibt sich für z gradezu eine Function von x w, y, welche dargestellt sein mag durch

$$\text{VIII)}\quad z = \chi(x \ldots\ldots w, y)$$

Zweitens. Will man die indirecte Multiplicatorenmethode anwenden, so wird man, wenn U ein mit den Elementen x w, y, z gebildeter Ausdruck ist, bekommen

$$\text{IX)}\quad \delta U = \left(\frac{d_z U}{dz} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_z F}{dz}\right) \cdot \delta z$$

Wenn aber U ein mit den Elementen x w, y gebildeter Ausdruck ist, so bekommt man

$$\text{X)}\quad \delta U = \mathfrak{M} \cdot \frac{d_z F}{dz} \cdot \delta z$$

Mit jedem dieser Ausdrücke ist noch die Gleichung

$$\text{XI)}\quad \frac{d_y U}{dy} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_y F}{dy} = 0$$

zu verbinden, etc. etc.

Untersuchung 8.

Es sei U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x w, y, z, v gebildeter Ausdruck, und zugleich noch eine Gleichung F(x w, y, z, v) = 0 gegeben. Man sucht für y, z, v solche reelle Functionen der nichtmutablen Veränderlichen x w, dass sowohl der Gleichung F(x w, y, z, v) = 0 identisch genügt, als auch U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 138. Sowie hier die Aufgabe gestellt ist, ist es einerlei, welches der mutablen Elemente als mittelbar behandelt wird. Man führe die Untersuchung so durch, dass man y als mittelbar mutabel nimmt.

Man sondere y aus F(x . . . w, y, z, v) = 0 ab, so dass man z. B. y = f(x . . . w, z, v) bekommt. Diesen Ausdruck führe man in die für U bestehende Gleichung überall ein, so ist die Untersuchung auf die zweite (§. 120 bis §. 125) gebracht; denn man hat jetzt eine Gleichung, aus welcher man ohneweiters für z und v Functionen von x w aufsuchen kann, wobei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird. Hat man die ganze Untersuchung ausgeführt, so setze man zuletzt die für z und v gefundenen Functionen in die Gleichung F(x w, y, z, v) = 0 ein, wodurch sich y als Function von x w ergibt.

Wenn der für U gegebene Ausdruck und die Bedingungsgleichung nicht gleichzeitig die Elemente y, z, v enthalten, so ist es auch nicht gleichgiltig, welches von ihnen als mittelbar mutabel betrachtet wird; sondern man kann nur ein solches als mittelbar mutabel nehmen, welches in dem für U gegebenen Ausdrucke und in der Bedingungsgleichung zugleich vorkommt. Das Verfahren besteht aber jedesmal darin, dass man das als mittelbar genommene Element eliminirt, etc.

§. 139. Will man aber aus irgend einem Grunde diese Absonderung und nachherige Substitution vermeiden, so schlage man einen von folgenden zwei Wegen ein:

Erstens. Man mutire, und eliminire die mittelbaren Mutationscoefficienten auf directem Wege. Hier gibt sich dann

$$\text{I)}\quad \delta U = \left[\left(\frac{d_z U}{dz} \times \frac{d_y F}{dy} - \frac{d_y U}{dy} \times \frac{d_z F}{dz}\right) : \frac{d_y F}{dy}\right] \cdot \delta z$$

$$+ \left[\left(\frac{d_v U}{dv} \times \frac{d_y F}{dy} - \frac{d_y U}{dy} \times \frac{d_v F}{dv}\right) : \frac{d_y F}{dy}\right] \cdot \delta v$$

Man sehe nun zu, ob die zu δz und δv gehörigen Factoren zu Null werden oder Null in den Nenner bekommen können, etc. etc., und verbinde diese Gleichungen mit

$F(x \ldots\ldots w, y, z, v) = 0$, wodurch man $y = \varphi'(x \ldots\ldots w)$, $z = \varphi''(x \ldots\ldots w)$, $v = \varphi'''(x \ldots\ldots w)$ und $U = \psi(x \ldots\ldots w)$ bekommt.

Bei Herstellung des Prüfungsmittels muss man sich vor Allem überzeugen, ob bei den grade in Untersuchung stehenden Specialitäten sich aus $F(x \ldots w, y, z, v) = 0$ für die der Function $y = \varphi'(x \ldots\ldots w)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen eine nur nach ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln lässt oder nicht. Die dann noch nöthige Untersuchung wird nach §. 11—19 vorgenommen.

1) Lässt sich nun für die der Function $y = \varphi'(x \ldots w)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen eine nur nach ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln, und kann das Prüfungsmittel an einem der Coefficienten $\delta^2 U$, $\delta^4 U$, etc. gewonnen werden; so hat man zu verfahren, wie schon (in den §§. 120 bis 125) auseinandergesetzt ist.

2) Lässt sich aber für die der Function $y = \varphi'(x \ldots w)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen keine nach lauter ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickeln, oder kann man aus einem andern Grunde das Prüfungsmittel nicht an einem der Coefficienten $\delta^2 U$, $\delta^4 U$, etc. gewinnen; so muss man auf folgende Weise verfahren: Man setze zuerst

$$\varphi''(x \ldots w) + \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 z + \ldots\ldots\ldots$$

oder schlechthin $\varphi''(x \ldots w) + \varkappa \cdot \mathfrak{Q}$ statt z, ebenso

$$\varphi'''(x \ldots w) + \varkappa \cdot \delta v + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 v + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 v + \ldots\ldots\ldots$$

oder schlechthin $\varphi'''(x \ldots w) + \varkappa \cdot \mathfrak{R}$ statt v, und $\mathfrak{Y}$ statt y in $F(x \ldots w, y, z, v) = 0$ überall ein, so dass man

$$F(x \ldots w, \mathfrak{Y}, \varphi''(x \ldots w) + \varkappa \cdot \mathfrak{Q}, \varphi'''(x \ldots w) + \varkappa \cdot \mathfrak{R}) = 0$$

bekommt. Daraus entwickle man (nach §. 46) alle mit $\varphi'(x \ldots w)$ anfangenden und nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigenden Reihen, welche die Form

$$\mathfrak{Y} = \varphi'(x \ldots w) + \varkappa^a \cdot A + \varkappa^b \cdot B + \ldots\ldots$$

haben werden, und wo man sich vor Allem überzeugen muss, dass unter allen Umständen, unter denen man die Reihe gebraucht, kein einziges wenn auch noch so spätes Glied imaginär wird. Hierauf führe man diese Reihe an die Stelle des y, und $\varphi''(x \ldots w) + \varkappa \cdot \mathfrak{Q}$ an die Stelle des z, und $\varphi'''(x \ldots w) + \varkappa \cdot \mathfrak{R}$ an die Stelle des v in die für U bestehende Gleichung ein, etc. Die Differenz $\mathfrak{U} - U'$ wird dann entscheiden, ob ein Maximum-stand oder ein Minimum-stand, oder ein Gränz-stand oder Einzel-stand stattfindet. Dabei hat man die in §. 11—19 gegebene Theorie zu benützen.

Zweitens. Die (man sehe §. 70) indirecte Multiplicatorenmethode kann oft sehr gute Dienste leisten. Man bekommt nemlich hier

$$\text{II)}\quad \delta U = \left(\frac{d_z U}{dz} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_z F}{dz}\right) \cdot \delta z + \left(\frac{d_v U}{dv} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_v F}{dv}\right) \cdot \delta v$$

Neben diesem Ausdrucke besteht noch die identische Gleichung

$$\text{III)}\quad \frac{d_y U}{dy} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_y F}{dy} = 0$$

A) Soll sowohl der zu δz als auch der zu δv gehörige Factor zu Null werden, so hat man gleichzeitig die vier identischen Gleichungen

$$\frac{d_y U}{dy} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_y F}{dy} = 0, \quad \frac{d_z U}{dz} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_z F}{dz} = 0$$

$$\frac{d_v U}{dv} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_v F}{dv} = 0, \quad F(x \ldots w, y, z, v) = 0$$

Kann man das Prüfungsmittel an einem der Coefficienten $\delta^2 U$, $\delta^4 U$, etc. gewinnen, so verfahre man, wie schon öfters auseinandergesetzt ist; muss man aber directe Reihenentwickelung zu Hilfe nehmen, so verfahre man, wie in diesem §. auseinandergesetzt ist. Dabei hat man die in den §. 11—19 gegebene Theorie zu benützen.

B) Will man aber zusehen, ob von den zu δz und δv gehörigen Factoren entweder einer oder auch beide Null in den Nenner bekommen können; so muss man vor Allem das M aus II eliminiren. Hier liefert aber die Multiplicatorenmethode offenbar keinen Vortheil vor der directen Elimination.

Wie zu verfahren ist, wenn der für U gegebene Ausdruck und die Bedingungsgleichung nicht gleichzeitig die Elemente y, z, v enthalten, ist am Schlusse des vorigen §. angedeutet.

Der Bequemlichkeit wegen wurde die Bedingungsgleichung in der Form $F(x \ldots . w, y, z, v) = 0$ geschrieben, etc. etc. (Man vergleiche in dieser Hinsicht den §. 135.)

Untersuchung 9.

Es sei U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen $x \ldots\ldots w, y, z, v$ gebildeter Ausdruck, und man soll für y, z und v solche reelle Functionen von $x \ldots . w$ aufsuchen, dass U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während eben diese für y, z und v gesuchten Functionen solche zusammengehörige sein sollen, dass irgend ein anderer Ausdruck $F(x \ldots . w, y, z, v)$ entweder immer der nemlichen aber nichtgegebenen Function von $x \ldots . w$ gleichbleibt, oder immer den nemlichen aber nichtgegebenen constanten Werth behält.

§. 140. Wie die Aufgabe gestellt ist, ist es einerlei, welches der mutablen Elemente als mittelbar mutabel behandelt wird. Man führe die Untersuchung so durch, dass man y als mittelbar mutabel nimmt.

Man nehme an, m sei die immer sich gleichbleibende aber nichtgegebene Function von $x \ldots\ldots w$ oder der immer sich gleichbleibende aber nichtgegebene constante Werth; und setze

$$F(x \ldots\ldots w, y, z, v) = m, \text{ oder } F(x \ldots\ldots w, y, z, v) - m = 0$$

Hier bekommt man für z und v bestimmte Functionen von $x \ldots . w, y$, welche dargestellt sein mögen durch

$$z = \chi'(x \ldots\ldots w, y) \text{ und } v = \chi''(x \ldots\ldots w, y)$$

während man für y jede beliebige Function von $x \ldots . w$ nehmen kann. Hat man aber die gehörige Form für das Prüfungsmittel hergestellt, so wird sie im Allgemeinen auch das willkürliche Element y enthalten; und diesen Umstand kann man noch dazu benützen, für y nur solche Functionen von $x \ldots . w$ zu wählen, bei denen für das verschwindend kleine $\varkappa$ die Differenz $(U' + \Delta U) - U'$ beständig negativ oder positiv bleibt. (Man sehe Aufgabe 48.)

Der Unterschied zwischen der achten und neunten Untersuchung besteht also darin, dass in der achten sich sowohl für z und v als auch für y bestimmte Functionen von $x \ldots . w$ ergaben, während in der neunten das mittelbar mutable y eine ganz willkürliche Function von $x \ldots\ldots w$ bleibt, so dass man hier eine Art diophantischer Aufgabe hat.

Wie man zu verfahren hat, wenn in dem für U gegebenen Ausdrucke und in dem Ausdrucke $F(x \ldots . w, y, z, v)$ nicht zugleich die drei Elemente y, z, v vorkommen; darüber vergleiche man den Schluss des §. 138.

Untersuchung 10.

Es sei U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x.........w, y, z, v gebildeter Ausdruck, und zugleich noch zwei Gleichungen F'(x....w, y, z, v) = 0 und F''(x.....w, y, z, v) = 0 gegeben. Man sucht für y, z, v solche reelle Functionen der nichtmutablen Veränderlichen x.....w, dass sowohl den beiden Gleichungen F' = 0 und F'' = 0 identisch genügt, als auch U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 141. Sowie die Aufgabe hier gestellt ist, ist es einerlei, welches der mutablen Elemente man als unmittelbar mutabel behandelt. Man führe die Untersuchung so durch, dass man v als unmittelbar behandelt.

Man sondere aus den Bedingungsgleichungen die mittelbar mutablen Elemente y und z ab, so dass man z. B. y = f'(x....w, v) und z = f''(x....w, v) bekommt. Diese Ausdrücke führe man in die für U bestehende Gleichung überall ein, so ist die Untersuchung auf die erste (§. 115 bis §. 119) zurückgebracht; denn man hat jetzt eine Gleichung, aus welcher man ohneweiters für v eine solche Function von x....w aufsuchen kann, dass U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird. Hat man die ganze Untersuchung ausgeführt, so setze man zuletzt die für v gefundene Function in die Gleichungen F'(x.....w, y, z, v) = 0 und F''(x......w, y, z, v) = 0 ein: dann lassen sich auch y und z als Functionen von x.....w bestimmen.

Wenn der für U gegebene Ausdruck und die beiden Bedingungsgleichungen nicht gleichzeitig die drei Elemente y, z, v enthalten; so ist es auch nicht gleichgiltig, welches man als unmittelbar mutabel betrachtet, sondern man muss darauf bedacht sein, dass nur ein solches als unmittelbar mutabel genommen wird, welches gleichzeitig sowohl auf U als auch auf die andern mittelbar mutablen Elemente Einfluss hat.

Man nehme in dieser Hinsicht folgende zwei Beispiele:

Erstes Beispiel. Es sei U = F(x....w, y), F'(x....w, y, z) = 0. und F''(x....w, z, v) = 0. Hier kann man offenbar nur v als unmittelbar mutabel nehmen. Aus F'' = 0 sondere man z ab, so dass man z = f''(x....w, v) bekommt. Diesen Ausdruck substituire man in F' = 0, so bekommt man F'(x...w, y, f''(x...w, v)) = 0, und daraus kann man y = f'(x....w, v) absondern. Diesen für y hergestellten Ausdrnck führe man zuletzt in U = F(x....w, y) ein.

Zweites Beispiel. Es sei U = F(x....w, y), F'(x....w, y, v) = 0 und F''(x.....w, z, v) = 0. Hier kann man nur z als unmittelbar mutabel nehmen. Man sondere v aus F'' = 0 ab, so dass man v = f'(x....w, z) bekommt. Diesen Ausdruck führe man in F' = 0 ein, so bekommt man F'(x...w, y, f'(x...w, z)) = 0. Daraus sondere man y ab, so dass man y = f''(x...w, z) bekommt. Hiernach ist also U = F(x.. .w, f''(x....w, z)). Man suche diejenige Function für z auf, wobei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird. Diese Function führe man in v = f'(x...w, z) und y = f''(x...w, z) ein; so bekommt man auch v und y als Functionen von x...w.

§. 142. Will man aber diese Absonderung und nachherige Substitution aus irgend einem Grunde vermeiden, so schlage man einen von folgenden zwei Wegen ein:

Erstens. Man mutire sowohl den für U gegebenen Ausdruck, als auch die Bedingungsgleichungen, und eliminire die mittelbaren Mutationscoefficienten auf directem Wege. Das Weitere bedarf nach allem Vorhergehenden keiner Auseinandersetzung mehr.

Zweitens. Nach der indirecten Multiplicatorenmethode bekommt man

$$\delta U = \left(\frac{d_v U}{dv} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_v F'}{dv} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_v F''}{dv}\right) \cdot \delta v$$

während noch die beiden identischen Gleichungen

$$\frac{d_y U}{dy} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_y F'}{dy} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_y F''}{dy} = 0$$

$$\frac{d_z U}{dz} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_z F'}{dz} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_z F''}{dz} = 0$$

bestehen, aus welchen man bestimmen kann, was $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ für Functionen von x . . . w sind. Das Weitere bedarf nach allem Vorhergehenden keiner Auseinandersetzung mehr.

Wie man zu verfahren hat, wenn in dem für U gegebenen Ausdrucke und in den beiden Bedingungsgleichungen die drei mutablen Elemente y, z, v nicht zugleich vorkommen; darüber vergleiche man den Schluss des vorigen §.

Untersuchung 11.

Es sei U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x w, y, z, v gebildeter Ausdruck, und man soll für y, z, v solche reelle Functionen von x w aufsuchen, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während eben diese für y, z und v gesuchten Functionen solche zusammengehörigen sein sollen, dass der Gleichung $F'(x \ldots . w, y, z, v) = 0$ indentisch genügt wird, und ein anderer Ausdruck $F''(x \ldots . w, y, z, v)$ entweder immer der nemlichen aber nichtgegebenen Function von x w gleich bleibt, oder immer den nemlichen aber nichtgegebenen Werth behält.

§. 143. Man nehme an, m sei die immer sich gleichbleibende aber nichtgegebene Function von x w, oder der immer sich gleichbleibende aber nichtgegebene constante Werth; und setze

$$F''(x \ldots . w, y, z, v) = m, \text{ oder } F''(x \ldots . w, y, z, v) - m = 0$$

Sowie die Aufgabe hier gestellt ist, ist es einerlei, welches von den drei Elementen y, z, v man als unmittelbar mutabel nimmt. Nimmt man v als unmittelbar mutabel, so bleibt eines der mittelbar mutablen Elemente unbestimmt, also eine ganz willkürliche Function von x w. Dieses unbestimmte Element sei y. Man kann jetzt für z und v bestimmte aus x w, y gebildete Functionen herstellen, welche dargestellt sein mögen durch

$$v = \chi'(x \ldots . w, y), \text{ und } z = \chi''(x \ldots . w, y)$$

Hat man aber die gehörige Form für das Prüfungsmittel hergestellt, so wird sie im Allgemeinen auch das noch willkürliche Element y enthalten; und diesen Umstand kann man dazu benützen, für y nur solche Functionen von x w zu nehmen, bei denen für das verschwindend kleine $\varkappa$ die Differenz $(U' + \Delta U) - U'$ beständig negativ oder positiv bleibt.

Wie zu verfahren ist, wenn die drei Elemente y, z, v nicht zugleich in der für U gegebenen Gleichung, in der Gleichung $F'(x \ldots . w, y, z, v) = 0$, und in dem Ausdrucke $F''(x \ldots . w, y, z, v)$ enthalten sind; darüber vergleiche man den Schluss des §. 141.

Untersuchung 12.

Es sei U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x . . . w, y, z, v gebildeter Ausdruck, und man sucht für y, z und v solche reelle Functionen von x w, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird,

während eben diese für y, z, v gesuchten Functionen solche zusammengehörigen sein sollen, dass nicht nur

1) ein Ausdruck F′(x w, y, z, v) immer einer und derselben aber nichtgegebenen Function von x w gleich bleibt, oder immer einerlei aber einen nichtgegebenen constanten Werth behält; sondern dass auch noch gleichzeitig

2) ein anderer Ausdruck F″(x w, y, z, v) immer einer und derselben aber nichtgegebenen Function von x w gleich bleibt, oder immer einerlei aber einen nichtgegebenen constanten Werth behält.

§. 144. Man setze nach dem Vorgange der siebenten, neunten und elften Untersuchung

$$F'(x \ldots w, y, z, v) = m' \text{ und } F''(x \ldots w, y, z, v) = m''$$

oder

$$F'(x \ldots w, y, z, v) - m' = 0 \text{ und } F''(x \ldots w, y, z, v) - m'' = 0$$

Man erkennt, dass, wie dieses Problem gestellt ist, es gleichgiltig ist, welches der mutablen Elemente man als unmittelbar nimmt. Man nehme v als unmittelbar mutabel. Hier lässt sich für v eine bestimmte aus den Elementen x w, y, z gebildete Function auffinden, welche dargestellt sein mag durch

$$v = \chi(x \ldots w, y, z)$$

Die mittelbar mutablen Elemente y und z sind unbestimmt, d. h. man kann für sie jede beliebige Function von x w setzen. Hat man aber die gehörige Form für das Prüfungsmittel hergestellt, so wird sie im Allgemeinen auch die Elemente y und z enthalten, und diesen Umstand kann man noch dazu benützen, für y und z nur solche Functionen von x w zu wählen, bei welchen für das verschwindend kleine $\varkappa$ die Differenz $(U' + \Delta U) - U'$ beständig positiv oder negativ bleibt.

Wie zu verfahren ist, wenn die drei mutablen Elemente y, z, v nicht zugleich in der für U gegebenen Gleichung und in den beiden Ausdrücken F′(x w, y, z, v) und F″(x w, y, z, v) enthalten sind; darüber vergleiche man den Schluss des §. 141.

Es ist nun nicht mehr nöthig, diejenigen Untersuchungen vorzunehmen, wo vier und noch mehr mutable Elemente vorkommen. Das bisherige Verfahren lässt sich gradezu auf dergleichen Untersuchungen ausdehnen.

Untersuchung 13.

Es sind zwei Gleichungen F′(U, x ... w, y, z) = 0 und F″(U, x ... w, y, z) = 0 gegeben; und man soll für y und z solche reelle Functionen von x w aufsuchen, dass dabei U ein Maximum-stand oder ein Minimum-stand wird.

§. 145. Sowie hier die Aufgabe gestellt ist, ist es gleichgiltig, welches der Elemente y und z man als mittelbar mutabel nimmt. Man nehme y als mittelbar. Man stelle aus den zwei gegebenen Gleichungen eine neue her, woraus das y eliminirt ist, und welche durch

$$\text{I)} \quad \mathfrak{F}(U, x \ldots w, z) = 0$$

bezeichnet sein mag. Daraus folgt gradezu

$$\text{II)}\quad \frac{d_U\mathfrak{F}}{dU}\cdot\delta U+\frac{d_z\mathfrak{F}}{dz}\cdot\delta z=0$$

$$\text{III)}\quad \frac{d_U\mathfrak{F}}{dU}\cdot\delta^2U+\frac{d_z\mathfrak{F}}{dz}\cdot\delta^2z+\frac{d_z^2\mathfrak{F}}{dz^2}\cdot\delta z^2+2\cdot\frac{d_zd_U\mathfrak{F}}{dz\cdot dU}\cdot\delta z\cdot\delta U+\frac{d_U^2\mathfrak{F}}{dU^2}\cdot\delta U^2=0$$

etc. etc.

Aus II folgt gradezu

$$\text{IV)}\quad \delta U=-\left(\frac{d_z\mathfrak{F}}{dz}:\frac{d_U\mathfrak{F}}{dU}\right)\cdot\delta z$$

A) Man sehe nun zunächst zu, ob die Gleichung

$$\text{V)}\quad \frac{d_z\mathfrak{F}}{dz}:\frac{d_U\mathfrak{F}}{dU}=0$$

möglich ist, verbinde sie mit den zwei ursprünglichen, und suche für y, z und U diejenigen Functionen von x w, wodurch diese drei Gleichungen zugleich identisch werden; dass sie alle drei zugleich identisch werden, ist der Hauptpunkt etc. etc.

B) Hierauf sehe man auch noch zu, ob die Gleichung

$$\text{VI)}\quad \frac{d_z\mathfrak{F}}{dz}:\frac{d_U\mathfrak{F}}{dU}=\frac{\mathfrak{A}}{0}$$

möglich ist, verbinde sie mit den zwei ursprünglichen, und suche für y, z, U diejenigen Functionen von x w, wodurch auch diese drei Gleichungen zugleich identisch werden; dass sie alle drei zugleich identisch werden, ist der Hauptpunkt etc. etc.

§. 146. Man kann aber auch die ursprünglichen Gleichungen gradezu mutiren, so dass man

$$\text{VII)}\quad \frac{d_UF'}{dU}\cdot\delta U+\frac{d_yF'}{dy}\cdot\delta y+\frac{d_zF'}{dz}\cdot\delta z=0$$

$$\text{VIII)}\quad \frac{d_UF''}{dU}\cdot\delta U+\frac{d_yF''}{dy}\cdot\delta y+\frac{d_zF''}{dz}\cdot\delta z=0$$

bekommt. Aus diesen Gleichungen eliminire man δy, so gibt sich

$$\text{IX)}\quad \delta U=Z\cdot\delta z$$

A) Man sehe zu, ob die Gleichung $Z=0$ möglich ist, verbinde sie mit den ursprünglichen Gleichungen, und suche für y, z, U solche Functionen von x w, wodurch $Z=0$, $F'=0$ und $F''=0$ zugleich identisch werden.

B) Man sehe zu, ob auch $Z=\frac{\mathfrak{A}}{0}$ möglich ist, etc. etc.

Will man lieber die indirecte Multiplicatorenmethode anwenden, so kann man $F''=0$ mit einer vorerst noch unbekannten jedenfalls aber nichtmutablen Function $\mathfrak{M}$ von x w, multipliciren; dann ist auch noch das Product $\mathfrak{M}\cdot F''=0$ eine identische Gleichung. Dieses Product addire man zu $F'=0$, so ist auch noch

$$F'+\mathfrak{M}\cdot F''=0$$

eine identische Gleichung. Daraus gibt sich

$$\text{X)}\quad \left(\frac{d_UF'}{dU}+\mathfrak{M}\cdot\frac{d_UF''}{dU}\right)\cdot\delta U+\left(\frac{d_zF'}{dz}+\mathfrak{M}\cdot\frac{d_zF''}{dz}\right)\cdot\delta z$$

$$+\left(\frac{d_yF'}{dy}+\mathfrak{M}\cdot\frac{d_yF''}{dy}\right)\cdot\delta y=0$$

Nun soll diese Gleichung von dem mittelbaren δy frei sein; man denke sich also unter $\mathfrak{M}$ eine solche Function von x w, dass identisch stattfindet:

$$\text{XI)} \quad \frac{d_y F'}{dy} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_y F''}{dy} = 0$$

Gleichung X reducirt sich auf

$$\text{XII)} \quad \left(\frac{d_U F'}{dU} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_U F''}{dU}\right) \cdot \delta U + \left(\frac{d_z F'}{dz} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_z F''}{dz}\right) \cdot \delta z = 0$$

Und so fort.

Nun mögen solche Untersuchungen folgen, wo die nichtmutablen Veränderlichen noch Werthänderungen erleiden, d. h. Untersuchungen, wo gemischte Mutationen angewendet werden.

Untersuchung 14.

Es ist U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x und y gebildeter Ausdruck. Man sucht für y eine solche reelle Function von x, und zugleich für x einen solchen bestimmten reellen Werth, dass der dabei sich ergebende bestimmte reelle Werth des U grösser oder kleiner wird, als alle diesem bestimmten reellen Werthe des U nächstanliegenden Nachbarzustände, d. h. der gesuchte Werth des U soll ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes werden.

(Diese Untersuchung ist geometrisirt in den Aufgaben 2 und 4.)

§. 147. Wenn man irgend eine durch $\varphi(x)$ dargestellte reelle Function an die Stelle des y in die ursprüngliche Gleichung einsetzt; so bekommt man auch für U eine Function von x, welche mit $\psi(x)$ bezeichnet sein mag. Wenn man zugleich dem x einen festen reellen Werth beilegt, so bekommt auch U einen festen Werth, welcher mit U'' bezeichnet sein mag.

Die irgend einem Werthe des x nächstvorhergehenden und nächstnachfolgenden Nachbarwerthe werden im Allgemeinen dargestellt durch (x + Dx), wofür man (nach §. 76) auch schreiben kann

$$\text{I)} \quad x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Alle irgend einem Werthe der für y beliebig gewählten Function $\varphi(x)$ nächstvorangehenden und nächstnachfolgenden, sowohl aus dieser für y gewählten Function als auch aus allen nächstanliegenden Nachbarfunctionen hervorgehenden, Nachbarwerthe werden im Allgemeinen dargestellt durch

$$\text{II)} \quad \varphi(x) + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 y + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

wo, wie (aus §. 77) bekannt,

$$_{(}\delta_{)}y = \delta y + \frac{dy}{dx} \cdot \vartheta x$$

$$ {}_{(}\delta_{)}^2 y = \delta^2 y + 2 \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + \frac{dy}{dx} \cdot \vartheta^2 x $$

etc. etc.

ist. Indem man aber die Reihen I und II bezüglich an die Stelle des x und des y in die ursprüngliche Gleichung einsetzt; bekommt man die dem U'' nächstanliegenden gemischten Nachbarzustände, welche mit $(U'' + {}_{(}\Delta_{)}U)$ bezeichnet werden, und, wenn man sie in eine nach Potenzen des $\varkappa$ fortschreitende Reihe entwickeln will, nur in eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt werden dürfen. Wenn nun bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ die Differenz $(U'' + {}_{(}\Delta_{)}U) - U''$ beständig reell bleibt; so findet

1) ein Maximumwerth eines Maximum-standes statt, wenn diese Differenz beständig negativ ist; dagegen findet

2) ein Minimumwerth eines Minimum-standes statt, wenn diese Differenz beständig positiv ist; es findet aber

3) keiner von besagten zwei ausgezeichneten Werthen statt, wenn diese Differenz weder als positiv noch als negativ gelten kann.

§. 148. Um die Differenz $(U'' + {}_{(}\Delta_{)}U) - U''$ mit Bequemlichkeit herzustellen, setze man anfänglich nicht die ganzen Reihenformen I und II bezüglich an die Stelle des x und y in die ursprüngliche Gleichung ein; sondern man setze vorerst nur

$$ x + \varkappa \cdot \mathfrak{P} \text{ anstatt } x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x + \cdots\cdots $$

und

$$ \varphi(x) + \varkappa \cdot \Pi \text{ anstatt } \varphi(x) + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 y + \cdots\cdots $$

reducire soviel als möglich, und entwickle dann für $(U'' + {}_{(}\Delta_{)}U)$ die mit U'' anfangende und nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe. Ist dieses geschehen, so führe man in jedes einzelne Glied wieder

$$ \vartheta x + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x + \cdots\cdots \text{ an die Stelle des } \mathfrak{P} $$

und

$$ {}_{(}\delta_{)}y + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 y + \cdots\cdots \text{ an die Stelle des } \Pi $$

zurück, und reducire, nachdem man noch für ${}_{(}\delta_{)}y$, ${}_{(}\delta_{)}^2 y$, ${}_{(}\delta_{)}^3 y$, etc. die entsprechenden Ausdrücke gesetzt hat, abermals soviel als möglich.

Hat man die für ${}_{(}\Delta_{)}U$ hergestellte Reihe auf die einfachste Form gebracht; so hat man zu unterscheiden:

1) Das erste Glied dieser Reihe enthält gleichzeitig den Mutationscoefficienten δy und den Differenzcoefficienten ϑx. Hier hat man nur (nach §. 11—19) zu untersuchen, ob dieses erste Glied beständig einerlei Zeichen behält, und kein einziges wenn auch noch so spätes Glied aus irgend einem Grunde imaginär werden kann. Soll aber dieses erste Glied beständig einerlei Zeichen behalten, so muss namentlich der Exponent des $\varkappa$ eine ganze grade Zahl oder ein in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch mit gradem Zähler und ungradem Nenner sein.

2) Das erste Glied der für ${}_{(}\Delta_{)}U$ hergestellten Reihe enthält nur δy und nicht auch ϑx, sondern das ϑx kommt erst in einem spätern Gliede vor. Hier ist nicht genug, wenn das erste Glied das Zeichen nicht wechseln kann; sondern man bedenke, dass die dem U'' nächstanliegenden Nachbarzustände $(U'' + {}_{(}\Delta_{)}U)$ dadurch erzeugt werden, dass man dem x Werthänderungen beilegt, und dass man an die Stelle des y alle ihm nächstvorangehenden und nächstnachfolgenden, d. h. sowohl die aus der gewählten Function $\varphi(x)$ als auch die aus den dem $\varphi(x)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen hervorgehenden

Nachbarwerthe setzt. Setzt man einmal an die Stelle des y nur die durch Werthänderung des x aus $\varphi(x)$ sich ergebenden und dem $\varphi(x)$ nächstanliegenden Nachbarwerthe

$$\varphi\left(x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\right)$$

so ist dabei nur

$$(\delta_1)y = \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot \vartheta x$$

$$(\delta_1^2)y = \frac{d\varphi(x)}{dx} \cdot \vartheta^2 x + \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \cdot \vartheta x^2$$

etc. etc.

so dass dann die für $(\varDelta_1)U$ hergestellte Reihe nur noch die Differenzcoefficienten ϑx, $\vartheta^2 x$, etc. enthält. Hat man nun eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe für $(\varDelta_1)U$ hergestellt, und kommt erst in einem späteren Gliede das ϑx vor; hat man sich dann überzeugt, dass kein einziges wenn auch noch so spätes Glied aus irgend einem Grunde imaginär werden kann; und behält das erste Glied beständig einerlei Zeichen: so muss man noch zusehen, ob, wenn alle Mutationscoefficienten und alle davon abgeleiteten Differentialquotienten zu Null werden, dasjenige von den zurückbleibenden Gliedern, welches jetzt mit der niedrigsten Potenz des $\varkappa$ sowie auch mit ϑx versehen ist, mit dem (vorher vorhandenen nun aber weggefallenen) ersten Gliede einerlei und ein unwandelbares Zeichen behält. Nur unter dieser Bedingung kann ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes stattfinden (Man sehe Aufgabe 4).

3) Das erste Glied der für $(\varDelta_1)U$ hergestellten Reihe enthält nur ϑx und nicht auch δy, sondern das δy kommt erst in einem späteren Gliede vor. Auch hier ist nicht genug, wenn das erste Glied sein Zeichen nicht wechseln kann; sondern man bedenke, dass unter den dem U'' nächstanliegenden Nachbarzuständen auch diejenigen sich befinden, welche dadurch erzeugt werden, dass man an die Stelle des y nur

$$\varphi(x) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

setzt, während x unveränderlich bleibt, d. h. $\vartheta x = 0$, $\vartheta^2 x = 0$, etc. etc. ist. Hat man nun eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe für $(\varDelta_1)U$ hergestellt, und kommt erst in einem spätern Gliede das δy vor; hat man sich dann überzeugt, dass kein einziges wenn auch noch so spätes Glied aus irgend einem Grunde imaginär werden kann; und behält das erste Glied beständig einerlei Zeichen: so muss man auch zusehen, ob, wenn alle Differenzcoefficienten zu Null werden, dasjenige von den zurückbleibenden Gliedern, welches jetzt mit der niedrigsten Potenz des $\varkappa$ und mit δy versehen ist, mit dem (vorher vorhandenen nun aber weggefallenen) ersten Gliede einerlei und ein unwandelbares Zeichen behält. Nur unter dieser Bedingung kann ein Maximumwerth eines Maximumstandes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes stattfinden.

§. 149. Soll nun bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ die Differenz $(U'' + (\varDelta_1)U) - U''$ unter allen Umständen ihr Zeichen nicht wechseln können; so müssen (wie schon im vorigen §. erörtert ist) in der für $(\varDelta_1)U$ herzustellenden Reihe alle die verschiedenen Ausdrücke, welche möglicherweise das erste Glied werden können, einerlei und ein unwandelbares Zeichen haben; denn das Zeichen der Summe aller Glieder ist mit dem Zeichen des jedesmaligen ersten Gliedes einerlei. Wenn man also für $(\varDelta_1)U$ die nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt, so darf sich keineswegs die (in §. 79 aufgestellte) allgemeine Reihenform

$$(\varDelta_1)U = \varkappa \cdot (\delta_1)U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\delta_1^2)U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot (\delta_1^3)U + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

ergeben, wo

$$\text{III)}\ {}_{(}\delta_{)}U = \frac{d_yU}{dy}\cdot\delta y + \frac{dU}{dx}\cdot\vartheta x$$

$$\text{IV)}\ {}_{(}\delta_{)}^2U = \frac{d_yU}{dy}\cdot\delta^2 y + \frac{d_y^2U}{dy^2}\cdot\delta y^2 + 2\cdot\left(\frac{d\left(\frac{d_yU}{dy}\right)}{dx}\cdot\delta y + \frac{d_yU}{dy}\cdot\frac{d\delta y}{dx}\right)\cdot\vartheta x$$

$$+ \frac{d^2U}{dx^2}\cdot\vartheta x^2 + \frac{dU}{dx}\cdot\vartheta^2 x$$

etc. etc.

ist; denn hierbei würde das ${}_{(}\Delta_{)}U$ zugleich mit $\varkappa$ das Zeichen wechseln. Die für ${}_{(}\Delta_{)}U$ herzustellende Reihe darf aber, was man auch immer für Umstände eintreten lassen mag, weder mit $\varkappa\cdot\left(\frac{d_yU}{dy}\cdot\delta y + \frac{dU}{dx}\cdot\vartheta x\right)$, noch mit $\varkappa\cdot\frac{d_yU}{dy}\cdot\delta y$, noch mit $\varkappa\cdot\frac{dU}{dx}\cdot\vartheta x$ anfangen, während sowohl δy jede beliebige Function von x sein als auch ϑx jeden beliebigen Werth haben darf. Es können aber keine Umstände eintreffen, bei welchen die Reihe mit irgend einem dieser drei Ausdrücke anfängt, wenn eines von folgenden vier Systemen zweier Gleichungen stattfindet:

$$1)\ \frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{dU}{dx} = 0$$

$$2)\ \frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d}{dx} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

$$3)\ \frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{dU}{dx} = 0$$

$$4)\ \frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{dU}{dx} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

Das Praktische des Verfahrens ist nun:

A) Man sehe zu, ob schon identisch die Gleichung $\frac{d_yU}{dy} = 0$ möglich ist; diese dient dann dazu, die für y gesuchte Function $\varphi(x)$ zu bestimmen. Somit erkennt man, dass man für y ganz dieselbe Function bekommt, wie wenn x unveränderlich wäre. Nun ist $\frac{dU}{dx} = \frac{d_yU}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d_xU}{dx}$, welche Gleichung wegen $\frac{d_yU}{dy} = 0$ sich zurückzieht auf $\frac{dU}{dx} = \frac{d_xU}{dx}$, und man kann jetzt zusehen, ob $\frac{d_xU}{dx} = 0$ oder $\frac{d_xU}{dx} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$ oder ob beide Gleichungen zugleich möglich sind; keine von diesen beiden Gleichungen ist aber eine identische, und sie dienen nur dazu, den für x gesuchten Werth zu finden.

B) Man sehe auch zu, ob schon identisch die Gleichung $\frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ möglich ist. Diese liefert wieder eine Function von x. Man erkennt also wieder, dass sich für y die nemliche Function ergibt, wie wenn x unveränderlich wäre. Hat man aber für y eine Function von x gefunden, so bestimme man $\frac{dy}{dx}$, führe den dafür sich ergebenden Ausdruck in $\frac{dU}{dx} = \frac{d_yU}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d_xU}{dx}$ ein, und reducire soviel als möglich. Hierauf muss man zusehen, ob $\frac{dU}{dx} = 0$ oder $\frac{dU}{dx} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$ oder ob beide Gleichungen zugleich möglich sind; keine von diesen zwei Gleichungen ist aber eine identische, sondern sie dienen nur dazu, um den für x gesuchten Werth zu bestimmen. (Man sehe z. B. Aufgabe 3.)

§. 150. Diese (im vorigen §. aufgestellten) vier Systeme zweier Gleichungen sind die einzigen, aus welchen man für y solche Functionen von x, und für x solche spe-

ciellen Werthe entnehmen kann, bei denen möglicherweise ein Maximum-werth eines Maximum-standes, oder ein Minimum-werth eines Minimum-standes stattfindet, wovon man sich auf folgende Weise überzeugt:

1) Wenn keiner der Quotienten $\frac{d_yU}{dy}$ und $\frac{dU}{dx}$ zu Null werden oder Null in den Nenner bekommen kann, so ist $\varkappa \cdot \left(\frac{d_yU}{dy} \cdot \delta y + \frac{dU}{dx} \cdot \vartheta x\right)$ jedenfalls das erste Glied der für $(\Delta)U$ herzustellenden Reihe, wobei $(\Delta)U$ zugleich mit dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ das Zeichen wechselt.

2) Ist entweder $\frac{d_yU}{dy} = 0$ oder $\frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$, während weder $\frac{dU}{dx} = 0$ noch $\frac{dU}{dx} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$ ist; so kann in der für $(\Delta)U$ herzustellenden Reihe das Glied, welches unter den mit der Differenz des x behafteten das erste ist, kein anderes, als $\varkappa \cdot \frac{dU}{dx} \cdot \vartheta x$ sein. Nun sind unter den dem jedesmaligen Werthe des U″ nächstanliegenden Nachbarwerthen auch diejenigen begriffen, welche sich durch die alleinige Werthänderung des x ergeben, wobei $y = \varphi(x)$ übergeht in

$$\varphi\left(x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\right)$$

und $\delta y = 0$, $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$, etc., $\delta^2 y = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, $\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} = 0$, etc. etc. ist, so dass unter den Ausdrücken, welche jetzt zurückbleiben, $\varkappa \cdot \frac{dU}{dx} \cdot \vartheta x$ der erste ist, also jetzt $(\Delta)U$ mit $\varkappa$ sein Zeichen wechseln könnte.

3) Ist entweder $\frac{dU}{dx} = 0$ oder $\frac{dU}{dx} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$, während weder $\frac{d_yU}{dy} = 0$ noch $\frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ ist; so kann in der für $(\Delta)U$ herzustellenden Reihe das Glied, welches unter den mit der Mutation des y behafteten das erste ist, kein anderes als $\varkappa \cdot \frac{d_yU}{dy} \cdot \delta y$ sein. Nun sind unter den dem jedesmaligen Werthe des U″ nächstanliegenden Nachbarwerthen auch diejenigen begriffen, welche dadurch erzeugt werden, dass man an die Stelle des y nur

$$\varphi(x) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

setzt, während x keine Werthänderung erleidet, d. h. $\vartheta x = 0$, $\vartheta^2 x = 0$, $\vartheta^3 x = 0$ etc. ist, so dass unter den Ausdrücken, welche jetzt zurückbleiben, $\varkappa \cdot \frac{d_yU}{dy} \cdot \delta y$ der erste ist, also jetzt $(\Delta)U$ mit $\varkappa$ sein Zeichen wechseln könnte.

§. 151. Für den Fall, dass das erste System obiger Gleichungen zur Bestimmung der gesuchten Stücke genommen wird, und das Prüfungsmittel an dem Coefficienten $(\delta_r^2 U$ entnommen werden kann, mag folgendes Verfahren beachtet werden:

Weil $\frac{d_yU}{dy} = 0$ eine identische Gleichung ist, so ist auch

$$\text{V)} \quad \frac{d\left(\frac{d_yU}{dy}\right)}{dx} = 0$$

eine identische Gleichung; und weil auch $\frac{dU}{dx} = 0$ ist, so reducirt Gleichung IV sich auf

$$\text{VI)} \quad (\delta_r^2 U = \frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \delta y^2 + \frac{d^2 U}{dx^2} \cdot \vartheta x^2$$

Haben diese beiden Theilsätze zusammen unter allen Umständen einerlei Zeichen; so findet ein Maximum-werth eines Maximum-standes oder ein Minimum-werth eines Minimum-standes statt. Haben aber diese beiden Theilsätze entgegengesetzte Vorzeichen, so gibt der Theilsatz mit dem Mutationscoefficienten den primären Zustand an, und der Theilsatz mit dem Differenzcoefficienten gibt den secundären Zustand an, welche beide Zustände diesmal nicht miteinander übereinstimmen.

Der totale Differentialquotient $\frac{d^2U}{dx^2}$ lässt sich hier mit bedeutenden Abkürzungen gewinnen. Aus der Gleichung $\frac{dU}{dx} = \frac{d_yU}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_xU}{dx}$ folgt im Allgemeinen $\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_yU}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}\right) + \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_xU}{dx}\right)$. Der erste Theilsatz ist im hiesigen Falle identisch $= 0$, und somit bleibt nur

$$\text{VII)} \quad \frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d_x^2U}{dx^2} + \frac{d_xd_yU}{dx.dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Gleichung V lässt sich noch auf folgende Weise darstellen:

$$\text{VIII)} \quad \frac{d_xd_yU}{dx.dy} + \frac{d_y^2U}{dy^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Eliminirt man $\frac{dy}{dx}$ aus VII und VIII, so bekommt man

$$\text{IX)} \quad \frac{d^2U}{dx^2} = \left[\frac{d_x^2U}{dx^2} \times \frac{d_y^2U}{dy^2} - \left(\frac{d_xd_yU}{dx.dy}\right)^2\right] : \frac{d_y^2U}{dy^2}$$

Da hier die Mutationen von den Werthänderungen unabhängig sind, und umgekehrt; so kann man auch (s. den Schluss des §. 113) die hier gesuchten Resultate dadurch gewinnen, dass man die (in §. 112 beschriebenen) zwei successiven Geschäfte vornimmt, wobei man vorerst

1) für y eine bestimmte reelle Function von x aufsucht, den primären Zustand $U' = \psi(x)$ herstellt, und prüft. Hierauf sucht man

2) für x einen bestimmten Werth auf, stellt den secundären Zustand her, und prüft auch ihn.

Diese beiden successiven Geschäfte vorzunehmen, kann oft von praktischen Nutzen sein.

Untersuchung 15.

Es ist U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x, y, z gebildeter Ausdruck, wo y und z ganz unabhängig untereinander sind; und man sucht für y und z solche reelle Functionen von x, und zugleich für x einen solchen bestimmten reellen Werth, dass der dabei sich ergebende bestimmte reelle Werth des U grösser oder kleiner wird, als alle diesem bestimmten reellen Werthe des U nächstanliegenden Nachbarzustände, d. h. der gesuchte Werth des U soll ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes werden.

(Diese Untersuchung ist geometrisirt in Aufgabe 29.)

§. 152. Wenn man irgend zwei durch $\varphi'(x)$ und $\varphi''(x)$ dargestellte reelle Functionen bezüglich an die Stelle des y und des z in die ursprüngliche Gleichung einsetzt; so bekommt man auch für U eine Function von x, welche mit $\psi(x)$ bezeichnet sein mag. Wenn man zugleich dem x einen festen reellen Werth beilegt; so bekommt auch U einen festen Werth, welcher mit U'' bezeichnet sein mag.

Die dem U'' nächstanliegenden gemischten Nachbarzustände $(U'' + {}_{(}\varDelta_{)}U)$ bekommt man, wenn man (wie schon in §. 147 der vierzehnten Untersuchung)

$$\text{I)}\quad x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \cdots\cdots \text{ an die Stelle des } x,$$

$$\text{II)}\quad \varphi'(x) + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \cdots\cdots \text{ an die Stelle des } y,$$

$$\text{III)}\quad \varphi''(x) + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 z + \cdots\cdots \text{ an die Stelle des } z,$$

in die ursprüngliche Gleichung überall einsetzt. Hier ist bekanntlich

$$ {}_{(}\delta_{)}y = \delta y + \frac{dy}{dx} \cdot \vartheta x$$

$$ {}_{(}\delta_{)}z = \delta z + \frac{dz}{dx} \cdot \vartheta x$$

etc. etc.

§. 153. Wenn nun bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ die Differenz $(U'' + {}_{(}\varDelta_{)}U) - U''$ unter allen Umständen ihr Zeichen nicht soll wechseln können, so darf sich keineswegs die (in §. 80 aufgestellte) allgemeine Reihenform

$$ {}_{(}\varDelta_{)}U = \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}U + \frac{\varkappa^2}{1,2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 U + \cdots\cdots$$

ergeben, wo bekanntlich

$$\text{IV)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_z U}{dz} \cdot \delta z + \frac{dU}{dx} \cdot \vartheta x$$

etc. etc.

ist; denn hierbei würde das ${}_{(}\varDelta_{)}U$ zugleich mit $\varkappa$ das Zeichen wechseln. Wenn also keinerlei Umstände sollen eintreffen dürfen, wobei die für ${}_{(}\varDelta_{)}U$ herzustellende Reihe mit einem Gliede anfängt, dessen Zeichen von dem des $\varkappa$ abhängig ist; so muss eines von folgenden acht Systemen dreier Gleichungen stattfinden:

$$1)\quad \frac{d_y U}{dy} = 0,\quad \frac{d_z U}{dz} = 0,\quad \frac{dU}{dx} = 0$$

$$2)\quad \frac{d_y U}{dy} = 0,\quad \frac{d_z U}{dz} = 0,\quad \frac{dU}{dx} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

$$3)\quad \frac{d_y U}{dy} = 0,\quad \frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0},\quad \frac{dU}{dx} = 0$$

$$4)\quad \frac{d_y U}{dy} = 0,\quad \frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0},\quad \frac{dU}{dx} = \frac{\mathfrak{C}}{0}.$$

$$5)\quad \frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0},\quad \frac{d_z U}{dz} = 0,\quad \frac{dU}{dx} = 0$$

$$6)\quad \frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0},\quad \frac{d_z U}{dz} = 0,\quad \frac{dU}{dx} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

$$7)\quad \frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0},\quad \frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0},\quad \frac{dU}{dx} = 0$$

$$8)\quad \frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0},\quad \frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0},\quad \frac{dU}{dx} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

Die Gleichungen $\frac{d_y U}{dy} = 0$, $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$, $\frac{d_z U}{dz} = 0$, $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$ müssen für jeden beliebi-

gen Werth des x gelten, und liefern die für y und z gesuchten Functionen von x; somit erkennt man auch, dass sich für y und z ganz dieselben Functionen ergeben, wie wenn x unveränderlich gewesen wäre. Die Gleichungen $\frac{dU}{dx} = 0$ und $\frac{dU}{dx} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$ gelten nicht für jeden Werth des x, und dienen auch nur zur Bestimmung des für x gesuchten Werthes.

Dass nicht mehr und nicht weniger, als diese acht Systeme dreier Gleichugen stattfinden können, bei denen möglicher Weise ein Maximumwerth eines Maximumstandes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes existirt; darüber braucht jetzt der Beweis nicht mehr geführt zu werden, da er sich (nach Analogie der §§. 124 und 150) leicht führen lässt.

§. 154. In dem Falle, dass das erste System obiger Gleichungen zur Bestimmung der gesuchten Stücke genommen wird, und das Prüfungsmittel an dem Coefficienten ${}_{(\delta)}{}^2U$ entnommen werden kann, sind bedeutende Abkürzungen möglich. Da nemlich die Gleichungen $\frac{d_yU}{dy} = 0$ und $\frac{d_zU}{dz} = 0$ identische sind, so sind auch $\frac{d\left(\frac{d_yU}{dy}\right)}{dx} = 0$ und $\frac{d\left(\frac{d_zU}{dz}\right)}{dx} = 0$ identische Gleichungen, d. h. man bekommt bezüglich

$$\text{V)}\quad \frac{d_xd_yU}{dx.dy} + \frac{d_y^2U}{dy^2}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d_yd_zU}{dy.dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 0$$

$$\text{VI)}\quad \frac{d_xd_zU}{dx.dz} + \frac{d_yd_zU}{dy.dz}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d_z^2U}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dx} = 0$$

Ferner ist $\frac{d\delta U}{dx} = \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_yU}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_zU}{dz}\cdot\delta z\right)$; da aber $\frac{d_yU}{dy} = 0$ und $\frac{d_zU}{dz} = 0$ identische Gleichungen sind, so ist auch $\frac{d\delta U}{dx} = 0$ eine identische Gleichung. Ausser diesen identischen Gleichungen hat man noch die nichtidentische $\frac{dU}{dx} = 0$. Nun ist im Allgemeinen

$${}_{(\delta)}{}^2U = \delta^2U + 2\cdot\frac{d\delta U}{dx}\cdot\vartheta x + \frac{d^2U}{dx^2}\cdot\vartheta x^2 + \frac{dU}{dx}\cdot\vartheta^2 x$$

In Folge alles Vorhergehenden bleibt aber nur

$$\text{VII)}\quad {}_{(\delta)}{}^2U = \frac{d_y^2U}{dy^2}\cdot\delta y^2 + 2\cdot\frac{d_yd_zU}{dy.dz}\cdot\delta y\cdot\delta z + \frac{d_z^2U}{dz^2}\cdot dz^2 + \frac{d^2U}{dx^2}\cdot\vartheta x^2$$

Hat das Aggregat der drei mit Mutationscoefficienten versehenen Theilsätze ein unwandelbares und dasselbe Zeichen wie der mit dem Differenzcoefficienten versehene Theilsatz; so kann ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes stattfinden. Hat aber das Aggregat der drei mit Mutationscoefficienten versehenen Theilsätze wohl ein unwandelbares Zeichen, aber nicht dasselbe, wie der mit dem Differenzcoefficienten versehene Theilsatz; so stimmt der primäre Zustand nicht mit dem secundären überein.

Nun ist $\frac{dU}{dx} = \frac{d_yU}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d_zU}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{d_xU}{dx}$; also ist $\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_yU}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right) + \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_zU}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right) + \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_xU}{dx}\right)$ Die zwei ersten Theilsätze sind aber, wie gesagt, identisch Null; und sonach ist nur $\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_xU}{dx}\right)$, d. h. es ist

$$\text{VIII)}\quad \frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d_x^2U}{dx^2} + \frac{d_yd_xU}{dy.dx} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_zd_xU}{dz.dx} \cdot \frac{dz}{dx}$$

aus welcher Gleichung man noch $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ zu eliminiren hat, was mittelst der Gleichungen V und VI geschieht. (Man sehe §. 151 Gleichung IX, und §. 158 Gleichung XIX bis XXII).

§. 155. In dem Falle, wo sich die für y und z gesuchten Functionen dadurch ergeben, dass man entweder $\frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$, oder $\frac{d_zU}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$, oder dass man diese beiden Gleichungen zugleich benützt, hat man alsogleich die Ausdrücke $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ zu bestimmen, und in

$$\frac{dU}{dx} = \frac{d_xU}{dx} + \frac{d_yU}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_zU}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

einzuführen. Hierauf reducirt man soviel als möglich; und man wird erkennen, ob $\frac{dU}{dx} = 0$ oder $\frac{dU}{dx} = \frac{\mathfrak{D}}{0}$, oder ob beide Gleichungen zugleich möglich sind.

Da hier die Mutationen von den Werthänderungen unabhängig sind, und umgekehrt; so kann man auch (s. den Schluss des §. 113) die hier gesuchten Resultate dadurch gewinnen, dass man die (in §. 112 beschriebenen) zwei successiven Geschäfte vornimmt, wobei man vorerst

1) für y und z bestimmte reelle Functionen von x aufsucht, den primären Zustand $U' = \psi(x)$ herstellt, und prüft. Hierauf sucht man

2) für x einen bestimmten Werth auf, stellt den secundären Zustand U'' her, und prüft auch ihn.

Diese beiden successiven Geschäfte vorzunehmen, kann oft von praktischem Nutzen sein.

Untersuchung 16.

Es ist U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x, w, y gebildeter Ausdruck, wo x und w ganz unabhängig voneinander sind. Man soll für y eine solche reelle Function von x und w, und zugleich für x und w solche bestimmte reelle Werthe aufsuchen, dass der dabei sich ergebende bestimmte reelle Werth des U grösser oder kleiner wird, als alle diesem bestimmten reellen Werthe des U nächstanliegenden Nachbarzustände, d. h. der gesuchte Werth des U soll ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes werden.

(Diese Untersuchung ist geometrisirt in den Aufgaben 16 und 30.)

§. 156. Wenn man irgend eine durch $\varphi(x, w)$ dargestellte reelle Function an die Stelle des y in die ursprüngliche Gleichung einsetzt; so bekommt man auch für U eine Function von x und w, welche mit $\psi(x, w)$ bezeichnet sein mag. Wenn man zugleich dem x und dem w feste reelle Werthe beilegt; so bekommt U auch einen festen Werth, welcher mit U'' bezeichnet sein mag.

Die dem U'' nächstanliegenden gemischten Nachbarzustände $(U'' + (\Delta)U)$ bekommt man, wenn man

$$\text{I)}\quad x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \text{ an die Stelle des } x,$$

$$\text{II)}\quad w + \varkappa \cdot \vartheta w + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 w + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \text{ an die Stelle des } w,$$

$$\text{III)}\quad \varphi(x, w) + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \ldots\ldots$$ an die Stelle des y

in die ursprüngliche Gleichung überall einsetzt. Hier ist bekanntlich

$${}_{(}\delta_{)}y = \delta y + \frac{d_x y}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d_w y}{dw} \cdot \vartheta w$$

$${}_{(}\delta_{)}^2 y = \delta^2 y + 2 \cdot \frac{d_x \delta y}{dx} \cdot \vartheta x + 2 \cdot \frac{d_w \delta y}{dw} \cdot \vartheta w + \frac{d_x y}{dx} \cdot \vartheta^2 x + \frac{d_w y}{dw} \cdot \vartheta^2 w$$
$$+ \frac{d_x^2 y}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + 2 \cdot \frac{d_x d_w y}{dx.dw} \cdot \vartheta x \cdot \vartheta w + \frac{d_w^2 y}{dw^2} \cdot \vartheta w^2$$

etc. etc.

§. 157. Wenn nun bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ die Differenz $(U'' + {}_{(}\Delta_{)}U) - U''$ unter allen Umständen ihr Zeichen nicht soll wechseln können, so darf sich keineswegs die (in §. 81 aufgestellte) allgemeine Reihenform

$${}_{(}\Delta_{)}U = \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 U + \ldots\ldots$$

ergeben, wo bekanntlich

$$\text{IV)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_x U}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d_w U}{dw} \cdot \vartheta w$$

$$\text{V)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2 U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_x \delta U}{dx} \cdot \vartheta x + 2 \cdot \frac{d_w \delta U}{dw} \cdot \vartheta w$$
$$+ \frac{d_x^2 U}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + 2 \cdot \frac{d_x d_w U}{dx.dw} \cdot \vartheta x \cdot \vartheta w + \frac{d_w^2 U}{dw^2} \cdot \vartheta w^2 + \frac{d_x U}{dx} \cdot \vartheta^2 x + \frac{d_w U}{dw} \cdot \vartheta^2 w$$

etc. etc.

ist; denn hierbei würde das ${}_{(}\Delta_{)}U$ zugleich mit $\varkappa$ sein Zeichen wechseln. Wenn also keinerlei Umstände sollen eintreffen dürfen, wobei die für ${}_{(}\Delta_{)}U$ herzustellende Reihe ein erstes Glied hat, dessen Zeichen von dem des $\varkappa$ abhängig ist; so muss eines von folgenden acht Systemen dreier Gleichungen stattfinden:

$$1)\quad \frac{d_y U}{dy} = 0,\ \frac{d_x U}{dx} = 0,\ \frac{d_w U}{dw} = 0$$

$$2)\quad \frac{d_y U}{dy} = 0,\ \frac{d_x U}{dx} = 0,\ \frac{d_w U}{dw} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

$$3)\quad \frac{d_y U}{dy} = 0,\ \frac{d_x U}{dx} = \frac{\mathfrak{B}}{0},\ \frac{d_w U}{dw} = 0$$

$$4)\quad \frac{d_y U}{dy} = 0,\ \frac{d_x U}{dx} = \frac{\mathfrak{B}}{0},\ \frac{d_w U}{dw} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

$$5)\quad \frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0},\ \frac{d_x U}{dx} = 0,\ \frac{d_w U}{dw} = 0$$

$$6)\quad \frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0},\ \frac{d_x U}{dx} = 0,\ \frac{d_w U}{dw} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

$$7)\quad \frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0},\ \frac{d_x U}{dx} = \frac{\mathfrak{B}}{0},\ \frac{d_w U}{dw} = 0$$

$$8)\quad \frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0},\ \frac{d_x U}{dx} = \frac{\mathfrak{B}}{0},\ \frac{d_w U}{dw} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

Das Praktische des Verfahrens ist nun:

A) Man sehe zu, ob schon identisch die Gleichung $\frac{d_y U}{dy} = 0$ möglich ist; diese gilt für jeden Werth des x und des w, und dient dazu, die für y gesuchte Function $\varphi(x, w)$ zu bestimmen. Somit erkennt man, dass man für y ganz dieselbe Function bekommt, wie wenn x und w unveränderlich wären. Nun ist (nach §. 4) $\frac{d_x U}{dx} = \frac{d_y U}{dy} \cdot \frac{d_x y}{dx} + \frac{d_x U}{dx}$ und $\frac{d_w U}{dw} = \frac{d_y U}{dy} \cdot \frac{d_w y}{dw} + \frac{d_w U}{dw}$, welche Gleichungen sich aber unter den jetzigen Umständen zurückziehen auf $\frac{d_x U}{dx} = \frac{d_x U}{dx}$ und auf $\frac{d_w U}{dw} = \frac{d_w U}{dw}$; und man hat zu untersuchen, welches von folgenden vier Systemen zweier Gleichungen

$$\frac{d_x U}{dx} = 0, \quad \frac{d_w U}{dw} = 0$$

$$\frac{d_x U}{dx} = 0, \quad \frac{d_w U}{dw} = \frac{\mathfrak{E}}{0}$$

$$\frac{d_x U}{dx} = \frac{\mathfrak{D}}{0}, \quad \frac{d_w U}{dw} = 0.$$

$$\frac{d_x U}{dx} = \frac{\mathfrak{D}}{0}, \quad \frac{d_w U}{dw} = \frac{\mathfrak{E}}{0}$$

möglich ist. Letztere Gleichungen sind aber durchaus keine identischen, sondern dienen nur dazu, die bestimmten Werthe von x und w aufzusuchen.

B) Hierauf sehe man zu, ob auch schon identisch die Gleichung $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ möglich ist. Diese Gleichung gilt wieder für jeden Werth des x und des w, und dient dazu, eine für y gesuchte Function $\varphi(x, w)$ zu bestimmen. Man erkennt also wieder, dass man dieselbe Function bekommt, wie wenn x und w unveränderlich wären. Hat man aber $y = \varphi(x, w)$ gefunden, so führe man die sich für $\frac{d_x y}{dx}$ und für $\frac{d_w y}{dw}$ ergebenden Ausdrücke in

$$\frac{d_x U}{dx} = \frac{d_y U}{dy} \cdot \frac{d_x y}{dx} + \frac{d_x U}{dx} \text{ und } \frac{d_w U}{dw} = \frac{d_y U}{dy} \cdot \frac{d_w y}{dw} + \frac{d_w U}{dw}$$

ein, reducire soviel als möglich, und untersuche dann, welches von folgenden vier Systemen zweier Gleichungen

$$\frac{d_x U}{dx} = 0, \quad \frac{d_w U}{dw} = 0$$

$$\frac{d_x U}{dx} = 0, \quad \frac{d_w U}{dw} = \frac{\mathfrak{G}}{0}$$

$$\frac{d_x U}{dx} = \frac{\mathfrak{F}}{0}, \quad \frac{d_w U}{dw} = 0$$

$$\frac{d_x U}{dx} = \frac{\mathfrak{F}}{0}, \quad \frac{d_w U}{dw} = \frac{\mathfrak{G}}{0}$$

stattfinden kann. Letztere Gleichungen sind aber durchaus keine identischen, sondern dienen nur dazu, die bestimmten Werthe des x und w aufzusuchen.

Dass nicht mehr und nicht weniger als obige acht Systeme dreier Gleichungen stattfinden können, bei denen möglicherweise ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes existirt; darüber kann der Beweis nach Analogie der §§. 124 und 150 geführt werden.

§. 158. Für den Fall, dass das erste System obiger Gleichungen

$$\frac{d_yU}{dy} = 0, \quad \frac{d_xU}{dx} = 0, \quad \frac{d_wU}{dw} = 0$$

zur Bestimmung der gesuchten Stücke genommen wird, und man das Prüfungsmittel an dem Coefficienten $(\delta)^2U$ gewinnen kann, beachte man folgendes Verfahren:

Weil $\delta U = \frac{d_yU}{dy} \cdot \delta y$, so ist

$$\text{VI)} \quad \frac{d_x\delta U}{dx} = \delta y \cdot \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_yU}{dy}\right) + \frac{d_yU}{dy} \cdot \frac{d_x\delta y}{dx}$$

$$\text{VII)} \quad \frac{d_w\delta U}{dw} = \delta y \cdot \frac{1}{dw} \cdot d_w\left(\frac{d_yU}{dy}\right) + \frac{d_yU}{dy} \cdot \frac{d_w\delta y}{dw}$$

Da aber $\frac{d_yU}{dy} = 0$ bei jedem Werthe des x und des w identisch wird, so ist auch $\frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_yU}{dy}\right) = 0$ und $\frac{1}{dw} \cdot d_w\left(\frac{d_yU}{dy}\right) = 0$ bei jedem Werthe des x und des w. Ferner ist $\frac{d_xU}{dx} = 0$ und $\frac{d_wU}{dw} = 0$, wie im Anfange dieses §. vorausgesetzt ist; und somit reducirt sich Gleichung V auf

$$\text{VIII)} \quad (\delta)^2U = \frac{d_y^2U}{dy^2} \cdot \delta y^2 + \frac{d_x^2U}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + 2 \cdot \frac{d_xd_wU}{dx \,.\, dw} \cdot \vartheta x \cdot \vartheta w + \frac{d_w^2U}{dw^2} \cdot \vartheta w^2$$

Hat nun der erste mit einem Mutationscoefficienten versehene Theilsatz dasselbe unwandelbare Zeichen, wie das Aggregat der drei mit Differenzcoefficienten versehenen Theilsätze; so kann ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes stattfinden. Hat aber der erste Theilsatz nicht dasselbe Zeichen, wie das Aggregat der drei letzten; so stimmt der primäre Zustand nicht mit dem secundären überein.

Bei Herstellung der drei letzten Theilsätze lassen sich bedeutende Abkürzungen anbringen:

Aus Gleichung $\frac{d_xU}{dx} = \frac{d_xU}{dx} + \frac{d_yU}{dy} \cdot \frac{d_xy}{dx}$ folgt im Allgemeinen

$$\text{IX)} \quad \frac{d_x^2U}{dx^2} = \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_xU}{dx}\right) + \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_yU}{dy} \cdot \frac{d_xy}{dy}\right)$$

und

$$\text{X)} \quad \frac{d_wd_xU}{dw.dx} = \frac{1}{dw} \cdot d_w\left(\frac{d_xU}{dx}\right) + \frac{1}{dw} \cdot d_w\left(\frac{d_yU}{dy} \cdot \frac{d_xy}{dx}\right)$$

Ferner aus Gleichung $\frac{d_wU}{dw} = \frac{d_wU}{dw} + \frac{d_yU}{dy} \cdot \frac{d_wy}{dw}$ folgt im Allgemeinen

$$\text{XI)} \quad \frac{d_xd_wU}{dx \,.\, dw} = \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_wU}{dw}\right) + \frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_yU}{dy} \cdot \frac{d_wy}{dw}\right)$$

und

$$\text{XII)} \quad \frac{d_w^2U}{dw^2} = \frac{1}{dw} \cdot d_w\left(\frac{d_wU}{dw}\right) + \frac{1}{dw} \cdot d_w\left(\frac{d_yU}{dy} \cdot \frac{d_wy}{dw}\right)$$

Weil aber, wie schon bewiesen, $\frac{1}{dx} \cdot d_x\left(\frac{d_yU}{dy}\right) = 0$ und $\frac{1}{dw} \cdot d_w\left(\frac{d_yU}{dy}\right) = 0$ identische Gleichungen sind; so ziehen sich IX, X, XI, XII zurück auf

$$\text{XIII)}\quad \frac{d_x^2U}{dx^2} = \frac{1}{dx}\cdot d_x\left(\frac{d_xU}{dx}\right) = \frac{d_x^2U}{dx^2} + \frac{d_xd_yU}{dx.dy}\cdot\frac{d_xy}{dx}$$

$$\text{XIV)}\quad \frac{d_wd_xU}{dw.dx} = \frac{1}{dw}\cdot d_w\left(\frac{d_xU}{dx}\right) = \frac{d_xd_wU}{dx\,dw} + \frac{d_xd_yU}{dx.dy}\cdot\frac{d_wy}{dw}$$

$$\text{XV)}\quad \frac{d_xd_wU}{dx.dw} = \frac{1}{dx}\cdot d_x\left(\frac{d_wU}{dw}\right) = \frac{d_xd_wU}{dx.dw} + \frac{d_wd_yU}{dw.dy}\cdot\frac{d_xy}{dx}$$

$$\text{XVI)}\quad \frac{d_w^2U}{dw^2} = \frac{1}{dw}\cdot d_w\left(\frac{d_wU}{dw}\right) = \frac{d_w^2U}{dw^2} + \frac{d_wd_yU}{dw.dy}\cdot\frac{d_wy}{dw}$$

Die Gleichungen $\frac{1}{dx}\cdot d_x\left(\frac{d_yU}{dy}\right) = 0$ und $\frac{1}{dw}\cdot d_w\left(\frac{d_yU}{dy}\right) = 0$ lassen sich aber auch auf folgende Weise darstellen

$$\text{XVII)}\quad \frac{d_xd_yU}{dx.dy} + \frac{d_y^2U}{dy^2}\cdot\frac{d_xy}{dx} = 0$$

$$\text{XVIII)}\quad \frac{d_wd_yU}{dw.dy} + \frac{d_y^2U}{dy^2}\cdot\frac{d_wy}{dw} = 0$$

Daraus lassen sich $\frac{d_xy}{dx}$ und $\frac{d_wy}{dw}$ bestimmen, und die vier Gleichungen XIII, XIV, XV, XVI gehen bezüglich über in

$$\text{XIX)}\quad \frac{d_x^2U}{dx^2} = \left[\frac{d_x^2U}{dx^2}\times\frac{d_y^2U}{dy^2} - \left(\frac{d_xd_yU}{dx.dy}\right)^2\right] : \frac{d_y^2U}{dy^2}$$

$$\text{XX)}\quad \frac{d_wd_xU}{dw\,.\,dx} = \left[\frac{d_wd_xU}{dw.\,dx}\times\frac{d_y^2U}{dy^2} - \frac{d_xd_yU}{dx\,.\,dy}\times\frac{d_wd_yU}{dw\,.\,dy}\right] : \frac{d_y^2U}{dy^2}$$

$$\text{XXI)}\quad \frac{d_xd_wU}{dx.dw} = \left[\frac{d_wd_xU}{dx\,.\,dw}\times\frac{d_y^2U}{dy^2} - \frac{d_xd_yU}{dx\,.\,dy}\times\frac{d_wd_yU}{dw\,.\,dy}\right] : \frac{d_y^2U}{dy^2}$$

$$\text{XXII)}\quad \frac{d_w^2U}{dw^2} = \left[\frac{d_w^2U}{dw^2}\times\frac{d_y^2U}{dy^2} - \left(\frac{d_wd_yU}{dw\,.\,dy}\right)^2\right] : \frac{d_y^2U}{dy^2}$$

Diese vier Ausdrücke sind merkwürdig wegen ihrer Symmetrie.

Die Gleichungen XX und XXI sind einander ganz gleich, wie sein muss.

Da hier die Mutationen von den Werthänderungen unabhängig sind, und umgekehrt; so kann man auch (s. den Schluss des §. 113) die hier gesuchten Resultate dadurch gewinnen, dass man die (in §. 112 beschriebenen) zwei successiven Geschäfte vornimmt, wobei man vorerst

1) für y eine bestimmte reelle Function von x und w aufsucht, den primären Zustand $U' = \psi(x, w)$ herstellt, und prüft. Hierauf sucht man

2) für x und w bestimmte Werthe auf, stellt den secundären Zustand U″ her, und prüft auch ihn.

Diese beiden successiven Geschäfte vorzunehmen, kann oft von praktischem Nutzen sein.

Untersuchung 17.

Es ist U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x, w, y gebildeter Ausdruck, wo x und w in einer durch die Gleichung $F(x, w) = 0$ gegebenen Abhängigkeit stehen. Man sucht für y eine solche reelle Function entweder von x oder von w, und zugleich für x und w solche reelle Werthe, dass dadurch

nicht nur die Gleichung $F(x, w) = 0$ erfüllt, sondern auch der bestimmte Werth des U selbst grösser oder kleiner wird, als alle diesem bestimmten Werthe des U nächstanliegenden Nachbarzustände, d. h. U soll ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes werden.

§. 159. Man nehme von den beiden nichtmutablen Elementen x und w das w als abhängig, und sondere w aus $F(x, w) = 0$ ab, so dass man z. B. $w = f(x)$ bekommt. Hierauf führe man $f(x)$ an die Stelle des w in die für U gegebene Gleichung ein, so ist diese Untersuchung auf die vierzehnte zurückgeführt, d. h. man kann jetzt ohneweiters für y die gesuchte Function von x, und für x den gesuchten Werth bestimmen. Zuletzt führe man noch den für x gefundenen Werth in $F(x, w) = 0$ ein, so ergibt sich auch der entsprechende Werth des w.

Man kann aber auch auf folgende Weise verfahren: Es ist $\vartheta w = \frac{dw}{dx} \cdot \vartheta x$, $\vartheta^2 w = \frac{d^2w}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + \frac{dw}{dx} \cdot \vartheta^2 x$, etc. Diese Ausdrücke führe man in die Gleichungen IV und V des §. 157 ein, so bekommt man im Allgemeinen

$$\text{I)}\quad {}_{(\delta)}U = \frac{d_yU}{dy} \cdot \delta y + \left(\frac{d_xU}{dx} + \frac{d_wU}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}\right) \cdot \vartheta x$$

$$\text{II)}\quad {}_{(\delta)}^2U = \frac{d_yU}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_y^2U}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \left(\frac{d_x\delta U}{dx} + \frac{d_w\delta U}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}\right) \cdot \vartheta x$$
$$+ \left(\frac{d_x^2U}{dx^2} + 2 \cdot \frac{d_xd_wU}{dx \,.\, dw} \cdot \frac{dw}{dx} + \frac{d_w^2U}{dw^2} \cdot \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \frac{d_wU}{dw} \cdot \frac{d^2w}{dx^2}\right) \cdot \vartheta x^2$$
$$+ \left(\frac{d_xU}{dx} + \frac{d_wU}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}\right) \cdot \vartheta^2 x$$

Die Differentialquotienten $\frac{dw}{dx}$, $\frac{d^2w}{dx^2}$, etc. werden aus der Gleichung $F(x, w) = 0$ bestimmt. Wie man mit der Zerlegung der Gleichung I zu verfahren hat, ist bekannt. In dem Falle, wo $\frac{d_yU}{dy} = 0$ ist, ist, wie man an den Gleichungen VI und VII des §. 158 ersehen kann, sowohl $\frac{d_x\delta U}{dx} = 0$ als auch $\frac{d_w\delta U}{dw} = 0$ etc. etc.

Man kann aber auch auf folgende Weise verfahren:
Aus $F(x, w) = 0$ folgt

$$\text{III)}\quad \frac{d_xF}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d_wF}{dw} \cdot \vartheta w = 0$$

$$\text{IV)}\quad \frac{d_xF}{dx} \cdot \vartheta^2 x + \frac{d_wF}{dw} \cdot \vartheta^2 w + \frac{d_x^2F}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + 2 \cdot \frac{d_xd_wF}{dx \,.\, dw} \cdot \vartheta x \cdot \vartheta w + \frac{d_w^2F}{dw^2} \cdot \vartheta w^2 = 0$$

Man multiplicire Gleichung III mit einem constanten Ausdrucke C, und addire dieses Product zu Gleichung IV des §. 157; so ist noch vollkommen genau

$$\text{V)}\quad {}_{(\delta)}U = \frac{d_yU}{dy} \cdot \delta y + \left(\frac{d_xU}{dx} + C \cdot \frac{d_xF}{dx}\right) \cdot \vartheta x + \left(\frac{d_wU}{dw} + C \cdot \frac{d_wF}{dw}\right) \cdot \vartheta w$$

Nun soll der für ${}_{(\delta)}U$ herzustellende Ausdruck von dem abhängigen ϑw befreit sein; man denke sich also unter dem constanten Werthe des C einen solchen, dass die Gleichung

$$\text{VI)}\quad \frac{d_wU}{dw} + C \cdot \frac{d_wF}{dw} = 0$$

stattfindet. Diese Gleichung ist aber durchaus keine identische, sondern gilt nur für

die grade gesuchten Werthe des x und w, und dient dazu, den constanten Werth des C zu ermitteln. In Folge der Gleichung IV reducirt sich V auf

$$\text{VII)} \quad {}_{(\delta_i}U = \frac{d_yU}{dy} \cdot \delta y + \left(\frac{d_xU}{dx} + C \cdot \frac{d_xF}{dx}\right) \cdot \vartheta x$$

Alles Weitere ist bekannt.

Da hier die Mutationen von den Werthänderungen unabhängig sind, und umgekehrt, so gilt auch hier die Bemerkung, welche am Schlusse der §§. 151, 155 und 158 gemacht worden ist.

Untersuchung 18.

Es ist U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x, y, z gebildeter Ausdruck, wo y und z in einer durch die Gleichung F(x, y, z) = 0 gegebenen Abhängigkeit stehen. Man sucht nicht nur für y und z solche reelle Functionen von x, dass der Gleichung F(x, y, z) = 0 identisch genügt wird; sondern man sucht auch für x einen solchen reellen Werth, dass dabei der sich ergebende bestimmte Werth des U grösser oder kleiner wird, als alle diesem bestimmten Werthe des U nächstanliegenden Nachbarzustände, d. h. U soll ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes werden.

§. 160. Man nehme von den beiden mutablen Elementen y und z das y als mittelbar, und sondere y aus F(x, y, z) = 0 ab, so dass sich z. B. y = f(x, z) ergibt. Diesen Ausdruck führe man an die Stelle des y in die für U gegebene Gleichung ein, so ist die Untersuchung auf die vierzehnte zurückgeführt, d. h. man kann jetzt ohneweiters für z die gesuchte Function von x, und für x den gesuchten speciellen Werth bestimmen. Zuletzt führe man noch die für z gefundene Function in F(x, y, z) = 0 ein, so ergibt sich auch, was y für eine Function von x ist.

Man kann aber auch auf folgende Weise verfahren: Es ist

$$\text{I)} \quad {}_{(\delta_i}U = \frac{d_yU}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_zU}{dz} \cdot \delta z + \left(\frac{d_yU}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_zU}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{d_xU}{dx}\right) \cdot \vartheta x$$

Aus F(x, y, z) = 0 folgt ferner

$$\text{II)} \quad \frac{d_yF}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_zF}{dz} \cdot \delta z + \left(\frac{d_yF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_zF}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{d_xF}{dx}\right) \cdot \vartheta x = 0$$

Da nun F(x, y, z) = 0 keine andere als eine identische Gleichung von x ist, so muss, wie schon (in §. 83) vorkam, auch $\frac{dF}{dx} = 0$ eine identische Gleichung sein, d. h. es muss auch

$$\text{III)} \quad \frac{d_yF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_zF}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{d_xF}{dx} = 0$$

eine identische Gleichung sein, und somit bleibt von II nur noch die identische Gleichung

$$\text{IV)} \quad \frac{d_yF}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_zF}{dz} \cdot \delta z = 0$$

übrig. Eliminirt man das δy aus I, so gibt sich

$$\text{V)} \quad {}_{(\delta_i}U = \left[\left(- \frac{d_yU}{dy} \cdot \frac{d_zF}{dz} + \frac{d_zU}{dz} \cdot \frac{d_yF}{dy}\right) : \frac{d_yF}{dy}\right] \cdot \delta z$$
$$+ \left(\frac{d_yU}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_zU}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{d_xU}{dx}\right) \cdot \vartheta x$$

Der zu δz gehörige Coefficient gibt eine identische Gleichung, und liefert, mit $F(x, y, z) = 0$ verbunden, die für y und z gesuchten Functionen; und wenn man die sechste Untersuchung (§. 133 bis 135) vergleicht, so erkennt man, dass sich ganz dieselben Functionen ergeben, wie wenn x unveränderlich wäre. Der zu ϑx gehörige Coefficient liefert eine nichtidentische Gleichung, und gibt den für x gesuchten speciellen Werth. Alles Weitere ist bekannt.

Man kann aber auch auf folgende Weise verfahren:

Man multiplicire Gleichung II mit einer vorerst noch unbekannten jedenfalls aber nichtmutablen Function $\mathfrak{L}$ von x, und addire dieses Product zu I; so ist noch vollkommen genau

$$\text{VI)} \quad {}_{(\delta)}U = \left(\frac{d_yU}{dy} + \mathfrak{L} \cdot \frac{d_yF}{dy}\right) \cdot \delta y + \left(\frac{d_zU}{dz} + \mathfrak{L} \cdot \frac{d_zF}{dz}\right) \cdot \delta z$$

$$+ \left[\left(\frac{d_yU}{dy} + \mathfrak{L} \cdot \frac{d_yF}{dy}\right) \cdot \frac{dy}{dx} + \left(\frac{d_zU}{dz} + \mathfrak{L} \cdot \frac{d_zF}{dz}\right) \cdot \frac{dz}{dx} + \left(\frac{d_xU}{dx} + \mathfrak{L} \cdot \frac{d_xF}{dx}\right)\right] \cdot \vartheta x$$

Da aber dieser Ausdruck von dem mittelbaren δy frei sein soll, so denke man sich jetzt unter $\mathfrak{L}$ eine solche Function von x, dass die identische Gleichung

$$\text{VII)} \quad \frac{d_yU}{dy} + \mathfrak{L} \cdot \frac{d_yF}{dy} = 0$$

stattfindet, und Gleichung VI reducirt sich auf

$$\text{VIII)} \quad {}_{(\delta)}U = \left(\frac{d_zU}{dz} + \mathfrak{L} \cdot \frac{d_zF}{dz}\right) \cdot \delta z + \left[\left(\frac{d_zU}{dz} + \mathfrak{L} \cdot \frac{d_zF}{dz}\right) \cdot \frac{dz}{dx} + \left(\frac{d_xU}{dx} + \mathfrak{L} \cdot \frac{d_xF}{dx}\right)\right] \cdot \vartheta x$$

Der hier zu ϑx gehörige Factor enthält den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ nicht mehr. Diesen Quotienten hätte man auch aus Gleichung V eliminiren können, mittelst Gleichung III; und dadurch wären Gleichung V und VIII mehr conform geworden.

A) Will man dem zu δz gehörigen Factor die Form Null geben, so muss noch die identische Gleichung

$$\text{IX)} \quad \frac{d_zU}{dz} + \mathfrak{L} \cdot \frac{d_zF}{dz} = 0$$

stattfinden; und es bleibt nur ${}_{(\delta)}U = \left(\frac{d_xU}{dx} + \mathfrak{L} \cdot \frac{d_xF}{dx}\right) \cdot \vartheta x$ zurück. Man kann nun zusehen, ob der zu ϑx gehörige Factor zu Null wird, oder die Form $\frac{\mathfrak{B}}{0}$ annimmt; jedenfalls gibt aber der zu ϑx gehörige Factor keine identische Gleichung, und liefert den für x gesuchten speciellen Werth.

B) Will man aber dem in Gleichung VIII zu δz gehörigen Factor die Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ geben, so hat man vor Allem das $\mathfrak{L}$ zu eliminiren, was mittelt Gleichung VII geschieht. etc.

Da hier die Mutationen von den Werthänderungen unabhängig sind, und umgekehrt; so gilt auch hier die Bemerkung, welche am Schlusse der §§. 151, 155 und 158 gemacht worden ist.

Untersuchung 19.

Es ist U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x, y, z gebildeter Ausdruck, wo y und z solche zusammengehörige Functionen sein

sollen, dass irgend ein anderer Ausdruck F(x, y, z) entweder immer der nemlichen aber nichtgegebenen Function von x gleich bleibe, oder immer den nemlichen aber nichtgegebenen constanten Werth behalte. Man sucht für y und z solche reelle Functionen von x, und zugleich für x einen solchen bestimmten reellen Werth, dass der dabei sich für U ergebende bestimmte Werth grösser oder kleiner wird, als alle diesem bestimmten Werthe des U nächstanliegenden Nachbarzustände, d. h. U soll ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes werden.

§. 161. Man nehme an, m sei die immer sich gleichbleibende aber nichtgegebene Function von x, oder der immer sich gleichbleibende aber nichtgegebene constante Werth; und setze

$$\text{I)}\quad F(x, y, z) = m$$

Man sondere y ab, so dass man z. B. y = f(x, z, m) bekommt, und führe diesen Ausdruck statt y in die für U gegebene Gleichung überall ein. Dadurch ist die Untersuchung auf die vierzehnte zurückgebracht; denn man bekommt jetzt für U einen aus den Elementen x, z, m gebildeten Ausdruck, der nur noch das einzige mutable Element z enthält, und aus welchem sich gradezu Mutationscoefficienten von folgender Form ergeben:

$$\text{II)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = \frac{d_z W}{dz}\cdot\delta z + \frac{dW}{dx}\cdot\vartheta x$$

$$\text{III)}\quad {}_{(}\delta^2_{)}U = \frac{d_z W}{dz}\cdot\delta^2 z + \frac{d_z^2 W}{dz^2}\cdot\delta z^2 + 2\cdot\left(\frac{d\left(\frac{d_z W}{dz}\right)}{dx}\cdot\delta z + \frac{d_z W}{dz}\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right)\cdot\vartheta x$$

$$+ \frac{dW}{dx}\cdot\vartheta^2 x + \frac{d^2 W}{dx^2}\cdot\vartheta x^2$$

etc. etc.

Man sehe nun zu, welche von den Gleichungen $\frac{d_z W}{dz} = 0$ oder $\frac{d_z W}{dz} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$, oder ob beide zugleich möglich sind. Diese Gleichungen gelten bei jedem Werthe des x, und dienen, für z eine aus x und m bestehende Function zu bestimmen, welche durch $z = \pi(x, m)$ dargestellt sein mag. Das unbestimmte m kann man aber wieder mittelst I eliminiren, so dass man $z = \pi(x, F(x, y, z))$ bekommt, woraus sich weiter für z eine Function von x und y entwickeln lässt, welche dargestellt sein mag durch

$$\text{I)}\quad z = \chi(x, y)$$

Nun aber existirt keine Gleichung mehr, wodurch man y bestimmen kann; und somit kann man für das mittelbar mutable y jede beliebige Function von x nehmen. Wenn man nun diese Untersuchung mit der siebenten vergleicht, so sieht man, dass sich ganz dieselbe Function ergibt, wie wenn x unveränderlich wäre. Es ist aber

$$\text{V)}\quad \frac{dW}{dx} = \frac{d_z U}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{d_y U}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d_x U}{dx}$$

Hat man nun für y eine Function angenommen, und die dazu gehörige Function z hergestellt; so führe man für $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dy}{dx}$ die Ausdrücke in V ein, reducire soviel als möglich, und sehe zu, ob man $\frac{dW}{dx} = 0$ oder $\frac{dW}{dx} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$ setzen kann, oder ob beide Gleichungen zugleich möglich sind. Diese Gleichungen sind aber keine identischen, und dienen nur dazu, den besondern Werth des x aufzusuchen.

In dem Falle, dass die identische Gleichung $\frac{d_z W}{dz} = 0$ und die nichtidentische Gleichung $\frac{dW}{dx} = 0$ stattfinden, reducirt sich Gleichung III im Allgemeinen auf

$$(\delta_r^2 U = \frac{d_z^2 W}{dz^2} \cdot \delta z^2 + \frac{d^2 W}{dx^2} \cdot \vartheta x^2$$

Man kann aber auch auf folgende Weise verfahren: Man forme Gleichung I um in

$$\text{VII)}\quad F(x, y, z) - m = 0$$

so muss diese Gleichung, obgleich man m nicht kennt, doch als identische gelten. Daraus folgt aber

$$\text{VIII)}\quad \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_z F}{dz} \cdot \delta z + \left(\frac{d_y F}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_z F}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{d_x F}{dx} - \frac{dm}{dx}\right) \cdot \vartheta x = 0$$

Aber eben weil Gleichung VII nur als identische gedacht werden kann, so muss der hier zu ϑx gehörige Factor zu Null werden; und es bleibt nur die identische Gleichung

$$\text{IX)}\quad \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_z F}{dz} \cdot \delta z = 0$$

übrig. Ferner ist

$$\text{X)}\quad (\delta_r U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_z U}{dz} \cdot \delta z + \left(\frac{d_y U}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_z U}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{d_x U}{dx}\right) \cdot \vartheta x$$

aus welchem Ausdrucke man vorerst δy zu eliminiren hat, was mittelst Gleichung IX geschieht, entweder auf direktem Wege, oder durch einen Multiplicator.

Alles Weitere ist bekannt.

Es ist überflüssig, die bisherigen Untersuchungen zu vervielfältigen; dagegen sollen jetzt solche durchgeführt werden, wo die mutablen Elemente auch in der Weise vorkommen, dass die in ihnen enthaltenen nichtmutablen Veränderlichen bereits mit festen Werthen versehen sind.

Untersuchung 20.

Es sei U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x, y, y_a gebildeter Ausdruck, und man sucht für y eine solche reelle Function von x, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 162. Zwischen y und y_a besteht bekanntlich folgender Unterschied: Durch y ist eine Function von x repräsentirt, wo das x noch ganz allgemein ist; durch y_a ist die nemliche Function von x repräsentirt, wo aber das x bereits den besonderen Werth a angenommen hat. Wenn man also irgend eine durch $\varphi(x)$ dargestellte reelle Function an die Stelle des y in die ursprüngliche Gleichung einsetzt, so muss man $\varphi(a)$ an die Stelle des y_a einsetzen. Die dem $\varphi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunctionen werden dargestellt durch

$$\text{I)}\quad \varphi(x) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und dabei sind die dem $y_a = \varphi(a)$ bei dem besonderen Werthe $x = a$ nächstanliegenden Nachbarwerthe dargestellt durch

$$\text{II)}\quad \varphi(a) + \varkappa \cdot \delta y_a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y_a + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Die nemliche Function von x, welche man sich unter δy denkt, muss man sich auch unter δy_a denken; nur ist in letzterem Falle a an die Stelle des x getreten. Nun sind (nach §. 92), so lange δy jede beliebige Function repräsentirt, die beiden Ausdrücke δy_a und δy_α, wo bezüglich $x = a$ und $x = \alpha$ gesetzt ist, dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander, wenn gleich mit der Form des δy auch die Form des δy_a und δy_α mitgegeben ist. Um so mehr müssen die Ausdrücke δy, wo x noch willkürlich ist, und δy_a, wo bereits $x = a$ gesetzt ist, dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander sein.

Dasselbe gilt zwischen $\delta^2 y$ und $\delta^2 y_a$, wo auch $\delta^2 y$ eine ganz willkürliche Function von x ist.

Dasselbe gilt zwischen $\delta^3 y$ und $\delta^3 y_a$, wo auch $\delta^3 y$ eine ganz willkürliche Function von x ist.

Und so fort.

§. 163. Man kann unter den dem $\varphi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunctionen folgende verschiedene Arten besonders hervorheben:

A) Diejenigen, welche bei dem besondern Werthe $x = a$ alle mit $\varphi(a)$ einerlei Werth haben. Hier hat also die Reihe II mit $\varphi(a)$ einerlei Werth, und es findet folgende Gleichung statt:

$$\text{III)}\quad \varphi(a) = \varphi(a) + \varkappa \cdot \delta y_a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y_a + \cdots\cdots$$

Diese Gleichung soll bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ gelten, ist also nur möglich, wenn einzeln stattfindet $\delta y_a = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, etc.

B) Diejenigen, welche bei dem dem allgemeinen x grade zugedachten speciellen Werthe alle mit $\varphi(x)$ einerlei Werth bekommen. Hier hat also die Reihe I mit $\varphi(x)$ einerlei Werth, und es findet folgende Gleichung statt:

$$\text{IV)}\quad \varphi(x) = \varphi(x) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdots\cdots$$

Diese Gleichung soll bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ gelten, ist also nur möglich, wenn einzeln stattfindet $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, etc.

(Man vergleiche §. 87 und §. 119, vorzüglich aber die Anmerkung des dritten Falles der 58ten Aufgabe oder die Anmerkung des dritten Falles der 95ten Aufgabe.)

Man ist also jetzt auf dem Punkte, bei vorliegender Untersuchung drei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall.

§. 164. Wenn man $\varphi(x)$ an die Stelle des y, und $\varphi(a)$ an die Stelle des y_a in die ursprüngliche Gleichung einsetzt; so bekommt man auch für U eine Function von x, welche mit $\psi(x)$ bezeichnet sein mag. Soll nun die gesuchte Function mit allen möglichen ihr nächstanliegenden verglichen werden, so hat man die Reihen I und II bezüglich an die Stelle des y und des y_a in die ursprüngliche Gleichung überall einzuführen; und man bekommt alle möglichen dem $U' = \psi(x)$ nächstanliegenden Nachbarzustände, welche mit $(U' + \Delta U)$ oder mit $(\psi(x) + \Delta U)$ bezeichnet werden, und, wenn man sie in eine nach Potenzen des $\varkappa$ fortschreitende Reihe entwickeln will, nur in eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt werden dürfen, eben weil $\varkappa$ im Momente des Verschwindens befindlich ist.

Statt aller Wiederholungen vergleiche man lieber die zweite Untersuchung (§. 120 bis 125).

Setzt man, um die Differentialquotienten bequemer bezeichnen zu können, p anstatt y_a; so bekommt man im Allgemeinen

$$\text{V)}\quad \delta U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p U}{dp} \cdot \delta y_a$$

$$\text{VI)}\quad \delta^2 U = \frac{d_y U}{dy}\cdot\delta^2 y + \frac{d_p U}{dp}\cdot\delta^2 y_a + \frac{d_y^2 U}{dy^2}\cdot\delta y^2 + 2\cdot\frac{d_y d_p U}{dy.dp}\cdot\delta y\cdot\delta y_a + \frac{d_p^2 U}{dp^2}\cdot\delta y_a^2$$

und an Gleichung V erkennt man, dass nur dann Fälle eintreten können, bei denen ΔU sein Zeichen nicht wechselt, wenn eines von folgenden vier Systemen zweier Gleichungen stattfindet:

$$1)\quad \frac{d_y U}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_p U}{dp} = 0$$

$$2)\quad \frac{d_y U}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_p U}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

$$3)\quad \frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_p U}{dp} = 0$$

$$4)\quad \frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_p U}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

A) Man sehe zu, ob das erste System möglich ist; und da man hier gleichzeitig die zwei Gleichungen

$$\frac{d_y U}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_p U}{dp} = 0$$

hat, welche von einer und derselben für y zu suchenden Function erfüllt werden sollen, so erkennt man, dass die Aufgabe oft eine überbestimmte, d. h. unmögliche sein kann. Um aber die für y gesuchte Function zu finden, setze man in eine der beiden vorgenommenen Gleichungen C an die Stelle des y_a, und sondere y ab, so dass man $y = \varphi(x, C)$ bekommt. Hierauf setze man $\varphi(x, C)$ und $\varphi(a, C)$ an die Stelle des y und des y_a in die beiden vorgenommenen Gleichungen ein, und untersuche, ob sie dadurch alle beide identisch werden können. Dabei kann sich aber Dreierlei ereignen:

1) Das C muss, damit die beiden Gleichungen zugleich identisch werden, einen bestimmten und von x unabhängigen Werth annehmen.

2) Die beiden Gleichungen werden identisch bei jedem beliebigen Werthe des C; und da hier die gesuchte Function $y = \varphi(x, C)$ einen willkürlichen Constanten enthält, so kann sie noch irgend einer Nebenbedingung unterworfen werden, wodurch sich dieser Constante bestimmt. Eine solche Nebenbedingung ist z. B. folgende: Es soll y den bestimmten Werth m annehmen, wenn man dem x den besonderen Werth n beilegt; denn dabei hat man die Gleichung $m = \varphi(n, C)$, durch deren Auflösung sich ein bestimmter Werth für C ergibt.

3) Können aber nach der oben besagten Substitution bei keinem Werthe des C die beiden vorgenommenen Gleichungen zugleich identisch werden, so widersprechen sie sich einander, und die Aufgabe ist überbestimmt, d. h. unmöglich; und grade dieses kann sich sehr oft ereignen.

Hierauf sehe man zu, ob das zweite System möglich ist, und verfahre wieder so, wie eben auseinandergesetzt worden.

Und so fort.

Zweiter Fall.

§. 165. Wenn man $\varphi(x)$ an die Stelle des y, und $\varphi(a)$ an die Stelle des y_a in die ursprüngliche Gleichung einsetzt; so bekommt man auch für U eine Function von x, welche mit $\psi(x)$ bezeichnet sein mag. Soll nun die gesuchte Function $\varphi(x)$ nur mit denjenigen ihr nächstanliegenden verglichen werden, welche bei dem speciellen Werthe $x = a$ alle mit $\varphi(a)$ einerlei Werth haben; so ist jetzt $\delta y_a = 0$, $\delta^2 y_a = 0$ etc.; und es ergeben sich die dem $U = \psi(x)$ nächstanliegenden Nachbarzustände $(\psi(x) + \Delta U)$ jedesmal dadurch, dass man die Reihe I, d. h. die Reihe

$$\varphi(x) + \varkappa\cdot\delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.2}\cdot\delta^3 y + \cdots\cdots$$

an die Stelle des y, dagegen aber nur $\varphi(a)$ an die Stelle des y_a in die ursprüngliche Gleichung überall einsetzt. Hierbei bekommt man im Allgemeinen

$$\text{VII)} \quad \delta U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y$$

$$\text{VIII)} \quad \delta^2 U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \delta y^2$$

und an Gleichung VII erkennt man, dass nur dann Fälle eintreten können, bei denen ΔU sein Zeichen nicht wechselt, wenn eine von folgenden zwei Gleichungen

$$5) \text{ entweder } \frac{d_y U}{dy} = 0, \text{ oder } 6) \ \frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$$

stattfindet.

A) Man sehe also zu, ob $\frac{d_y U}{dy} = 0$ stattfindet, setze $y_a = C$, und es gibt sich $y = \varphi(x, C)$. Nun führe man $\varphi(x, C)$ und $\varphi(a, C)$ bezüglich statt y und y_a in $\frac{d_y U}{dy} = 0$ ein, und untersuche, ob diese Gleichung erfüllt wird. Dabei kann sich wieder, wie im vorigen Falle, Dreierlei ereignen:

1) Dass C muss, damit diese Gleichung erfüllt wird, einen bestimmten und von x unabhängigen Werth annehmen.

2) Diese Gleichung wird erfüllt bei jedem beliebigen Werthe des C; und da hier die gesuchte Function einen willkürlichen Constanten enthält, so kann sie noch irgend einer Nebenbedingung unterworfen werden, wodurch sich dieser Constante bestimmt. Eine solche Nebenbedingung ist schon im vorigen §. aufgestellt worden.

3) Die Gleichung $\frac{d_y U}{dy} = 0$ kann bei keinem Werthe des C erfüllt werden, trägt also einen Widerspruch in sich selbst, d. h. die Aufgabe ist unmöglich.

B) Man sehe noch zu, ob auch die Gleichung $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ möglich ist, und suche für y die geeignete Function auf, wie so eben beschrieben.

Dritter Fall.

§. 166. Wenn man $\varphi(x)$ an die Stelle des y, und $\varphi(a)$ an die Stelle des y_a in die ursprüngliche Gleichung einsetzt, so bekommt man auch für U eine Function von x, welche mit $\psi(x)$ bezeichnet sein mag. Soll nun die gesuchte Function $\varphi(x)$ bei jedem beliebigen speciellen Werthe $x = \mathfrak{x}$ nur mit denjenigen ihr nächstanliegenden verglichen werden, welche bei dem jedesmal grade gedachten speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ alle mit $\varphi(\mathfrak{x})$ einerlei Werth haben, während sie bei dem festen Werthe $x = a$ noch allerlei verschiedene Werthe bekommen können; so ist jetzt $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$ etc., und es ergeben sich jetzt die dem $U = \psi(x)$ nächstanliegenden Nachbarzustände $(\psi(x) + \Delta U)$ jedesmal dadurch, dass man die Reihe II, d. h. die Reihe

$$\varphi(a) + \varkappa \cdot \delta y_a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y_a + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

an die Stelle des y_a, dagegen aber nur $\varphi(x)$ an die Stelle des y in die ursprüngliche Gleichung überall einsetzt. Denn obgleich δy_a, $\delta^2 y_a$ etc. nicht verschwinden, so muss doch einzeln $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$ etc. sein, weil es sonst nicht der Fall wäre, dass man $\varphi(\mathfrak{x})$ bei dem grade gedachten (übrigens beliebigen) speciellen Werthe nur mit solchen Functionen vergleicht, welche mit $\varphi(\mathfrak{x})$ einerlei Werth haben. (Man sehe §. 162 B.) Hierbei bekommt man im Allgemeinen

$$\text{IX)} \quad \delta U = \frac{d_p U}{dp} \cdot \delta y_a$$

$$X)\quad \delta^2 U = \frac{d_p U}{dp} \cdot \delta^2 y_a + \frac{d_p^2 U}{dp^2} \cdot \delta y_a^2$$

und an Gleichung IX erkennt man, dass nur dann Fälle eintreten können, bei denen ΔU sein Zeichen nicht wechselt, wenn eine von folgenden zwei Gleichungen

$$7)\text{ entweder } \frac{d_p U}{dp} = 0,\text{ oder } 8)\quad \frac{d_p U}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

stattfindet.

A) Man sehe nun zu, ob die Gleichung $\frac{d_p U}{dp} = 0$ stattfindet, etc.

B) Hierauf sehe man zu, ob auch die Gleichung $\frac{d_p U}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$ stattfindet, etc.

Untersuchung 21.

Es sei U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x, y, y_a, y_α gebildeter Ausdruck, und man sucht für y eine solche reelle Function von x, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 167. Zwischen y, y_a, y_α besteht bekanntlich folgender Unterschied: durch y ist eine Function von x repräsensirt, wo das x noch ganz allgemein ist; durch y_a ist die nemliche Function von x repräsentirt, wo aber das x bereits den besondern Werth a angenommen hat; durch y_α ist abermals die nemliche Function von x repräsentirt, wo aber das x bereits den speciellen Werth α angenommen hat. Wenn man also irgend eine durch $\varphi(x)$ dargestellte reelle Function an die Stelle des y setzt, so muss man $\varphi(a)$ und $\varphi(\alpha)$ bezüglich an die Stelle des y_a und y_α setzen. Die dem $\varphi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunctionen werden dargestellt durch

$$I)\quad \varphi(x) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Dabei sind die dem $y_a = \varphi(a)$ bei dem besonderen Werthe $x = a$ nächstanliegenden Nachbarwerthe dargestellt durch

$$II)\quad \varphi(a) + \varkappa \cdot \delta y_a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y_a + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Ebenso sind die dem $y_\alpha = \varphi(\alpha)$ bei dem besonderen Werthe $x = \alpha$ nächstanliegenden Nachbarwerthe dargestellt durch

$$III)\quad \varphi(\alpha) + \varkappa \cdot \delta y_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1\,2} \cdot \delta^2 y_\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y_\alpha + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Die nemliche Function, welche man sich unter δy denkt, muss man sich auch unter δy_a und δy_α denken; nur ist in diesen beiden letzten Fällen bezüglich a und α an die Stelle des x getreten. So lange δy noch jede beliebige Function vorstellt, sind (nach §. 92, und 162 am Ende) die drei Ausdrücke δy, δy_a, δy_α, dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander. Jedoch können die beiden Ausdrücke δy_a und δy_α dem Werthe nach auch voneinander abhängig werden, sobald eine Bedingungsgleichung zwischen ihnen stattfindet (man sehe §. 103 und 173).

Dasselbe gilt zwischen $\delta^2 y$, $\delta^2 y_a$, $\delta^2 y_\alpha$.

Dasselbe gilt zwischen $\delta^3 y$, $\delta^3 y_a$, $\delta^3 y_\alpha$.

Und so fort.

§. 168. Man kann unter den dem $\varphi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunctionen folgende sechs verschiedene Arten besonders hervorheben:

A) Diejenigen, welche bei $x = a$ alle mit $\varphi(a)$ einerlei Werth haben. Dabei findet einzeln statt $\delta y_a = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, etc. Der Beweis wird geführt, wie in §. 87.

B) Diejenigen, welche bei $x = \alpha$ alle mit $\varphi(\alpha)$ einerlei Werth haben. Dabei findet einzeln statt $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. Der Beweis wird geführt, wie in §. 87.

C) Diejenigen, welche gleichzeitig die zwei Eigenschaften haben, dass sie bei $x = a$ alle mit $\varphi(a)$ einerlei Werth, und dass sie bei $x = \alpha$ alle mit $\varphi(\alpha)$ einerlei Werth bekommen. Dabei ist $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$ etc.

D) Diejenigen, welche bei dem dem x grade zugedachten speciellen Werthe alle mit $\varphi(x)$ einerlei Werth haben. Dabei ist $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, etc. Der Beweis wird geführt, wie in §. 119 oder 163. (Man sehe noch die Anmerkungen zum dritten Falle der 58ten Aufgabe und zum dritten Falle der 95ten Aufgabe.)

E) Diejenigen, welche gleichzeitig die zwei Eigenschaften besitzen, dass sie bei dem dem x grade zugedachten speciellen Werthe alle mit $\varphi(x)$, und dass sie bei $x = a$ alle mit $\varphi(a)$ einerlei Werth haben. Dabei ist $\delta y = 0$, $\delta y_a = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^2 y_a = 0$ etc.

F) Diejenigen, welche gleichzeitig die zwei Eigenschaften besitzen, dass sie bei dem dem x grade zugedachten speciellen Werthe alle mit $\varphi(x)$, und dass sie bei $x = \alpha$ alle mit $\varphi(\alpha)$ einerlei Werth haben. Dabei ist $\delta y = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$ etc.

Führt man $\varphi(x)$, $\varphi(a)$, $\varphi(\alpha)$ bezüglich an die Stelle des y, des y_a und des y_α in die ursprüngliche Gleichung überall ein; so bekommt man auch für U eine Function von x, welche mit $\psi(x)$ bezeichnet sein mag. Führt man aber die Reihen I, II, III, bezüglich an die Stelle des y, y_a und y_α ein; so bekommt man die dem $U' = \psi(x)$ nächstanliegenden Nachbarzustände, welche durch $(U' + \varDelta U)$ oder durch $(\psi(x) + \varDelta U)$ bezeichnet werden, und, wenn man sie in eine nach Potenzen des $\varkappa$ fortschreitende Reihe entwickeln will, nur in eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt werden dürfen, eben weil $\varkappa$ im Momente des Verschwindens befindlich gedacht ist; etc. etc.

Statt aller Wiederholungen vergleiche man lieber die dritte und die zwanzigste Untersuchung.

§. 169. Setzt man, um die Differentialquotienten bequem bezeichnen zu können, p statt y_a, und q statt y_α; so gibt sich

$$\text{IV)}\quad \delta U = \frac{d_y U}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_p U}{dp}\cdot\delta y_a + \frac{d_q U}{dq}\cdot\delta y_\alpha$$

$$\begin{aligned}\text{V)}\quad \delta^2 U = {} & \frac{d_y U}{dy}\cdot\delta^2 y + \frac{d_p U}{dp}\cdot\delta^2 y_a + \frac{d_q U}{dq}\cdot\delta^2 y_\alpha \\ & + \frac{d_y^2 U}{dy^2}\cdot\delta y^2 + 2\cdot\frac{d_y d_p U}{dy.dp}\cdot\delta y\cdot\delta y_a + 2\cdot\frac{d_y d_q U}{dy.dq}\cdot\delta y\cdot\delta y_\alpha \\ & + \frac{d_p^2 U}{dp^2}\cdot\delta y_a^2 + 2\cdot\frac{d_p d_q U}{dp.dq}\cdot\delta y_a\cdot\delta y_\alpha + \frac{d_q^2 U}{dq^2}\cdot\delta y_\alpha^2\end{aligned}$$

An Gleichung IV erkennt man nun die Ausdrücke, welche unter keinerlei Umständen im ersten Gliede der für $\varDelta U$ herzustellenden Reihe vorkommen dürfen.

Es mögen nun in den folgenden vier §§. auch vier verschiedene Fälle besonders betrachtet werden. Für andere Fälle ist dann der Weg hinlänglich gebahnt.

§. 170. Soll die gesuchte Function $y = \varphi(x)$ mit allen möglichen ihr nächstanliegenden verglichen werden; so können nur dann Fälle eintreten, bei denen $\varDelta U$ sein Zeichen nicht ändert, wenn eines von folgenden acht Systemen dreier Gleichungen stattfindet:

$$1)\quad \frac{d_y U}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_p U}{dp} = 0 \text{ und } \frac{d_q U}{dq} = 0,$$

$$2)\quad \frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = 0 \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

$$3)\quad \frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0} \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = 0,$$

$$4)\quad \frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = 0 \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = 0,$$

$$5)\quad \frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0} \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

$$6)\quad \frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = 0 \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

$$7)\quad \frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0} \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = 0,$$

$$8)\quad \frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0} \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

A) Man sehe zu, ob das erste System der drei Gleichungen

$$\frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = 0 \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = 0$$

möglich ist. Man setze C und E bezüglich statt y_a und y_α in eine dieser drei Gleichungen ein, und sondre y ab, so dass man $y = \varphi(x, C, E)$ bekommt. Hierauf setze man $\varphi(x, C, E)$, $\varphi(a, C, E)$ und $\varphi(\alpha, C, E)$ bezüglich statt y, y_a und y_α in die drei vorgenommenen Gleichungen ein, und untersuche, ob sie dadurch alle drei identisch werden können. Dabei kann sich Viererlei ereignen:

1) Sowohl C als auch E müssen, damit die drei Gleichungen zugleich identisch werden, bestimmte und von x unabhängige Werthe annehmen.

2) Die drei vorgenommenen Gleichungen werden alle identisch, wenn von den zwei Bestandtheilen C und E nur einer einen bestimmten Werth annimmt, und der andere noch ganz willkürlich bleibt. Hier kann man also die Aufgabe noch einer Nebenbedingung unterwerfen. Von einer solchen Nebenbedingung ist schon in den §§. 164 und 165 die Rede gewesen.

3) Die drei vorgenommenen Gleichungen werden alle identisch, wenn jeder der beiden Bestandtheile C und E jeden beliebigen Werth annehmen können. Hier kann man die Aufgabe zweien Nebenbedingungen unterwerfen. Dergleichen Bedingungen wären z. B.: y soll die bestimmten Werthe n und k annehmen, wenn man dem x bezüglich die besonderen Werthe m und h beilegt; denn dabei hat man die Gleichungen $n = \varphi(m, C, E)$ und $k = \varphi(h, C, E)$, durch deren Auflösung sich für C und E bestimmte Werthe ergeben.

4) Können aber nach der oben besagten Substitution bei keinem Werthe des C und des E die drei vorgenommenen Gleichungen zugleich identisch werden; so widersprechen sie sich einander und die Aufgabe ist überbestimmt, d. h. unmöglich; und grade dieses wird sich sehr oft ereignen.

B) Hierauf sehe man zu, ob das zweite System möglich ist, und verfahre wieder so, wie eben auseinandergesetzt worden.

Und so fort.

§. 171. Soll die gesuchte Function $y = \varphi(x)$ nur mit denjenigen ihr nächstanliegenden verglichen werden, welche bei dem speciellen Werthe $x = a$ alle mit $\varphi(a)$ einerlei Werth haben; so ist jetzt $\delta y_a = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, etc.; und die Gleichungen IV und V reduciren sich auf

$$\text{VI)}\quad \delta U = \frac{d_yU}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_qU}{dq} \cdot \delta y_\alpha$$

$$\text{VII)}\ \delta^2U = \frac{d_yU}{dy}\cdot\delta^2y + \frac{d_qU}{dq}\cdot\delta^2y_\alpha + \frac{d^2_yU}{dy^2}\cdot\delta y^2 + 2\cdot\frac{d_yd_qU}{dy.dq}\cdot\delta y\cdot\delta y_\alpha + \frac{d^2_qU}{dq^2}\cdot\delta y^2_\alpha$$

An Gleichung VI erkennt man nun die Ausdrücke, welche unter keinerlei Umständen im ersten Gliede der für $\varDelta U$ herzustellenden Reihe vorkommen dürfen, d. h. es muss jetzt eines von folgenden vier Systemen zweier Gleichungen stattfinden:

$$9)\ \frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = 0$$

$$10)\ \frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = \frac{\mathfrak{E}}{0}$$

$$11)\ \frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = 0$$

$$12)\ \frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = \frac{\mathfrak{E}}{0}$$

A) Man sehe zu, ob das erste System der zwei Gleichungen

$$\frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = 0$$

stattfindet. Man setze C und E bezüglich statt y_a und y_α in eine dieser beiden Gleichungen ein, und sondere y ab, so dass man $y = \varphi(x, C, E)$ bekommt. Hierauf setze man $\varphi(x, C, E)$, $\varphi(a, C, E)$, $\varphi(\alpha, C, E)$ bezüglich statt y, y_a, y_α in die beiden vorgenommenen Gleichungen ein, und untersuche, ob sie dadurch alle beide identisch werden können. Dabei kann sich wieder, wie im vorigen §., Viererlei ereignen:

1) Sowohl C als auch E müssen, damit die zwei Gleichungen zugleich identisch werden, bestimmte und von x unabhängige Werthe annehmen.

2) Die zwei vorgenommenen Gleichungen werden zugleich identisch, wenn von den zwei Bestandtheilen C und E nur einer einen bestimmten Werth annimmt, und der andere noch ganz willkürlich bleibt. Hier kann man also die Aufgabe noch einer Nebenbedingung unterwerfen. (Man sehe §. 164 und 165.)

3) Die zwei vorgenommenen Gleichungen werden zugleich identisch, wenn noch jeder der beiden Bestandtheile C und E jeden beliebigen Werth annehmen kann. Hier kann man die Aufgabe zweien Nebenbedingungen unterwerfen. (Man sehe §. 170.)

4) Können aber nach der oben besagten Substitution bei keinem Werthe des C und des E die zwei vorgenommenen Gleichungen zugleich identisch werden, so widersprechen sie sich einander, und die Aufgabe ist überbestimmt, d. h. unmöglich; und grade dieses kann sich sehr oft ereignen.

B) Hierauf sehe man zu, ob auch das zweite System möglich ist, und verfahre wieder so, wie eben auseinandergesetzt worden.

Und so fort.

§. 172. Soll die gesuchte Function $y = \varphi(x)$ nur mit denjenigen ihr nächstanliegenden verglichen werden, welche sowohl bei dem besonderen Werthe $x = a$ alle mit $\varphi(a)$ einerlei Werth, als auch bei dem besondern Werthe $x = \alpha$ alle mit $\varphi(\alpha)$ einerlei Werth haben; so ist jetzt $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$ etc.; und die Gleichungen IV und V reduciren sich auf

$$\text{VIII)}\ \delta U = \frac{d_yU}{dy}\cdot\delta y$$

$$\text{IX)}\ \delta^2U = \frac{d_yU}{dy}\cdot\delta^2y + \frac{d^2_yU}{dy^2}\cdot\delta y^2$$

An Gleichung VIII erkennt man nun den Ausdruck, welcher unter keinerlei Umständen das erste Glied der für $\varDelta U$ herzustellenden Reihe sein darf, d. h. es muss jetzt eine von folgenden zwei Gleichungen

$$\frac{d_y U}{dy} = 0 \text{ oder } \frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$$

stattfinden.

A) Man sehe zu, ob die erste dieser Gleichungen stattfindet, setze $y_a = B$ und $y_\alpha = C$; und es gibt sich $y = \varphi(x, B, C)$. Nun führe man $\varphi(x, B, C)$, $\varphi(a, B, C)$ und $\varphi(\alpha, B, C)$ bezüglich statt y, y_a und y_α in $\frac{d_y U}{dy} = 0$ ein, und untersuche sorgsam, ob diese Gleichung erfüllt wird. Wird sie nicht erfüllt, so trägt die Aufgabe einen Widerspruch in sich selbst, ist also unmöglich. (Ueber das dabei anzuwendende Verfahren vergleiche man die beiden vorigen §§.)

B) Man sehe zu, ob nicht auch die Gleichung $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ möglich ist, und suche für y die geeignete Function auf, wie so eben beschrieben.

§. 173. Soll die gesuchte Function $y = \varphi(x)$ nur aus der Zahl derjenigen einander nächstanliegenden herausgewählt werden, bei welchen allen die Gleichung

$$\text{X)} \quad F(a, \alpha, y_a, y_\alpha) = 0$$

stattfindet; so müssen (s. §. 103) sich, wenn man an die Stelle des y die dem $\varphi(x)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen setzt, folgende Gleichungen ergeben:

$$\text{XI)} \quad \frac{d_p F}{dp} \cdot \delta y_a + \frac{d_q F}{dq} \cdot \delta y_\alpha = 0$$

$$\text{XII)} \quad \frac{d_p F}{dp} \cdot \delta^2 y_a + \frac{d_q F}{dq} \cdot \delta^2 y_\alpha + \frac{d_p^2 F}{dp^2} \cdot \delta y_a^2 + 2 \cdot \frac{d_p d_q F}{dp \cdot dq} \cdot \delta y_a \cdot \delta y_\alpha + \frac{d_q^2 F}{dq^2} \cdot \delta y_\alpha^2 = 0$$

Man hat nun zwei Wege, dieses Problem zu lösen:

1) Man betrachte y_a als den dem Werthe nach abhängigen Bestandtheil, und sondere y_a aus $F(a, \alpha, y_a, y_\alpha) = 0$ ab, so dass man z. B. $y_a = f(a, \alpha, y_\alpha)$ bekommt. Nun setze man $f(a, \alpha, y_\alpha)$ an die Stelle des y_a in den für U gegebenen Ausdruck überall ein; und man hat weiter zu verfahren, wie in der zwanzigsten Untersuchung geschehen ist.

2) Will man aber diese Absonderung und nachherige Substitution vermeiden, so eliminire man die von y_a herrührenden Mutationscoefficienten, entweder direct oder mittelst eines Multiplicators. Eliminirt man zunächst nur δy_a aus IV, so bekommt man

$$\text{XIII)} \quad \delta U = \left[\left(\frac{d_q U}{dq} \times \frac{d_p F}{dp} - \frac{d_p U}{dp} \times \frac{d_q F}{dq}\right) : \frac{d_p F}{dp}\right] \cdot \delta y_\alpha + \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y$$

A) Man sehe nun zu, ob die beiden identischen Gleichungen

$$\left(\frac{d_q U}{dq} \times \frac{d_p F}{dp} - \frac{d_p U}{dp} \times \frac{d_q F}{dq}\right) : \frac{d_p F}{dp} = 0 \text{ und } \frac{d_y U}{dy} = 0$$

möglich sind, verbinde beide mit der nichtidentischen Gleichung $F(a, \alpha, y_a, y_\alpha) = 0$; und wenn sich dann $y = \varphi(x)$ ergibt, so führe man $\varphi(x)$, $\varphi(a)$, $\varphi(\alpha)$ bezüglich statt y, y_a, y_α in diese drei Gleichungen ein, und untersuche, ob sie alle drei erfüllt werden. Ist dieses nicht der Fall, so ist die Aufgabe überbestimmt, d. h. unmöglich.

B) Man sehe zu, ob man noch andere Systeme von Gleichungen bekommen kann. Und so fort.

Untersuchung 22.

Es ist U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x, y, z, y_a, y_α, z_a, z_α gebildeter Ausdruck; und man sucht für y und z solche reelle Functionen von x, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 174. Dehnt man die vorige Untersuchung auf die hier vorgelegte aus, so hat diese keine neuen Eigenthümlichkeiten mehr. Setzt man namentlich, um die Differentialquotienten kürzer schreiben zu können, p statt y_a, q statt y_α, $\mathfrak{p}$ statt z_a und $\mathfrak{q}$ statt z_α; so bekommt man

$$\delta U = \frac{d_y U}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_z U}{dz}\cdot\delta z + \frac{d_p U}{dp}\cdot\delta y_a + \frac{d_\mathfrak{p} U}{d\mathfrak{p}}\cdot\delta z_a + \frac{d_q U}{dq}\cdot\delta y_\alpha + \frac{d_\mathfrak{q} U}{d\mathfrak{q}}\cdot\delta z_\alpha$$

Alles Weitere bedarf keiner Auseinandersetzung mehr. Die Hauptsache ist aber immer die, dass man, wenn $y = \varphi'(x)$ und $z = \varphi''(x)$ gefunden sind, jedesmal $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$, $\varphi'(\alpha)$, $\varphi''(\alpha)$ bezüglich an die Stelle von y, z, y_a, z_a, y_α, z_α in die vorhandenen Gleichungen zurückführt, und sorgsam beachtet, ob dadurch alle diese Gleichungen erfüllt werden.

Untersuchung 23.

Es ist U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x, y, z, y_a, y_α, z_a, z_α gebildeter Ausdruck. Man sucht für y und z solche reelle Functionen von x, dass nicht nur der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ identisch genügt, sondern auch noch U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 175. Wenn schon im Allgemeinen $F(x, y, z) = 0$ ist, so muss auch in den zwei besondern Fällen $F(a, y_a, z_a) = 0$ und $F(\alpha, y_\alpha, z_\alpha) = 0$ sein. Aus diesen drei Gleichungen folgt auch

$$\text{I)}\quad \frac{d_y F}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_z F}{dz}\cdot\delta z = 0$$

$$\text{II)}\quad \left(\frac{d_y F}{dy}\right)_a\cdot\delta y_a + \left(\frac{d_z F}{dz}\right)_a\cdot\delta z_a = 0$$

$$\text{III)}\quad \left(\frac{d_y F}{dy}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha + \left(\frac{d_z F}{dz}\right)_\alpha\cdot\delta z_\alpha = 0.$$

etc. etc.

Man hat nun zwei Wege, die Untersuchung durchzuführen:

1) Man nehme z als mittelbar mutabel, sondere es aus $F(x, y, z) = 0$ ab, so dass man z. B. bekommt $z = f(x, y)$, $z_a = f(a, y_a)$, $z_\alpha = f(\alpha, y_\alpha)$, und führe diese Ausdrücke in die für U gegebene Gleichung ein. Dadurch wird U ein nur mit den Bestandtheilen x, y, y_a, y_α gebildeter Ausdruck, und die hier vorgelegte Untersuchung ist auf die einundzwanzigste gebracht.

2) Will man aber diese Absonderung und nachherige Substitution vermeiden, so eliminire man die mittelbaren Mutationscoefficienten, entweder direct oder durch einen Multiplicator. Will man namentlich das zweite Mittel anwenden, so multiplicire man die Gleichungen I, II, III bezüglich mit (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Functionen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ von x, und addire diese drei Produkte zu dem für δU sich ergebenden Ausdrucke, dann bekommt man

$$\text{IV)}\quad \delta U = \left[\frac{d_y U}{dy} + \mathfrak{L}\cdot\frac{d_y F}{dy}\right]\cdot\delta y + \left[\frac{d_z U}{dz} + \mathfrak{L}\cdot\frac{d_z F}{dz}\right]\cdot\delta z$$
$$+ \left[\frac{d_p U}{dp} + \mathfrak{M}\cdot\left(\frac{d_y F}{dy}\right)_a\right]\cdot\delta y_a + \left[\frac{d_\mathfrak{p} U}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{M}\cdot\left(\frac{d_z F}{dz}\right)_a\right]\cdot\delta z_a$$
$$+ \left[\frac{d_q U}{dq} + \mathfrak{N}\cdot\left(\frac{d_y F}{dy}\right)_\alpha\right]\cdot\delta y_\alpha + \left[\frac{d_\mathfrak{q} U}{d\mathfrak{q}} + \mathfrak{N}\cdot\left(\frac{d_z F}{dz}\right)_\alpha\right]\cdot\delta z_\alpha$$

Nun soll der für δU herzustellende Ausdruck von den mittelbaren Mutationscoefficienten δz, δz_a, δz_α ganz frei sein; man denke sich also unter $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ solche Functionen von x, dass die identischen Gleichungen

$$\text{V)}\quad \frac{d_z U}{dz} + \mathfrak{L}\cdot\frac{d_z F}{dz} = 0,\quad \text{VI)}\quad \frac{d_p U}{dp} + \mathfrak{M}\cdot\left(\frac{d_z F}{dz}\right)_a = 0,$$

$$\text{und VII)}\quad \frac{d_q U}{dq} + \mathfrak{N}\cdot\left(\frac{d_z F}{dz}\right)_\alpha = 0$$

stattfinden. Aus diesen drei Gleichungen bestimmt sich, was $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ für Functionen von x sind; und Gleichung IV reducirt sich auf

$$\text{VIII)}\quad \delta U = \left[\frac{d_y U}{dy} + \mathfrak{L}\cdot\frac{d_y F}{dy}\right]\cdot\delta y + \left[\frac{d_p U}{dp} + \mathfrak{M}\cdot\left(\frac{d_y F}{dy}\right)_a\right]\cdot\delta y_a$$
$$+ \left[\frac{d_q U}{dq} + \mathfrak{N}\cdot\left(\frac{d_y F}{dy}\right)_\alpha\right]\cdot\delta y_\alpha$$

Alles Weitere bedarf keiner Auseinandersetzung mehr; und man beachte abermals, dass man, wenn $y = \varphi'(x)$ und $z = \varphi''(x)$ gefunden sind, jedesmal $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$, $\varphi'(\alpha)$, $\varphi''(\alpha)$ bezüglich an die Stelle von y, z, y_a, z_a, y_α, z_α einsetzen, und sorgsam prüfen muss, ob auch alle vorhandenen Gleichungen erfüllt werden.

Untersuchung 24.

Es sei U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen x, y, a, α, y_a, y_α gebildeter Ausdruck. Man sucht für y eine solche reelle Function von x, und zugleich für x einen solchen besonderen reellen Werth, dass der dabei für U sich ergebende bestimmte Werth ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes wird.

§. 176. Wenn man irgend eine durch $\varphi(x)$ dargestellte Function an die Stelle des y, ebenso $\varphi(a)$ und $\varphi(\alpha)$ bezüglich an die Stelle des y_a und y_α in die ursprüngliche Gleichung einsetzt; so bekommt man auch für U eine Function von x, welche mit $\psi(x)$ bezeichnet sein mag. Wenn man zugleich dem x einen festen reellen Werth beilegt, so bekommt auch U einen festen Werth, welcher mit U'' bezeichnet sein mag.

Man setze

$$\text{I)}\quad x + \varkappa\cdot\vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\vartheta^2 x + \cdots\cdots \quad \text{an die Stelle des x,}$$

$$\text{II)}\quad \varphi(a) + \varkappa\cdot\delta y_a + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 y_a + \cdots\cdots \quad \text{an die Stelle des } y_a$$

$$\text{III)}\quad \varphi(\alpha) + \varkappa\cdot\delta y_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 y_\alpha + \cdots\cdots \quad \text{an die Stelle des } y_\alpha$$

$$\text{IV)}\quad \varphi(x) + \varkappa\cdot(\delta)y + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot(\delta)^2 y + \cdots\cdots \quad \text{an die Stelle des y}$$

in die ursprüngliche Gleichung ein. Die beiden Elemente y_a und y_α sind nach x constant, und desshalb sind die ihnen nächstanliegenden Nachbarzustände nur reine Mutationen; dagegen in y ist das x noch allgemein, kann also Werthänderungen erleiden, und sonach sind die dem $\varphi(x)$ nächstanliegenden Nachbarzustände gemischte Mutationen.

Man setze zur Abkürzung p statt y_a, und q statt y_α, so bekommt man

$$\text{V)}\quad (\delta)U = \frac{d_p U}{dp}\cdot\delta y_a + \frac{d_q U}{dq}\cdot\delta y_\alpha + \frac{d_y U}{dy}\cdot\delta y + \frac{dU}{dx}\cdot\vartheta x$$

An dieser Gleichung erkennt man nun die Ausdrücke, welche unter keinerlei Umständen im ersten Gliede der für $(\Delta)U$ herzustellenden Reihe vorkommen dürfen.

Obgleich δy_a und δy_α aus einer und derselben Function δy herkommen, so sind doch beide dem Werthe nach (man sehe §. 92) ganz unabhängig voneinander. Sie können aber dem Werthe nach voneinander abhängig werden, sobald eine Bedingungsgleichung zwischen ihnen stattfindet (man sehe §. 103 und 173).

Dasselbe gilt zwischen $\delta^2 y_a$ und $\delta^2 y_\alpha$.

Dasselbe gilt zwischen $\delta^3 y_a$ und $\delta^3 y_\alpha$.

Und so fort.

§. 177. Soll die gesuchte Function $y = \varphi(x)$ mit allen möglichen ihr nächstanliegenden verglichen werden; so können nur dann Fälle eintreten, bei denen $(\Delta)U$ sein Zeichen nicht ändert, wenn eines von den bereits (in §. 170) aufgestellten acht Systemen dreier identischer Gleichungen stattfindet.

A) Man sehe zu, ob das erste System der drei identischen Gleichungen

$$\frac{d_pU}{dp} = 0,\ \frac{d_qU}{dq} = 0,\ \frac{d_yU}{dy} = 0$$

möglich ist, so bekommt man $y = \varphi(x)$, mit welcher Function man aber noch die gehörige Prüfung vorzunehmen hat. Ist die Aufgabe möglich, so bedenke man, dass $\frac{d_yU}{dy} = 0$ eine identische Gleichung ist, dass sich also der totale Differentialquotient $\frac{dU}{dx} = \frac{d_yU}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_xU}{dx}$ zurückzieht auf $\frac{dU}{dx} = \frac{d_xU}{dx}$. Man hat nun zuzusehen, ob $\frac{d_xU}{dx} = 0$ oder $\frac{d_xU}{dx} = \frac{\mathfrak{D}}{0}$ gesetzt werden kann, oder ob beide Gleichungen zugleich möglich sind. Diese letzteren zwei Gleichungen sind aber keine identischen, sondern dienen nur dazu, den besondern Werth des x aufzufinden. Nun ist bei jedem Werthe des x

$$\frac{d\delta U}{dx} = \frac{d\left(\frac{d_pU}{dp}\right)}{dx} \cdot \delta y_a + \frac{d\left(\frac{d_qU}{dq}\right)}{dx} \cdot \delta y_\alpha + \frac{d\left(\frac{d_yU}{dy}\right)}{dx} \cdot \delta y + \frac{d_yU}{dy} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Somit erkennt man, dass $\frac{d\delta U}{dx}$ zu Null wird bei jedem Werthe des x, also auch bei dem für x gesuchten besonderen Werthe. Wenn nun auch $\frac{dU}{dx} = 0$, so bleibt im Allgemeinen nur

$$\text{VI)}\quad (\delta_I^2 U = \frac{d_p^2U}{dp^2} \cdot \delta y_a^2 + 2 \cdot \frac{d_pd_qU}{dp.dq} \cdot \delta y_a \cdot \delta y_\alpha + 2 \cdot \frac{d_pd_yU}{dp.dy} \cdot \delta y_a \cdot \delta y$$
$$+ \frac{d_q^2U}{dq^2} \cdot \delta y_a^2 + 2 \cdot \frac{d_qd_yU}{dq.dy} \cdot \delta y_\alpha \cdot \delta y + \frac{d_y^2U}{dy^2} \cdot \delta y^2 + \frac{d^2U}{dx^2} \cdot \vartheta x^2$$

B) Man sehe nun zu, ob man aus den Quotienten $\frac{d_pU}{dp}$, $\frac{d_qU}{dq}$, $\frac{d_yU}{dy}$ noch andere Systeme identischer Gleichungen bekommen kann.

§. 178. Soll die gesuchte Function $y = \varphi(x)$ nur mit denjenigen ihr nächstanliegenden verglichen werden, welche bei dem speciellen Werthe $x = a$ alle mit $\varphi(a)$ einerlei Werth haben, so ist jetzt $\delta y_a = 0$, $\delta^2 y_a = 0$ etc.; und die Gleichung I reducirt sich auf

$$\text{VII)}\quad (\delta)U = \frac{d_qU}{dq} \cdot \delta y_\alpha + \frac{d_yU}{dy} \cdot \delta y + \frac{dU}{dx} \cdot \vartheta x$$

Die Quotienten $\frac{d_q U}{dq}$ und $\frac{d_y U}{dy}$ geben die Systeme der identischen Gleichungen; und ferner ist

$$\frac{\overline{d_x U}}{dx} = \frac{d_y U}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_x U}{dx}$$

Und so fort.

Da hier die Mutationen von den Werthänderungen unabhängig sind, und umgekehrt; so kann man auch (s. den Schluss des §. 113) die hier gesuchten Resultate dadurch gewinnen, dass man die (in §. 112 beschriebenen) zwei successiven Geschäfte vornimmt, wobei man vorerst

1) für y eine bestimmte Function aufsucht, wie dieses in der einundzwanzigsten Untersuchung (§. 167—173) gezeigt ist. Dann stellt man den primären Zustand $U' = \psi(x)$ her, und prüft ihn. Hierauf sucht man

2) für x einen bestimmten Werth auf, stellt den secundären Zustand U'' her, und prüft auch ihn.

Untersuchung 25.

Es ist U ein reeller (gesondert oder ungesondert gegebener) mit den Elementen $x, w, y, z, y_{a,b}, z_{a,b}, y_{\alpha,\beta}, z_{\alpha,\beta}$ gebildeter Ausdruck. Man sucht für y und z solche reelle Functionen der beiden nichtmutablen Veränderlichen x und w, und zugleich für x und w solche reelle Werthe, dass der dabei für U sich ergebende bestimmte Werth ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes wird.

§. 179. Wenn man irgend eine durch $\varphi'(x, w)$ dargestellte und irgend eine durch $\varphi''(x, w)$ dargestellte reelle Function bezüglich an die Stelle des y und des z, und wenn man ebenso $\varphi'(a, b)$, $\varphi''(a, b)$, $\varphi'(\alpha, \beta)$, $\varphi''(\alpha, \beta)$ bezüglich an die Stelle des $y_{a,b}, z_{a,b}, y_{\alpha,\beta}, z_{\alpha,\beta}$ in die ursprüngliche Gleichung einsetzt; so bekommt man auch für U eine Function von x und w, welche mit $\psi(x, w)$ bezeichnet sein mag. Wenn man zugleich dem x und dem w feste reelle Werthe beilegt, so bekommt auch U einen festen Werth, welcher mit U'' bezeichnet sein mag.

Man setze

I) $x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \cdots\cdots\cdots$ an die Stelle des x,

II) $w + \varkappa \cdot \vartheta w + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 w + \cdots\cdots\cdots$ an die Stelle des w,

III) $\varphi'(a, b) + \varkappa \cdot \delta y_{a,b} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_{a,b} + \cdots\cdots$ an die Stelle des $y_{a,b}$,

IV) $\varphi''(a, b) + \varkappa \cdot \delta z_{a,b} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z_{a,b} + \cdots\cdots$ an die Stelle des $z_{a,b}$,

V) $\varphi'(\alpha, \beta) + \varkappa \cdot \delta y_{\alpha,\beta} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_{\alpha,\beta} + \cdots\cdots$ an die Stelle des $y_{\alpha,\beta}$

VI) $\varphi''(\alpha, \beta) + \varkappa \cdot \delta z_{\alpha,\beta} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z_{\alpha,\beta} + \cdots\cdots$ an die Stelle des $z_{\alpha,\beta}$

VII) $\varphi'(x, w) + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)} y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta^2_{)} y + \cdots\cdots$ an die Stelle des y,

VIII) $\varphi''(x, w) + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)} z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta^2_{)} z + \cdots\cdots$ an die Stelle des z,

in die ursprüngliche Gleichung ein. Die vier Elemente $y_{a,b}, z_{a,b}, y_{\alpha,\beta}, z_{\alpha,\beta}$ sind nach

x und nach w constant, und desshalb sind die ihnen nächstanliegenden Nachbarzustände nur reine Mutationen; dagegen in y und z sind die nichtmutablen Veränderlichen x und w noch allgemein und können Werthänderungen erleiden; sonach sind die dem $y = \varphi'(x, w)$ und die dem $z = \varphi''(x, w)$ nächstanliegenden Nachbarzustände gemischte Mutationen.

Setzt man nun, um die Differentialquotienten bequemer bezeichnen zu können, p statt $y_{a,b}$, q statt $y_{\alpha,\beta}$, $\mathfrak{p}$ statt $z_{a,b}$, $\mathfrak{q}$ statt $z_{\alpha,\beta}$; so bekommt man

$$\text{IX)}\quad (\delta)U = \frac{d_yU}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_zU}{dz}\cdot\delta z + \frac{d_pU}{dp}\cdot\delta y_{a,b} + \frac{d_{\mathfrak{p}}U}{d\mathfrak{p}}\cdot\delta z_{a,b} + \frac{d_qU}{dq}\cdot\delta y_{\alpha,\beta}$$
$$+ \frac{d_{\mathfrak{q}}U}{d\mathfrak{q}}\cdot\delta z_{\alpha,\beta} + \frac{d_xU}{dx}\cdot\vartheta x + \frac{d_wU}{dw}\cdot\vartheta w$$

Hier ist bekanntlich

$$\frac{d_xU}{dx} = \frac{d_yU}{dy}\cdot\frac{d_xy}{dx} + \frac{d_zU}{dz}\cdot\frac{d_xz}{dx} + \frac{d_xU}{dx}$$

$$\frac{d_wU}{dw} = \frac{d_yU}{dy}\cdot\frac{d_wy}{dw} + \frac{d_zU}{dz}\cdot\frac{d_wz}{dw} + \frac{d_wU}{dw}$$

Da hier die Mutationen von den Werthänderungen unabhängig sind, und umgekehrt; so kann man auch (s. den Schluss des §. 113) die hier gesuchten Resultate dadurch gewinnen, dass man die (in §. 112 beschriebenen) zwei successiven Geschäfte vornimmt, wobei man vorerst

1) für y und z bestimmte Functionen von x und w aufsucht, den primären Zustand $U' = \psi(x, w)$ herstellt, und prüft. Hieraus sucht man

2) für x und w bestimmte Werthe, stellt den secundären Zustand U'' her, und prüft auch ihn.

Es ist nun leicht einzusehen, wie sich dergleichen Untersuchungen vervielfältigen und durchführen lassen.

Auch wären noch solche Untersuchungen aufzustellen, wo

zusammengesetzte Mutationen

angewendet werden. Dieses ist aber in Folge alles Vorhergehenden nicht mehr nöthig; und es genügt, auf die Aufgaben 31 und 32 zu verweisen.

Somit mag diese Abtheilung der Theorie des Grössten und Kleinsten geschlossen werden.

B) Ausdrücke, wo Differentiale vorkommen.

Untersuchung 26.

Es ist U ein reeller mit den Elementen x, y, $\frac{dy}{dx}$ gebildeter Ausdruck, und man sucht für y eine solche reelle Function des nichtmutablen Veränderlichen x, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 180. Da U ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden soll, so ist der Werth des x noch ganz allgemein, d. h. man kann dem x was immer für einen beliebigen besonderen reellen Werth beilegen. Wenn man nun irgend eine durch $\varphi(x)$ dargestellte reelle Function an die Stelle des y, folglich $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$, in die ursprüngliche Gleichung einsetzt; so bekommt man auch für U eine Function von x, welche mit $\psi(x)$ bezeichnet sein mag. Die dem $\varphi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstvorgehenden und nächstnachfolgenden Nachbarfunctionen werden (nach §. 60) im Allgemeinen dargestellt durch

$$\text{I)}\quad \varphi(x) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x) \ldots\ldots$$

wo jeder der Ausdrücke $\delta\varphi(x)$, $\delta^2\varphi(x)$, $\delta^3\varphi(x)$ etc. eine für sich beliebige reelle Function von x vorstellt, und $\varkappa$ bald als positiv bald als negativ im Momente des Verschwindens befindlich gedacht wird. Der aus diesen Functionen sich ergebende Differentialquotient erster Ordnung ist dann (man sehe §. 87)

$$\text{II)}\quad \frac{d\varphi(x)}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d\delta\varphi(x)}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2\varphi(x)}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d\delta^3\varphi(x)}{dx} + \ldots\ldots$$

Es ist (aus §. 91) bekannt, dass, wenn $\delta\varphi(x)$ jede beliebige Function von x ist, der Werth des $\frac{d\delta\varphi(x)}{dx}$ von dem Werthe des $\delta\varphi(x)$ ganz unabhängig ist, wenn gleich mit der Form des $\delta\varphi(x)$ auch die des $\frac{d\delta\varphi(x)}{dx}$ mitgegeben ist. Ebenso verhält es sich zwischen $\frac{d\delta^2\varphi(x)}{dx}$ und $\delta^2\varphi(x)$, zwischen $\frac{d\delta^3\varphi(x)}{dx}$ und $\delta^3\varphi(x)$, etc. etc.

§. 181. Weil man dem x einen beliebigen speciellen Werth $\mathfrak{x}$ beilegt, so kann man unter den dem $\varphi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunctionen drei verschiedene Arten besonders hervorheben.

A) Diejenigen dem $\varphi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunctionen, welche bei diesem speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ alle mit $\varphi(\mathfrak{x})$ einerlei Werth bekommen, während ihre ersten Differentialquotienten einen von $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}}$ verschiedenen Werth haben. Alle die so geeigenschafteten Functionen und ihre ersten Differentialquotienten sind bezüglich in den ganz allgemeinen Reihen I und II mit inbegriffen; und da bei dem speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ der Werth der Reihe I jetzt einerlei ist mit $\varphi(\mathfrak{x})$, so hat man folgende Gleichung

$$\varphi(\mathfrak{x}) = \varphi(\mathfrak{x}) + \varkappa \cdot \delta\varphi(\mathfrak{x}) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(\mathfrak{x}) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(\mathfrak{x}) + \ldots\ldots$$

Diese Gleichung soll bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ gelten, ist also nur möglich, wenn einzeln stattfindet $\delta\varphi(\mathfrak{x}) = 0$, $\delta^2\varphi(\mathfrak{x}) = 0$, $\delta^3\varphi(\mathfrak{x}) = 0$, etc. Letztere Gleichungen sind aber keine identischen, sondern gelten nur bei dem grade genommenen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$; denn wären sie identische Gleichungen, so würden auch die Differentialquotienten $\frac{d\delta\varphi(x)}{dx}$, $\frac{d\delta^2\varphi(x)}{dx}$, $\frac{d\delta^3\varphi(x)}{dx}$, etc. zu Null bei jedem Werthe des x. Sowie nun diejenigen Functionen, welche bei dem speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ mit $\varphi(\mathfrak{x})$ einerlei Werth bekommen, immer andere und andere sind, je nachdem man sich unter $\mathfrak{x}$ einen immer andern und andern speciellen Werth denkt; ebenso müssen die Gleichungen $\delta\varphi(\mathfrak{x}) = 0$, $\delta^2\varphi(\mathfrak{x}) = 0$, $\delta^3\varphi(\mathfrak{x}) = 0$, etc. immer andere und andere sein, je nachdem man sich unter $\mathfrak{x}$ einen immer andern und andern Werth denkt.

Es bedarf keines nähern Nachweises, dass es unter den Functionen überhaupt, also auch unter den dem $\varphi(x)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen eine Menge solcher gibt, welche bei dem grade genommenen speciellen $\mathfrak{x}$ alle mit $\varphi(\mathfrak{x})$ einerlei Werth haben, während die von eben diesen Functionen abgeleiteten ersten Differentialquotienten einen von $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}}$ verschiedenen Werth bekommen können. Namentlich kann man in vielen Functionen, welche noch einen willkürlichen Constanten enthalten, denselben nach dem Werthe $\mathfrak{x}$ so einrichten, dass dabei jede dieser Functionen mit $\varphi(\mathfrak{x})$ einerlei Werth bekommt. Dieser einmal so eingerichtete Constante bleibt dann in allen Differentialquotienten ungeändert; und sonach können die ersten Differentialquotienten, je nach Verschiedenheit der Urfunctionen, allerlei verschiedene Werthe annehmen. (Man sehe noch einmal §. 87.)

B) Es kann aber auch unter den dem $\varphi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunctionen eine Menge solcher geben, wo bei einem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ die ersten Differentialquotienten alle mit $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}}$ einerlei Werth haben,

während die Urfunctionen selbst einen von $\varphi(\mathfrak{x})$ verschiedenen Werth bekommen. Alle die so geeigenschafteten Functionen und ihre ersten Differentialquotienten sind bezüglich in den allgemeinen Reihen I und II mit inbegriffen; und da bei dem speciellen $\mathfrak{x}$ der Werth der Reihe II jetzt einerlei ist mit $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_\mathfrak{x}$, so hat man folgende Gleichung:

$$\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_\mathfrak{x} = \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_\mathfrak{x} + \varkappa \cdot \left(\frac{d\delta\varphi(x)}{dx}\right)_\mathfrak{x} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d\delta^2\varphi(x)}{dx}\right)_\mathfrak{x} + \ldots\ldots$$

Diese Gleichung soll bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ gelten, ist also nur möglich, wenn einzeln stattfindet $\left(\frac{d\delta\varphi(x)}{dx}\right)_\mathfrak{x} = 0$, $\left(\frac{d\delta^2\varphi(x)}{dx}\right)_\mathfrak{x} = 0$, etc. Letztere Gleichungen sind aber keine identischen, sondern gelten nur bei dem grade genommenen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$. Sowie nun diejenigen Functionen, deren erste Differentialquotienten bei dem speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ alle mit $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_\mathfrak{x}$ einerlei Werth bekommen, immer andere und andere sind, je nachdem man sich unter $\mathfrak{x}$ einen immer andern und andern speciellen Werth denkt; ebenso müssen die Gleichungen $\left(\frac{d\delta\varphi(x)}{dx}\right)_\mathfrak{x} = 0$, $\left(\frac{d\delta^2\varphi(x)}{dx}\right)_\mathfrak{x} = 0$ etc. immer andere und andere sein, je nachdem man sich unter $\mathfrak{x}$ einen immer andern und andern speciellen Werth denkt.

Es bedarf auch hier keines nähern Nachweises, dass es unter den Functionen überhaupt, also auch unter den dem $\varphi(x)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen eine Menge solcher gibt, wo bei dem grade genommenen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ die ersten Differentialquotienten alle mit $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_\mathfrak{x}$ einerlei Werth haben, während die zugehörigen Urfunctionen einen von $\varphi(\mathfrak{x})$ ganz verschiedenen Werth bekommen können. Namentlich kann man in vielen Functionen, welche einen willkürlichen Constanten enthalten, diesen Constanten nach dem willkürlichen $\mathfrak{x}$ noch so einrichten, dass dabei ihre ersten Differentialquotienten mit $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_\mathfrak{x}$ einerlei Werth bekommen. Dieser einmal so eingerichtete Constante wird hierauf unverändert in die Urfunction zurückgedacht; und dann können diese verschiedenen Urfunctionen verschiedene Werthe bekommen, während ihre ersten Differentialquotienten alle mit $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_\mathfrak{x}$ einerlei Werth haben. (Man sehe noch einmal §. 87.)

C) Es kann auch unter den dem $\varphi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunctionen eine Menge solcher geben, welche bei diesem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ die beiden vorigen Eigenschaften zugleich besitzen, d. h. jetzt haben bei $\mathfrak{x}$ nicht nur alle diese Functionen mit $\varphi(\mathfrak{x})$ einerlei Werth, sondern es haben auch die ersten Differentialquotienten dieser Functionen alle mit $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_\mathfrak{x}$ einerlei Werth. Bei allen diesen Functionen finden dann die zwei Systeme von Gleichungen

$$\delta\varphi(\mathfrak{x}) = 0, \quad \delta^2\varphi(\mathfrak{x}) = 0, \quad \delta^3\varphi(\mathfrak{x}) = 0, \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{d\delta\varphi(x)}{dx}\right)_\mathfrak{x} = 0, \quad \left(\frac{d\delta^2\varphi(x)}{dx}\right)_\mathfrak{x} = 0, \quad \left(\frac{d\delta^3\varphi(x)}{dx}\right)_\mathfrak{x} = 0, \text{ etc.}$$

zugleich statt. Keine einzige dieser Gleichungen ist aber eine identische, sondern sie gelten alle nur bei dem grade genommenen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$; und sie werden immer andere und andere sein, je nachdem man sich unter $\mathfrak{x}$ einen immer andern und andern speciellen Werth denkt.

Es bedarf keines nähern Nachweises, dass es unter den Functionen überhaupt, also auch unter den dem $\varphi(x)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen eine Menge solcher gibt, welche bei dem grade genommenen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ die hier besagten zwei Eigenschaften haben. Namentlich kann man in vielen Functionen, welche zwei willkürliche Constanten enthalten, diese Constanten nach dem Werthe $\mathfrak{x}$ so einrichten, dass diese Functionen und ihre ersten Differentialquotienten bezüglich mit $\varphi(\mathfrak{x})$ und $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_\mathfrak{x}$ einerlei Werth bekommen. (Man sehe noch einmal §. 87.)

Man ist also jetzt auf dem Punkte, bei vorliegender Untersuchung drei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall.

§. 182. Soll die für y genommene und durch $\varphi(x)$ dargestellte Function mit allen möglichen ihr nächstanliegenden verglichen werden, so hat man die Reihen I und II, welche kürzer auch dargestellt werden durch

$$\text{III)}\quad \varphi(x) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots$$

$$\text{IV)}\quad \frac{d\varphi(x)}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d\delta^3 y}{dx} + \ldots\ldots$$

bezüglich an die Stelle des y und $\frac{dy}{dx}$ in die ursprüngliche Gleichung überall einzuführen; und man bekommt alle möglichen dem $U' = \psi(x)$ nächstanliegenden Nachbarzustände, welche mit $(U' + \Delta U)$ oder mit $(\psi(x) + \Delta U)$ bezeichnet werden, und, wenn man sie in eine nach Potenzen des $\varkappa$ fortschreitende Reihe entwickelt will, nur in eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt werden dürfen, eben weil $\varkappa$ im Momente des Verschwindens befindlich ist. Wenn nun die Differenz $(\psi(x) + \Delta U) - \psi(x)$ bei dem im Momente des Verschwindens gedachten und bald als positiv bald als negativ genommenen $\varkappa$ sowie bei allen beliebigen reellen Werthen des x reell bleibt; so findet

1) ein Maximum-stand statt, wenn diese Differenz beständig negativ ist; dagegen findet

2) ein Minimum-stand statt, wenn diese Differenz beständig positiv ist; es findet aber

3) weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt, wenn diese Differenz weder als positiv noch als negativ gelten kann.

Da der Werth des $\frac{d\delta y}{dx}$ von dem Werthe des δy, da ebenso der Werth des $\frac{d\delta^2 y}{dx}$ von dem Werthe des $\delta^2 y$ etc. ganz unabhängig ist; so ist es auch nicht nöthig, zur Gewinnung des Prüfungsmittels die ganze Reihe I (oder III) und II (oder IV) an die Stelle des y und $\frac{dy}{dx}$ in die ursprüngliche Gleichung einzusetzen; sondern man kann zur Bequemlichkeit

$$\varkappa \cdot \mathfrak{P} \text{ anstatt } \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots$$

und

$$\varkappa \cdot \frac{d\mathfrak{P}}{dx} \text{ anstatt } \varkappa \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d\delta^3 y}{dx} + \ldots\ldots$$

einführen, und erst, wenn man den für ΔU sich ergebenden Ausdruck auf die geeignete Form gebracht hat, statt $\varkappa \cdot \mathfrak{P}$ und $\varkappa \cdot \frac{d\mathfrak{P}}{dx}$ die entsprechenden Reihen zurückführen.

$$\text{Dabei ist } \mathfrak{P} = \delta y + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots$$

$$\text{und } \frac{d\mathfrak{P}}{dx} = \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \frac{d\delta^3 y}{dx} + \ldots\ldots$$

woran man erkennt, dass, weil $\varkappa$ im Momente des Verschwindens ist, das $\mathfrak{P}$ gleichzeitig mit δy, und das $\frac{d\mathfrak{P}}{dx}$ gleichzeitig mit $\frac{d\delta y}{dx}$ endlich und positiv oder negativ ist, jenachdem man dem $\frac{d\delta y}{dx}$ willkürliche Werthe beilegt.

Hat man nun auf diese Weise eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt, so hat man zu unterscheiden:

1) Das erste Glied dieser für $\varDelta U$ hergestellten Reihe enthält $\mathfrak{P}$ und $\frac{d\mathfrak{P}}{dx}$ zugleich. Hier hat man nur zu untersuchen, ob dieses erste Glied beständig einerlei Zeichen behält, und kein einziges wenn auch noch so spätes Glied aus irgend einem Grunde imaginär werden kann. Soll aber dieses erste Glied beständig einerlei Zeichen behalten, so muss namentlich der Exponent des $\varkappa$ eine ganze grade Zahl, oder ein in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch mit gradem Zähler nnd ungradem Nenner sein.

2) Das erste Glied dieser für $\varDelta U$ hergestellten Reihe enthält nur $\mathfrak{P}$ und nicht auch $\frac{d\mathfrak{P}}{dx}$, sondern das $\frac{d\mathfrak{P}}{dx}$ kommt erst in einem späteren Gliede vor. Hier ist nicht genug, wenn das erste Glied das Zeichen nicht wechseln kann; sondern man bedenke, dass die dem $U' = \psi(x)$ nächstanliegenden Nachbarzustände $(\psi(x) + \varDelta U)$ dadurch erzeugt werden, dass man an die Stelle des y alle die dem $\varphi(x)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen, und dass man an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$ die aus allen diesen (dem $\varphi(x)$ nächstanliegenden) Nachbarfunctionen sich ergebenden ersten Differentialquotienten setzt. Unter diesen Functionen befinden sich dann auch die, welche bei dem beliebigen speciellen Werth $\mathfrak{x}$ alle mit $\varphi(\mathfrak{x})$ einerlei Werth haben, während die von eben diesen Functionen abgeleiteten ersten Differentialquotienten einen von $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{r}}$ ganz verschiedenen Werth bekommen können. Bei diesen Functionen ist also $\delta\varphi(\mathfrak{x}) = 0$, $\delta^2\varphi(\mathfrak{x}) = 0$ etc., während $\left(\frac{d\delta\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{r}}$, $\left(\frac{d\delta^2\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{r}}$, etc. nicht zu Null werden, so dass es Fälle gibt, wo $\mathfrak{P} = 0$ ist, während $\frac{d\mathfrak{P}}{dx}$ nicht zu Null wird. Hat man nun eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe für $\varDelta U$ hergestellt, wo erst in einem späteren Gliede das $\frac{d\mathfrak{P}}{dx}$ vorkommt; hat man sich dann überzeugt, dass kein einziges wenn auch noch so spätes Glied aus irgend einem Grunde imaginär werden kann; und behält das erste Glied beständig einerlei Zeichen: so muss man noch zusehen, ob bei $\mathfrak{P} = 0$ dasjenige von den zurückbleibenden Gliedern, welches jetzt mit der niedrigsten Potenz des $\varkappa$ sowie auch mit $\frac{d\mathfrak{P}}{dx}$ versehen ist, mit dem (vorher vorhandenen nun aber weggefallenen) ersten Gliede einerlei und ein unwandelbares Zeichen behält. Nur unter dieser Bedingung kann ein Maximumstand oder Minimum-stand bestehen. (Man sehe Aufgabe 66.)

3) Das erste Glied dieser für $\varDelta U$ hergestellten Reihe enthält nur $\frac{d\mathfrak{P}}{dx}$ und nicht auch $\mathfrak{P}$, sondern das $\mathfrak{P}$ kommt erst in einem späteren Gliede vor. Auch hier ist nicht genug, wenn das erste Glied sein Zeichen nicht wechseln kann; sondern man bedenke, dass die dem $U' = \psi(x)$ nächstanliegenden Nachbarzustände $(\psi(x) + \varDelta U)$ dadurch erzeugt werden, dass man an die Stelle des y alle dem $\varphi(x)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen, und dass man an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$ die aus allen diesen (dem $\varphi(x)$ nächstanliegenden) Nachbarfunctionen sich ergebenden ersten Differentialquotienten setzt. Unter diesen Functionen befinden sich dann auch die, deren erste Differentialquotienten bei dem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ alle mit $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{r}}$ einerlei Werth haben, während die Urfunctionen selbst einen von $\varphi(\mathfrak{x})$ ganz verschiedenen Werth bekommen. Bei diesen Functionen ist also $\left(\frac{d\delta\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{r}} = 0$, $\left(\frac{d\delta^2\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{r}} = 0$, etc., während $\delta\varphi(\mathfrak{x})$, $\delta^2\varphi(\mathfrak{x})$ etc. nicht zu Null werden, so dass es Fälle gibt, wo $\frac{d\mathfrak{P}}{dx} = 0$ ist, während $\mathfrak{P}$ nicht zu Null wird. Hat man nun eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe für $\varDelta U$ hergestellt, wo erst in einem späteren Gliede das $\mathfrak{P}$ vorkommt; hat man sich dann überzeugt, dass kein einziges wenn auch noch so spätes Glied aus irgend einem Grunde imaginär werden kann; und behält

das erste Glied beständig einerlei Zeichen, so muss man noch zusehen, ob bei $\frac{d\mathfrak{P}}{dx} = 0$ dasjenige von den zurückbleibenden Gliedern, welches jetzt mit der niedrigsten Potenz des $\varkappa$ sowie auch mit $\mathfrak{P}$ versehen ist, mit dem (vorher vorhandenen nun aber weggefallenen) ersten Gliede einerlei und ein unwandelbares Zeichen behält. Nur unter dieser Bedingung kann ein Maximum-stand oder Minimum-stand bestehen. (Man sehe Aufgabe 67.)

§. 183. Soll nun bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ die Differenz $(\psi(x) + \Delta U) - \psi(x)$ unter allen Umsänden ihr Zeichen nicht wechseln können, so müssen (wie schon im vorigen §. erörtert ist) in der für ΔU herzustellenden Reihe alle die verschiedenen Ausdrücke, welche möglicherweise das erste Glied werden können, einerlei und ein unwandelbares Zeichen haben; denn das Zeichen der Summe aller Glieder ist mit dem Zeichen des jedesmaligen ersten Gliedes einerlei. Wenn man also für ΔU die nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt, so darf sich keineswegs die (in §. 62 und 63 aufgestellte) allgemeine Reihenform

$$\Delta U = \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U + \ldots\ldots$$

ergeben; denn dabei würde ΔU zugleich mit $\varkappa$ sein Zeichen ändern. Setzt man zur Abkürzung noch p statt $\frac{dy}{dx}$, so ist

$$\delta U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p U}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\delta^2 U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_p U}{dp} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_p U}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2 U}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

etc. etc.

Die für ΔU herzustellende Reihe darf also, was man auch immer für Umstände eintreten lassen mag, weder mit $\varkappa \cdot \left(\frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p U}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)$, noch mit $\varkappa \cdot \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y$, noch mit $\varkappa \cdot \frac{d_p U}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$ anfangen, während δy jede beliebige reelle Function von x vorstellt, der Werth des $\frac{d\delta y}{dx}$ von dem des δy ganz unabhängig ist, und man dem Elemente x jeden beliebigen reellen Werth beilegen kann. Es können aber keine Umstände eintreffen, bei welchen die Reihe mit einem dieser drei Ausdrücke anfängt, sobald eines von folgenden vier Systemen zweier Gleichungen stattfindet:

$$1)\quad \frac{d_y U}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_p U}{dp} = 0$$

$$2)\quad \frac{d_y U}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_p U}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

$$3)\quad \frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_p U}{dp} = 0$$

$$4)\quad \frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_p U}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

Alle diese Gleichungen müssen für jeden beliebigen Werth des x gelten, und jedes dieser vier Systeme, welches überhaupt möglich ist, kann rückwärts noch dazu benützt werden, zu bestimmen, was $\varphi(x)$ für eine Function ist, bei welcher möglicherweise U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Sollte einmal einer der Quotienten $\frac{d_y U}{dy}$ oder $\frac{d_p U}{dp}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen, so wird die (schon im vorigen §. beschriebene) directe Reihenentwickelung nicht nur die dem $\psi(x)$ nächstanliegenden Nachbarzustände herstellen, sondern sie wird auch die wahre Bedeutung dieser unbestimmten Formen angeben, wie dieses in vielen Aufgaben geschehen ist.

Man hat aber hier jedesmal zwei Gleichungen, welche bei einer und derselben für y zu setzenden Function erfüllt werden sollen. Desshalb wird die Aufgabe oft eine überbestimmte sein, d. h. es werden sich oft die zu einem Systeme gehörigen Gleichungen widersprechen.

§. 184. Um in das Praktische einzuführen, nehme man irgend eines dieser Systeme z. B. das erste vor; und man hat für y eine solche Function von x zu suchen, dass dabei die zwei Gleichungen

$$\frac{d_y U}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_p U}{dp} = 0$$

zugleich identisch werden, wie auf folgende Weise geschehen mag:

I) Man sehe zu, ob diese beiden Gleichungen einen gemeinschaftlichen Factor haben, welcher y als Function von x liefert. Ist dieser gemeinschaftliche Factor ein Differentialausdruck, so geht durch seine Integration ein willkürlicher Constanter ein, so dass die Aufgabe noch einer Nebenbedingung unterworfen werden kann; dergleichen sind z. B.

1) es soll y den bestimmten Werth b bekommen, wenn man dem x den bestimmten Werth a beilegt;

2) es soll der Differentialquotient irgend einer Ordnung den bestimmten Werth g bekommen, wenn man dem x den bestimmten Werth a beilegt;

3) es soll irgend ein Ausdruck $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots\cdots\right)$ den bestimmten Werth h bekommen, wenn man dem x den bestimmten Werth a beilegt.

II) Man integrire eine dieser Gleichungen, z. B. $\frac{d_y U}{dy} = 0$, so bekommt man für y eine Function von x mit einem willkürlichen Constanten c. Diese Function sei $y = \pi(x, c)$, und man hat vor Allem zu untersuchen, ob durch diese Function auch die andere Gleichung $\frac{d_p U}{dp} = 0$ identisch wird. Wird sie nicht identisch, so existirt kein den beiden vorgenommenen Gleichungen gemeinschaftliches Integral, d. h. dieselben widersprechen sich. Man führe also $\pi(x, c)$ und $\frac{d_x \pi(x, c)}{dx}$ bezüglich statt y und $\frac{dy}{dx}$ in die Gleichung $\frac{d_p U}{dp} = 0$ ein, und unterscheide folgende drei Fälle:

α) Die Gleichung $\frac{d_p U}{dp} = 0$ wird bei jedem Werthe des c erfüllt. Man hat also ein den beiden vorgenommenen Gleichungen gemeinsames allgemeines Integral.

β) Es ergibt sich, wenn man die oben vorgezeigte Substitution ausgeführt hat, aus der Gleichung $\frac{d_p U}{dp} = 0$ für c ein constanter (von x unabhängiger) Ausdruck. Man hat also ein den beiden vorgenommenen Gleichungen gemeinschaftliches und zur Gleichung $\frac{d_y U}{dy} = 0$ gehöriges besonderes Integral.

γ) Ergibt sich für c kein von x unabhängiger Ausdruck, so kann doch ein zur Gleichung $\frac{d_y U}{dy} = 0$ gehöriges singuläres Integral existiren, welches auch der Gleichung

$\frac{d_pU}{dp} = 0$ genügt. Dieses zu $\frac{d_yU}{dy} = 0$ gehörige singuläre Integral wird aber auf folgende Weise aufgefunden: man setze $\frac{d_c\pi(x, c)}{dc} = 0$, und bestimme daraus c als Function von x, so dass man $c = f(x)$ hat, und $y = \pi(x, c)$ in $y = \pi(x, f(x))$ übergeht. Hierauf führe man $\pi(x, f(x))$ und $\frac{d\pi(x, f(x))}{dx}$ bezüglich statt y und $\frac{dy}{dx}$ in Gleichung $\frac{d_pU}{dp} = 0$ überall ein; und wird letztere Gleichung identisch, so kann $y = \pi(x, f(x))$ eine Function sein, welche U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande macht.

Wie man mit $\frac{d_yU}{dy} = 0$ verfahren ist, so kann man auch mit $\frac{d_pU}{dp} = 0$ verfahren, und umgekehrt.

III) Man eliminire aus den beiden vorgenommenen Gleichungen den Quotienten $\frac{dy}{dx}$, so bekommt man gradezu y als Function von x ohne willkürlichen Constanten. Allein wenn man die so hergestellte Function y von x differentiirt, so wird nicht immer durch diese Differentiation sich der nemliche Ausdruck für $\frac{dy}{dx}$ ergeben, welcher sich durch Elimination ergibt. Es ist also auch hier nöthig, noch eine Prüfung anzustellen. Hat man nemlich $\frac{dy}{dx}$ aus den beiden Gleichungen eliminirt, und $y = \varphi(x)$ bekommen; so folgt durch Differentiation, dass $\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx}$. Führt man nun $\varphi(x)$ und $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ bezüglich statt y und $\frac{dy}{dx}$ in die beiden vorgenommenen Gleichungen ein, so müssen dadurch beide zugleich identisch werden, wenn die Aufgabe möglich sein soll. Ist namentlich $\varphi(x)$ eine vielförmige Function, so wird sich bei dieser Prüfung noch zeigen, ob alle Formen zugleich zulässig sind oder nicht.

Bei dieser auf Elimination gegründeten Methode kann sich aber für y niemals eine Function ergeben, in welche noch ein willkürlicher Constanter eingeht; desshalb ist diese Methode nicht so vollkommen, als die vorige (unter II mitgetheilte).

IV) Man kann auch, ohne eine der Gleichungen $\frac{d_yU}{dy} = 0$ oder $\frac{d_pU}{dp} = 0$ zu integriren, die singulären Integrale derselben aufsuchen, und dann zusehen, ob sich darunter eines vorfindet, welches den beiden vorgenommenen Gleichungen zugleich genügt.

Ist eine der beiden vorgenommenen Gleichungen schon eine bestimmte Urgleichung, so kann nur diese die gesuchte Function sein, und man muss untersuchen, ob sie der andern Gleichung nicht widerspricht.

Ein Hauptpunkt ist auch hier, dass man die zu untersuchenden Gleichungen jedesmal soviel als möglich in Factoren zerlegt.

Das hier für das erste System zweier Gleichungen auseinandergesetzte Verfahren gilt ganz unverändert auch bei den drei andern Systemen.

§. 185. Diese (im vorvorigen §. aufgestellten) vier Systeme zweier Gleichungen sind aber die einzigen, aus welchen man für y eine solche Function von x entnehmen kann, wobei möglicherweise ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet, wie man sich auf folgende Weise überzeugen kann:

1) Wenn keiner der Quotienten $\frac{d_yU}{dy}$ und $\frac{d_pU}{dp}$ zu Null werden oder Null in den Nenner bekommen kann; so ist $\varkappa \cdot \left(\frac{d_yU}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_pU}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)$ jedenfalls das erste Glied der für ΔU herzustellenden Reihe, wobei ΔU zugleich bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ sein Zeichen ändert.

2) Ist entweder $\frac{d_y U}{dy} = 0$ oder $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$, während weder $\frac{d_p U}{dp} = 0$ noch $\frac{d_p U}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$ ist; so kann in der für ΔU herzustellenden Reihe das Glied, welches unter den mit der Mutation des $\frac{dy}{dx}$ behafteten das erste ist, kein anderes als $\varkappa \cdot \frac{d_p U}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$ sein. Nun sind unter den der für y gesuchten Function nächstanliegenden Nachbarfunctionen auch diejenigen enthalten, welche bei dem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ alle mit $\varphi(\mathfrak{x})$ einerlei Werth bekommen, wobei $\delta\varphi(\mathfrak{x}) = 0$, $\delta^2\varphi(\mathfrak{x}) = 0$, etc. ist, so dass unter den Ausdrücken, die jetzt zurückbleiben, $\varkappa \cdot \frac{d_p U}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$ der erste ist, also jetzt ΔU mit $\varkappa$ sein Zeichen ändern könnte.

3) Ist entweder $\frac{d_p U}{dp} = 0$ oder $\frac{d_p U}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$, während weder $\frac{d_y U}{dy} = 0$ noch $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ ist; so kann in der für ΔU herzustellenden Reihe das Glied, welches unter den mit der Mutation des y behafteten das erste ist, kein anderes als $\varkappa \cdot \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y$ sein. Nun sind unter den der für y gesuchten Function nächstanliegenden Nachbarfunctionen auch diejenigen enthalten, deren erster Differentialquotient bei dem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ alle mit $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}}$ einerlei Werth haben, wobei $\left(\frac{d\delta\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}} = 0$, $\left(\frac{d\delta^2\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}} = 0$ etc. ist, so dass unter den Ausdrücken, die jetzt zurückbleiben, $\varkappa \cdot \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y$ der erste ist, also jetzt ΔU mit $\varkappa$ sein Zeichen ändern könnte.

Wenn aber mehrere dieser Systeme zweier Gleichungen zugleich bestehen, oder wenn man diese Gleichungen in Factoren zerlegen kann; dann gibt es öfters mehrere Functionen für y, welche einen Maximum-stand oder Minimum-stand liefern. Man erinnere sich also daran, dass jeder durch irgend eine für y gefundene Function erzeugte primäre Zustand $U' = \psi(x)$ niemals mit den dem Werthe nach in angebbarer Entfernung befindlichen Zuständen, sondern nur mit allen unmittelbar anliegenden Nachbarzuständen verglichen werden darf. Insofern aber bei mehreren für y gefundenen Functionen sich grössere U ergeben, als bei allen andern (für y zu setzenden) nächstanliegenden Nachbarfunctionen und bei den daraus hervorgehenden (für $\frac{dy}{dx}$ zu setzenden) ersten Differentialquotienten; ist auch U mehrmals ein Maximum-stand. Im umgekehrten Falle ist U mehrmals ein Minimum-stand.

§. 186. Hier mag noch ein Nachtrag zur Herstellung des Prüfungsmittels folgen. Wenn man sich auf irgend eine Weise überzeugt hat, dass kein einziges auch noch so spätes Glied der für ΔU herzustellenden Reihe aus irgend einem Grunde, z. B. wenn $\varkappa$ vom Positiven ins Negative übergeht, und dgl., imaginär werden kann; so hat man zweierlei zu unterscheiden: ist nemlich

1) die für y gesuchte Function aus einem der drei Systeme, wo von den Quotienten $\frac{d_y U}{dy}$ und $\frac{d_p U}{dp}$ entweder nur einer oder auch beide in den Nenner Null bekommen, entnommen, so muss das Prüfungsmittel durch directe Reihenentwickelung hergestellt werden. Ist aber

2) die für y gesuchte Function aus dem Systeme, wo sowohl $\frac{d_y U}{dy} = 0$ als auch $\frac{d_p U}{dp} = 0$, entnommen; so ist es nicht immer nöthig, directe Reihenentwicklung zu Hilfe zu nehmen. Wegen $\frac{d_y U}{dy} = 0$ und $\frac{d_p U}{dp} = 0$ bleibt nemlich im Allgemeinen nur

$$\Delta U = \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_p U}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2 U}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wenn nun keiner dieser partiellen Differentialquotienten zu Null wird, oder Null in den Nenner bekommt; so ist

A) Das im Momente des Verschwindens befindliche ΔU beständig negativ, wenn der zu $\frac{\varkappa^2}{1.2}$ gehörige Factor beständig negativ bleibt; dagegen ist

B) Das im Momente des Verschwindens befindliche ΔU beständig positiv, wenn der zu $\frac{\varkappa^2}{1.2}$ gehörige Factor beständig positiv ist.

Die weitere Untersuchung ist ganz, wie in §. 125, braucht also nicht wiederholt zu werden.

Zweiter Fall.

§. 187. Führt man $\varphi(x)$ an die Stelle des y, und $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$ in die ursprüngliche Gleichung überall ein; so bekommt man, wie gesagt, auch für U eine Function von x, welche mit $\psi(x)$ bezeichnet sein mag. Soll nun die gesuchte Function $\varphi(x)$ bei jedem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ nur mit denjenigen ihr nächstanliegenden verglichen werden, welche alle mit $\varphi(\mathfrak{x})$ einerlei Werth haben, während bei dem nemlichen Werthe $\mathfrak{x}$ die von eben diesen Functionen abgeleiteten ersten Differentialquotienten allerlei verschiedene Werthe bekommen können; so ergeben sich die dem $U = \psi(x)$ nächstanliegenden Nachbarzustände $(\psi(x) + \Delta U)$ jedesmal dadurch, dass man die Reihe II oder IV, d. h. die Reihe

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d\delta^3 y}{dx} \cdot \ldots\ldots$$

an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$, dagegen aber nur $\varphi(x)$ an die Stelle des y in die ursprüngliche Gleichung überall einsetzt. Denn obgleich $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d\delta^2 y}{dx}$, $\frac{d\delta^3 y}{dx}$, etc. nicht verschwinden, so muss doch einzeln $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\delta^3 y = 0$, etc. sein, weil es sonst nicht der Fall wäre, dass man $\varphi(\mathfrak{x})$ bei dem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ nur mit solchen Functionen vergleicht, die mit $\varphi(\mathfrak{x})$ einerlei Werth haben (Man sehe §. 181 A). Ist nun bei dieser Einschränkung die Function $\varphi(x)$ von der Beschaffenheit, dass das unendlichkleine ΔU bei allen beliebigen reellen Werthen des Elementes x negativ oder positiv bleibt; so findet bezüglich ein Maximum-stand oder Minimum-stand statt; und beides kann jetzt um so eher stattfinden, weil man eine Menge der dem $U' = \psi(x)$ nächstanliegenden Nachbarzustände, welche man im ersten Falle alle berücksichtigt hat, hier ganz vernachläsigt. Soll nun das unendlichkleine ΔU unter allen Umständen sein Zeichen nicht wechseln können; so kann die für ΔU herzustellende Reihe keineswegs die (in §. 62 aufgestellte) allgemeine Reihenform

$$\Delta U = \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U + \ldots\ldots$$

haben, wo, eben weil $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, etc. ist, nur

$$\delta U = \frac{d_p U}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\delta^2 U = \frac{d_p U}{dp} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{d_p^2 U}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

etc. etc.

sein kann. Die für ΔU herzustellende Reihe darf also nicht mit $\varkappa \cdot \frac{d_p U}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$ anfangen,

während der Werth des $\frac{d\delta y}{dx}$ ganz beliebig ist, und man dem Elemente x was immer für einen beliebigen reellen Werth beilegen kann. Die Reihe fängt aber nicht mit $\varkappa \cdot \frac{d_p U}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$ an, wenn eine von folgenden zwei Gleichungen

$$\text{entweder } \frac{d_p U}{dp} = 0 \text{ oder } \frac{d_p U}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

stattfindet. Beide Gleichungen müssen für jeden Werth des x gelten, d. h. identische sein; und jede, welche überhaupt möglich ist, kann rückwärts noch dazu benützt werden, zu bestimmen, was $\varphi(x)$ für eine Function ist, bei welcher U möglicherweise ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird. Da man aber hier jedesmal nur eine einzige Gleichung hat, aus welcher die für y zu suchende Function bestimmt werden soll; so wird die Aufgabe jetzt niemals eine überbestimmte sein, sondern in der Regel ein brauchbares Resultat liefern.

Bei Herstellung des Prüfungsmittels unterscheide man:

1) Es kann nur durch directe Reihenentwickelung gewonnen werden. Dabei muss man $\varphi(x)$ an die Stelle des y, und

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d\delta^3 y}{dx} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

oder kurzweg $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d\mathfrak{P}}{dx}\right)$ an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$ überall einsetzen.

2) Es kann an einem der Quotienten $\delta^2 U$, $\delta^4 U$, etc. gewonnen werden. Dabei ist nur $\delta^2 U = \frac{d_p^2 U}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$; und wenn gleichzeitig $\frac{d_p^2 U}{dp^2} = 0$ und $\frac{d_p^3 U}{dp^3} = 0$ ist, so bleibt nur $\delta^4 U = \frac{d_p^4 U}{dp^4} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^4$, etc. etc. Der dabei vorzunehmende Gang ist dem des §. 118 analog, wesshalb es genügt, dahin zu verweisen.

Dritter Fall.

§. 188. Führt man $\varphi(x)$ an die Stelle des y, und $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$ in die ursprüngliche Gleichung ein; so bekommt man, wie gesagt, auch für U eine Function von x, welche mit $\psi(x)$ bezeichnet sein mag. Soll nun die gesuchte Function $\varphi(x)$ bei jedem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ nur mit denjenigen ihr nächstanliegenden verglichen werden, deren erste Differentialquotienten alle mit $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}}$ einerlei Werth haben, während bei dem nemlichen Werthe $\mathfrak{x}$ diese verschiedenen Urfunctionen selbst allerlei verschiedene Werthe bekommen können; so ergeben sich die dem $\psi(\mathfrak{x})$ jedesmal nächstanliegenden Nachbarzustände $(\psi(\mathfrak{x}) + \Delta U)$ dadurch, dass man die Reihe I oder III, d. h.

$$\varphi(x) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

an die Stelle des y, dagegen aber nur $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$ in die ursprüngliche Gleichung einsetzt. Denn obgleich δy, $\delta^2 y$, etc. nicht verschwinden, so muss doch einzeln $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, etc. sein, weil es sonst nicht der Fall wäre, dass man $\varphi(\mathfrak{x})$ bei dem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ nur mit solchen Functionen vergleicht, deren erste Differentialquotienten mit $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}}$ einerlei Werth haben (Man sehe noch §. 181 B). Ist nun bei dieser Einschränkung die Function $\varphi(x)$ von der Beschaffenheit, dass das unendlichkleine ΔU bei allen beliebigen reellen Werthen des Elementes x beständig negativ oder positiv bleibt, so findet bezüglich ein Maximum-stand oder Minimum-stand statt; und beides kann jetzt um so eher stattfinden, weil man eine Menge

der dem $U' = \psi(x)$ nächstanliegenden Nachbarzustände, welche man im ersten Falle alle berücksichtigt hat, ganz vernachlässigt. Soll nun das unendlichkleine ΔU unter allen Umständen sein Zeichen nicht wechseln können; so kann die für ΔU herzustellende Reihe keineswegs die (in §. 62 aufgestellte) allgemeine Reihenform

$$\Delta U = \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U + \cdots\cdots$$

haben, wo, eben weil $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, etc. etc. ist, nur

$$\delta U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y$$

$$\delta^2 U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \delta y^2$$

etc. etc.

sein kann. Die für ΔU herzustellende Reihe darf also nicht mit $\varkappa \cdot \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y$ anfangen, während der Werth des δy ganz beliebig ist, und man dem Elemente x was immer für einen beliebigen reellen Werth beilegen kann. Die Reihe fängt aber nicht mit $\varkappa \cdot \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y$ an, wenn eine von folgenden zwei Gleichungen

$$\text{entweder } \frac{d_y U}{dy} = 0, \text{ oder } \frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$$

stattfindet. Beide Gleichungen müssen für jeden Werth des x gelten, d. h. identische sein; und jede, welche überhaupt möglich ist, kann rückwärts noch dazu benützt werden, zu bestimmen, was $\varphi(x)$ für eine Function ist, bei welcher U möglicherweise ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird. Da man auch hier jedesmal nur eine einzige Gleichung hat, aus welcher die für y zu suchende Function bestimmt werden soll; so wird auch jetzt die Aufgabe niemals eine überbestimmte sein, sondern in der Regel ein brauchbares Resultat liefern.

Bei Herstellung des Prüfungsmittels unterscheide man:

1) Es kann nur durch directe Reihenentwicklung gewonnen werden. Dabei muss man

$$\varphi(x) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdots\cdots$$

oder kurzweg $(\varphi(x) + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ an die Stelle des y, dagegen nur $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$ in die ursprüngliche Gleichung einsetzen.

2) Es kann an einem der Quotienten $\delta^2 U$, $\delta^4 U$, etc. gewonnen werden. Dabei ist nur $\delta^2 U = \frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \delta y^2$; und wenn gleichzeitig $\frac{d_y^2 U}{dy^2} = 0$ und $\frac{d_y^3 U}{dy^3} = 0$ ist, so bleibt nur $\delta^4 U = \frac{d_y^4 U}{dy^4} \cdot \delta y^4$, etc. etc. Der dabei vorzunehmende Gang ist dem des §. 118 analog, wesshalb es genügt, dahin zu verweisen.

Untersuchung 27.

Es ist U ein reeller mit den Elementen x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ gebildeter Ausdruck, und man sucht für y eine solche reelle Function des nichtmutablen Veränderlichen x, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 189. Da U ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden soll, so ist der Werth des x noch ganz allgemein, d. h. man kann dem x was immer für einen beliebigen besondern reellen Werth $\mathfrak{x}$ beilegen. Wenn man nun irgend eine durch $\varphi(x)$ dargestellte reelle Function an die Stelle des y, folglich $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ und $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$ bezüglich an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$, in die ursprüngliche Gleichung einsetzt; so bekommt man auch für U eine Function von x, welche mit $\psi(x)$ bezeichnet sein mag. Die dem $\varphi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstvorgehenden und nächstnachfolgenden Nachbarfunctionen werden (nach §. 60) im Allgemeinen dargestellt durch

$$\text{I)}\quad \varphi(x) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x) + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2\varphi(x) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3\varphi(x) + \cdots\cdots$$

wo jeder der Ausdrücke $\delta\varphi(x)$, $\delta^2\varphi(x)$, $\delta^3\varphi(x)$, eine für sich beliebige reelle Function von x vorstellt, und $\varkappa$ bald als positiv bald als negativ im Momente des Verschwindens befindlich gedacht wird. Die aus diesen Functionen sich ergebenden Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung sind dann bezüglich (man sehe §. 87)

$$\text{II)}\quad \frac{d\varphi(x)}{dx} + \varkappa\cdot\frac{d\delta\varphi(x)}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\frac{d\delta^2\varphi(x)}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\frac{d\delta^3\varphi(x)}{dx} + \cdots\cdots$$

$$\text{III)}\quad \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \varkappa\cdot\frac{d^2\delta\varphi(x)}{dx^2} + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\frac{d^2\delta^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^2\delta^3\varphi(x)}{dx^2} + \cdots\cdots$$

Es ist (aus §. 91) bekannt, dass, wenn $\delta\varphi(x)$ jede beliebige Function von x vorstellt, die Werthe der drei Ausdrücke $\delta\varphi(x)$, $\frac{d\delta\varphi(x)}{dx}$, $\frac{d^2\delta\varphi(x)}{dx^2}$ von einander ganz unabhängig sind, wenn gleich mit der Form des $\delta\varphi(x)$ auch die Form des $\frac{d\delta\varphi(x)}{dx}$ und die des $\frac{d^2\delta\varphi(x)}{dx^2}$ mitgegeben ist. Ebenso verhält es sich zwischen $\delta^2\varphi(x)$, $\frac{d\delta^2\varphi(x)}{dx}$ und $\frac{d^2\delta^2\varphi(x)}{dx^2}$, zwischen $\delta^3\varphi(x)$, $\frac{d\delta^3\varphi(x)}{dx}$ und $\frac{d^2\delta^3\varphi(x)}{dx^2}$, etc. etc.

§. 190. Weil man dem x einen beliebigen speciellen Werth $\mathfrak{x}$ beilegt, so kann man unter den dem $\varphi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunctionen folgende sieben verschiedene Arten besonders hervorheben:

A) Diejenigen dem $\varphi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunctionen, welche bei diesem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ alle mit $\varphi(\mathfrak{x})$ einerlei Werth bekommen, während die von eben diesen verschiedenen Urfunctionen abgeleiteten ersten und zweiten Differentialquotienten allerlei verschiedene Werthe bekommen können. Dabei muss einzeln $\delta\varphi(\mathfrak{x}) = 0$, $\delta^2\varphi(\mathfrak{x}) = 0$, etc. stattfinden.

B) Diejenigen dem $\varphi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunctionen, wo bei diesem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ die ersten Differentialquotienten alle mit $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}}$ einerlei Werth haben, während diese verschiedenen Urfunctionen selbst und ihre zweiten Differentialquotienten allerlei verschiedene Werthe bekommen können. Dabei muss einzeln $\left(\frac{d\delta\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}} = 0$, $\left(\frac{d\delta^2\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}} = 0$, etc. stattfinden.

C) Diejenigen dem $\varphi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunctionen, wo bei diesem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ die zweiten Differentialquotienten alle mit $\left(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\right)_{\mathfrak{x}}$ einerlei Werth haben, während diese verschiedenen Urfunctionen selbst und ihre ersten Differentialquotienten allerlei verschiedene Werthe bekommen können. Dabei muss einzeln $\left(\frac{d^2\delta\varphi(x)}{dx^2}\right)_{\mathfrak{x}} = 0$, $\left(\frac{d^2\delta^2\varphi(x)}{dx^2}\right)_{\mathfrak{x}} = 0$, etc. stattfinden.

D) Diejenigen dem $\varphi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunctionen, wo bei diesem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ sowohl die Urfunctionen als auch die ersten Differentialquotienten alle bezüglich mit $\varphi(\mathfrak{x})$ und mit $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}}$ einerlei Werth haben, während die von eben diesen verschiedenen Urfunctionen abgeleiteten zweiten Differentialquotienten allerlei verschiedene Werthe bekommen können. Dabei muss einzeln $\delta\varphi(\mathfrak{x}) = 0$, $\left(\frac{d\delta\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}} = 0$, $\delta^2\varphi(\mathfrak{x}) = 0$, $\left(\frac{d\delta^2\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}} = 0$, etc stattfinden.

E) Diejenigen dem $\varphi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunctionen, wo bei diesem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ sowohl die Urfunctionen als auch die zweiten Differentialquotienten alle bezüglich mit $\varphi(\mathfrak{x})$ und $\left(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\right)_{\mathfrak{x}}$ einerlei Werth haben, während die von eben diesen verschiedenen Urfunctionen abgeleiteten ersten Differentialquotienten allerlei verschiedene Werthe bekommen können. Dabei muss einzeln $\delta\varphi(\mathfrak{x}) = 0$, $\left(\frac{d^2\delta\varphi(x)}{dx^2}\right)_{\mathfrak{x}} = 0$, $\delta^2\varphi(\mathfrak{x}) = 0$, $\left(\frac{d^2\delta^2\varphi(x)}{dx^2}\right)_{\mathfrak{x}} = 0$, etc. stattfinden.

F) Diejenigen dem $\varphi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunctionen, wo bei diesem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ sowohl die ersten als auch die zweiten Differentialquotienten alle bezüglich mit $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}}$ und mit $\left(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\right)_{\mathfrak{x}}$ einerlei Werth haben, während diese verschiedenen Urfunctionen selbst allerlei verschiedene Werthe bekommen können. Dabei muss einzeln $\left(\frac{d\delta\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}} = 0$, $\left(\frac{d^2\delta\varphi(x)}{dx^2}\right)_{\mathfrak{x}} = 0$, $\left(\frac{d\delta^2\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}} = 0$, $\left(\frac{d^2\delta^2\varphi(x)}{dx^2}\right)_{\mathfrak{x}} = 0$, etc. stattfinden.

G) Diejenigen dem $\varphi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstanliegenden Nachbarfunctionen, wo bei diesem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ sowohl die Urfunctionen als auch die ersten und zweiten Differentialquotienten alle bezüglich mit $\varphi(\mathfrak{x})$, $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}}$ und $\left(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\right)_{\mathfrak{x}}$ einerlei Werth bekommen. Dabei muss dann einzeln $\delta\varphi(\mathfrak{x}) = 0$, $\left(\frac{d\delta\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}} = 0$, $\left(\frac{d^2\delta\varphi(x)}{dx^2}\right)_{\mathfrak{x}} = 0$, $\delta^2\varphi(\mathfrak{x}) = 0$, $\left(\frac{d\delta^2\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}} = 0$, $\left(\frac{d^2\delta^2\varphi(x)}{dx^2}\right)_{\mathfrak{x}} = 0$ etc. stattfinden.

Keine von allen diesen Gleichungen ist eine identische, sondern eine jede gilt nur bei dem grade genommenen Werthe $\mathfrak{x}$; und man muss sich darunter immer andere und andere Gleichungen denken, je nachdem man dem x einen immer andern und andern speciellen Werth $\mathfrak{x}$ beilegt.

In vielen Functionen, welche noch einen willkürlichen Constanten enthalten, kann man diesen Constanten nach dem grade genommenen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ so einrichten, dass sie entweder die unter A, oder die unter B, oder die unter C angegebene Eigenschaft haben. (Man sehe noch einmal §. 87.)

In vielen Functionen, wo noch zwei willkürliche Constanten enthalten sind, kann man letztere nach dem grade genommenen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ so einrichten, dass diese Function entweder die unter D, oder die unter E, oder die unter F angegebene Eigenschaft haben. (Man sehe noch einmal §. 87.)

In vielen Functionen, wo noch drei willkürliche Constanten enthalten sind, kann man letztere nach dem grade genommenen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ so einrichten, dass diese Functionen die unter G gegebene Eigenschaft haben. (Man sehe noch einmal §. 87.)

Man ist nun auf dem Puncte, bei vorliegender Untersuchung sieben Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall.

§. 191. Führt man $\varphi(x)$ an die Stelle des y, $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$, und $\frac{\delta^2\varphi(x)}{dx^2}$ an die Stelle des $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die ursprüngliche Gleichung ein; so bekommt man, wie

gesagt, auch für U eine Function von x, welche mit $\psi(x)$ bezeichnet sein mag. Soll nun die gesuchte Function mit allen möglichen ihr nächstanliegenden verglichen werden, so hat man die Reihen I, II und III, welche kürzer auch dargestellt werden durch

$$\text{IV)}\quad \varphi(x) + \varkappa\cdot\delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 y + \cdots\cdots$$

$$\text{V)}\quad \frac{d\varphi(x)}{dx} + \varkappa\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\frac{d\delta^3 y}{dx} + \cdots\cdots$$

$$\text{VI)}\quad \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \varkappa\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^2\delta^3 y}{dx^2} + \cdots\cdots$$

bezüglich an die Stelle des y, des $\frac{dy}{dx}$ und des $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die ursprüngliche Gleichung einzuführen. Dabei bekommt man alle möglichen dem $U' = \psi(x)$ nächstanliegenden Nachbarzustände; und es kann (nach dem Vorgange der sechsundzwanzigsten Untersuchung) ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinden, wenn eines von folgenden acht Systemen dreier Gleichungen, wo zur Abkürzung noch p anstatt $\frac{dy}{dx}$ und q anstatt $\frac{d^2y}{dx^2}$ gesetzt ist, existirt:

$$1)\quad \frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = 0 \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = 0,$$

$$2)\quad \frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = 0 \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

$$3)\quad \frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0} \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = 0,$$

$$4)\quad \frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = 0 \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = 0,$$

$$5)\quad \frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0} \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

$$6)\quad \frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = 0 \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

$$7)\quad \frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0} \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = 0,$$

$$8)\quad \frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0} \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

Alle diese Gleichungen müssen bei jedem beliebigen Werthe des x gelten, und jedes dieser acht Systeme, welches überhaupt möglich ist, kann rückwärts noch dazu benützt werden, zu bestimmen, was $\varphi(x)$ für eine Function ist, bei welcher möglicherweise U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man hat aber hier jedesmal drei Gleichungen, welche bei einer und derselben für y zu suchenden Function $\varphi(x)$ erfüllt werden sollen. Desshalb wird die Aufgabe oft eine überbestimmte sein, d. h. es werden sich oft die drei zu einem Systeme gehörigen Gleichungen widersprechen.

§. 192. Um in das Praktische einzuführen, nehme man irgend eines dieser acht Systeme, z. B. das erste vor; und man hat für y eine solche Function von x zu suchen, dass dabei die drei Gleichungen

$$\frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = 0 \text{ und } \frac{d_qU}{dq} = 0$$

zugleich identisch werden, wie auf folgende Weise geschehen mag:

I) Man sehe zu, ob diese drei Gleichungen einen gemeinschaftlichen Factor haben, welcher entweder eine Urgleichung, oder eine Differentialgleichung der ersten Ordnung oder eine der zweiten Ordnung sein mag. Im letzteren Falle enthält die gesuchte Function noch zwei willkürliche Constanten, so dass dieselbe noch zwei Nebenbedingungen unterworfen werden kann. (Dergleichen stehen in Aufgabe 85.)

II) Man integrire eine der vorgenommenen drei Gleichungen, aber nur eine solche, welche von der höchsten Ordnung ist, z. B. die Gleichung $\frac{d_y U}{dy} = 0$; und wenn sie von der zweiten Ordnung ist, so gibt sich für y eine Function von x mit zwei willkürlichen Constanten c und e. Diese Function sei $y = \pi(x, c, e)$. Nun hat man vor Allem zu untersuchen, ob durch diese Function auch die beiden andern Gleichungen $\frac{d_p U}{dp} = 0$ und $\frac{d_q U}{dq} = 0$ erfüllt werden; denn werden sie nicht erfüllt, so existirt kein den drei vorgenommenen Gleichungen gemeinschaftliches Integral, d. h. sie widersprechen einander. Man führe also $\pi(x, c, e)$, $\frac{d_x\pi(x, c, e)}{dx}$ und $\frac{d_x^2\pi(x, c, e)}{dx^2}$ bezüglich statt y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die Gleichungen $\frac{d_p U}{dp} = 0$ und $\frac{d_q U}{dq} = 0$ ein und unterscheide folgende drei Fälle:

α) Die Gleichungen $\frac{d_p U}{dp} = 0$ und $\frac{d_q U}{dq} = 0$ werden bei jedem Werthe des c und des e erfüllt. Man hat also ein den drei vorgenommenen Gleichungen gemeinsames allgemeines Integral.

β) Es ergibt sich (damit die beiden Gleichungen $\frac{d_p U}{dp} = 0$ und $\frac{d_q U}{dq} = 0$ erfüllt werden) für einen der beiden Constanten c oder e ein bestimmter und von x unabhängiger Ausdruck, während der andere dieser beiden Constanten noch ganz willkürlich bleibt. Man hat also ein den drei vorgenommenen Gleichungen gemeinschaftliches und zur Gleichung $\frac{d_y U}{dy} = 0$ gehöriges einfach besonderes Integral. Es können sich aber auch für die beiden Constanten c und e bestimmte und von x unabhängige Ausdrücke ergeben. Hierbei hat man ein den drei vorgenommenen Gleichungen gemeinschaftliches und zur Gleichung $\frac{d_y U}{dy}$ gehöriges zweifach besonderes Integral.

γ) Ergibt sich aber für eines der Elemente c oder e oder auch für beide zugleich kein von x unabhängiger Ausdruck, so kann doch ein zur Gleichung $\frac{d_y U}{dy} = 0$ gehöriges einfach singuläres oder zweifach singuläres Integral existiren, welches noch den beiden Gleichungen $\frac{d_p U}{dp} = 0$ und $\frac{d_q U}{dq} = 0$ zugleich genügt. Wie man dabei mit dem bereits hergestellten allgemeinen Integral $y = \pi(x, c, e)$ verfährt, ist bekannt.

Wenn jede der drei Gleichungen $\frac{d_y U}{dy} = 0$, $\frac{d_p U}{dp} = 0$, $\frac{d_q U}{dq} = 0$ von der ersten Ordnung ist; so hat man zu verfahren, wie bei der vorigen Untersuchung (§. 184 II) auseinander gesetzt ist; nur ist zu beachten, dass die gesuchte Function jetzt drei Gleichungen erfüllen muss.

III. Man eliminire aus den drei Gleichungen $\frac{d_y U}{dy} = 0$, $\frac{d_p U}{dp} = 0$ und $\frac{d_q U}{dq} = 0$ die beiden Quotienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$; so bekommt man gradezu y als Function von x ohne willkürlichen Constanten. Diese Function sei dargestellt durch $y = \varphi(x)$. Nun hat man aber $\varphi(x)$, $\frac{d\varphi(x)}{dx}$, $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$ anstatt y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die drei Gleichungen $\frac{d_y U}{dy} = 0$, $\frac{d_p U}{dp} = 0$,

und $\frac{d_q U}{dq} = 0$ überall einzuführen, und zuzusehen, ob sie auch wirklich alle drei zugleich identisch werden; denn nur in diesem Falle kann $y = \varphi(x)$ die Aufgabe lösen. Ist namentlich $\varphi(x)$ eine vielförmige Function, so wird sich bei dieser Prüfung noch zeigen, ob alle Formen zugleich zulässig sind oder nicht.

Bei dieser auf Elimination gegründeten Methode kann sich aber für y niemals eine Function ergeben, in welche noch willkürliche Constanten eingehen; desshalb ist diese Methode nicht so vollkommen, als die vorige (unter II mitgetheilte).

IV) Man kann auch, ohne eine dieser Gleichungen zu integriren, die einfach singulären und die zweifach singulären Integrale derselben aufsuchen, und dann zusehen, ob sich darunter eines vorfindet, welches den drei vorgenommenen Gleichungen zugleich genügt.

Ist eine der vorgenommenen drei Gleichungen schon eine bestimmte Urgleichung, so kann nur diese die gesuchte Function sein; und man muss untersuchen, ob sie den beiden andern Gleichungen nicht widerspricht.

Das hier für das erste System dreier Gleichungen auseinandergesetzte Verfahren gilt ganz unverändert auch bei den sieben andern Systemen.

Dass aber die hier aufgestellten acht Systeme dreier Gleichungen die einzigen sind, aus welchen möglicherweise für y eine solche Function entnommen werden kann, wobei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird; darüber lässt sich der Beweis nach Analogie des §. 185 der vorigen Untersuchung führen.

Hinsichtlich der Herstellung des Prüfungsmittels braucht gleichfalls nichts mehr erörtert zu werden.

Zweiter Fall.

§. 193) Führt man $\varphi(x)$ an die Stelle des y, $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$, und $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$ an die Stelle des $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die ursprüngliche Gleichung überall ein; so bekommt man, wie gesagt, auch für U eine Function von x, welche mit $\psi(x)$ bezeichnet sein mag. Soll nun die gesuchte Function $\varphi(x)$ bei jedem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ nur mit denjenigen ihr nächstanliegenden verglichen werden, welche alle mit $\varphi(\mathfrak{x})$ einerlei Werth haben, während die von eben diesen verschiedenen Urfunctionen abgeleiteten ersten und zweiten Differentialquotienten allerlei verschiedene Werthe bekommen können; so ergeben sich die dem $U' = \psi(\mathfrak{x})$ nächstanliegenden Nachbarzustände $(\psi(\mathfrak{x}) + \Delta U)$ jedesmal dadurch, dass man die Reihen II und III oder die Reihen V und VI, d. h.

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d\delta^3 y}{dx} + \cdots\cdots$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \varkappa \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^2\delta^3 y}{dx^2} + \cdots\cdots$$

an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$ und des $\frac{d^2y}{dx^2}$, dagegen aber nur $\varphi(x)$ an die Stelle des y in die ursprüngliche Gleichung einsetzt. Denn obgleich $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, $\frac{d\delta^2 y}{dx}$, $\frac{d^2\delta^2 y}{dz^2}$, etc. nicht verschwinden, so muss doch einzeln $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$, etc. sein, weil es sonst nicht der Fall wäre, dass man $\varphi(\mathfrak{x})$ bei jedem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ nur mit solchen Functionen vergleicht, die mit $\varphi(\mathfrak{x})$ einerlei Werth haben. Ist nun bei dieser Einschränkung die Function $\varphi(x)$ von der Beschaffenheit, dass das unendlichkleine ΔU bei allen beliebigen reellen Werthen des Elementes x negativ oder positiv bleibt; so findet bezüglich ein Maximum-stand oder Minimum-stand statt; und beides kann jetzt um so eher stattfinden, weil man eine Menge der dem $U' = \psi(x)$ nächstanliegenden Nachbarzustände, welche man im ersten Falle alle berücksichtigt hat, ganz vernachlässigt.

Hier hat man zu untersuchen, welches von folgenden vier Systemen zweier Gleichungen

$$\frac{d_p U}{dp} = 0 \text{ und } \frac{d_q U}{dq} = 0$$

$$\frac{d_p U}{dp} = 0 \text{ und } \frac{d_q U}{dq} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

$$\frac{d_p U}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0} \text{ und } \frac{d_q U}{dq} = 0$$

$$\frac{d_p U}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0} \text{ und } \frac{d_q U}{dq} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

stattfindet. Die Aufgabe kann also, eben weil die gesuchte Function jedesmal zweien Gleichungen genügen soll, auch oft eine überbestimmte sein; jedoch nicht so oft als im ersten Falle, wo die gesuchte Function dreien Gleichungen genügen muss.

Und so fort.

Dritter Fall.

§. 194. Soll die gesuchte Function $\varphi(x)$ bei jedem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ nur mit denjenigen ihr nächstanliegenden verglichen werden, wo bei diesem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ die ersten Differentialquotienten alle mit $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}}$ einerlei Werth haben, während diese verschiedenen Urfunctionen selbst und ihre zweiten Differentialquotienten allerlei verschiedene Werthe bekommen können; so ergeben sich die dem $U' = \psi(\mathfrak{x})$ nächstanliegenden Nachbarzustände $(\psi(\mathfrak{x}) + \Delta U)$ jedesmal dadurch, dass man die Reihen I und III oder die Reihen IV und VI, d. h.

$$\varphi(x) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \varkappa \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^2\delta^3 y}{dx^2} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

an die Stelle des y und $\frac{d^2y}{dx^2}$, dagegen aber nur $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$ in die ursprüngliche Gleichung einsetzt. Denn obgleich δy, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, d^2y, $\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2}$, etc. nicht verschwinden, so muss doch einzeln $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, etc. sein, weil es sonst nicht der Fall wäre, dass man $\varphi(\mathfrak{x})$ bei jedem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ nur mit solchen Functionen vergleicht, deren erste Differentialquotienten alle mit $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}}$ einerlei Werth haben. Ist nun bei dieser Einschränkung die Function $\varphi(x)$ von der Beschaffenheit, dass das unendlichkleine ΔU bei allen beliebigen reellen Werthen des x negativ oder positiv bleibt, so findet bezüglich ein Maximum-stand oder Minimum-stand statt; und beides kann jetzt um so eher stattfinden, weil man eine Menge der dem $U' = \psi(x)$ nächstanliegenden Nachbarzustände, welche man im ersten Falle alle berücksichtigt hat, ganz vernachlässigt.

Hier hat man zu untersuchen, welches von folgenden vier Systemen zweier Gleichungen

$$\frac{d_y U}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_q U}{dq} = 0$$

$$\frac{d_y U}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_q U}{dq} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

$$\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_q U}{dq} = 0$$

$$\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_q U}{dq} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

stattfindet. Die Aufgabe kann also, eben weil die gesuchte Function jedesmal zweien Gleichungen genügen soll, auch oft eine überbestimmte sein; jedoch nicht so oft, als im ersten Falle, wo die gesuchte Function dreien Gleichungen zugleich genügen muss.

Und so fort.

Vierter Fall.

§. 195. Soll die gesuchte Function $\varphi(x)$ bei jedem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ nur mit denjenigen ihr nächstanliegenden verglichen werden, wo bei diesem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ die zweiten Differentialquotienten alle mit $\left(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\right)_{\mathfrak{x}}$ einerlei Werth haben, während diese verschiedenen Urfunctionen selbst und ihre ersten Differentialquotienten allerlei verschiedene Werthe bekommen können; so ergeben sich die dem $U' = \psi(\mathfrak{x})$ nächstanliegenden Nachbarzustände $(\psi(\mathfrak{x}) + \Delta U)$ jedesmal dadurch, dass man die Reihen I und II oder die Reihen IV und V bezüglich an die Stelle des y und des $\frac{dy}{dx}$, dagegen aber nur $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$ an die Stelle des $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die ursprüngliche Gleichung einsetzt. Hier hat man also zu untersuchen, welches von folgenden vier Systemen zweier Gleichungen

$$\frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = 0$$

$$\frac{d_yU}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

$$\frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = 0$$

$$\frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_pU}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

stattfindet. Die Aufgabe kann also, eben weil die gesuchte Function jedesmal zweien Gleichungen genügen soll, auch oft eine überbestimmte sein; jedoch nicht so oft, als im ersten Falle, wo die gesuchte Function dreien Gleichungen zugleich genügen muss.

Und so fort.

Fünfter Fall.

§. 196. Soll die gesuchte Function $\varphi(x)$ bei jedem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ nur mit denjenigen ihr nächstanliegenden verglichen werden, wo bei diesem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ sowohl die Urfunctionen als auch die ersten Differentialquotienten alle bezüglich mit $\varphi(\mathfrak{x})$ und mit $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{\mathfrak{x}}$ einerlei Werth haben, während die von eben diesen verschiedenen Urfunctionen abgeleiteten zweiten Differentialquotienten allerlei verschiedene Werthe haben können; so ergeben sich die dem $U' = \psi(\mathfrak{x})$ jedesmal nächstanliegenden Nachbarzustände $(\psi(\mathfrak{x}) + \Delta U)$ dadurch, dass man die Reihe III oder VI d. h. die Reihe

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \varkappa \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^2\delta^3 y}{dx^2} + \cdots\cdots$$

an die Stelle des $\frac{d^2y}{dx^2}$, dagegen nur $\varphi(x)$ an die Stelle des y, und nur $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$ in die ursprüngliche Gleichung einsetzt. Denn obgleich $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, $\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2}$, etc. nicht verschwinden, so muss doch einzeln $\delta y = 0$, $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\delta^2 y = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, etc. sein, weil es sonst nicht der Fall wäre, dass man $\varphi(x)$ nur mit den Functionen vergleicht, welche die in dieser Untersuchung vorgeschriebenen Eigenschaften haben. Ist nun bei dieser Einschränkung die Function $\varphi(x)$ von der Beschaffenheit,

dass das unendlichkleine ΔU bei allen beliebigen reellen Werthen des x negativ oder positiv bleibt; so findet bezüglich ein Maximum-stand oder Minimum-stand statt; und beides kann jetzt um so eher stattfinden, weil man eine Menge der dem $U' = \psi(\mathfrak{x})$ nächstanliegenden Nachbarzustände, welche man in den vier ersten Fällen alle berücksichtigt hat, ganz vernachlässigt.

Hier hat man zu untersuchen, welche von den beiden Gleichungen

$$\text{entweder } \frac{d_q U}{dq} = 0 \text{ oder } \frac{d_q U}{dq} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

stattfindet. Da man aber hier jedesmal nur eine einzige Gleichung hat, aus welcher die für y gesuchte Function bestimmt werden soll; so wird jetzt die Aufgabe niemals überbestimmt sein, sondern in der Regel ein brauchbares Resultat liefern.

Und so fort.

Sechster Fall.

§. 197. Soll die gesuchte Function bei jedem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ nur mit denjenigen ihr nächstanliegenden verglichen werden, wo bei diesem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ sowohl die Urfunctionen als auch die zweiten Differentialquotienten alle bezüglich mit $\varphi(\mathfrak{x})$ und $\left(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\right)_\mathfrak{x}$ einerlei Werth haben, während die von eben diesen verschiedenen Urfunctionen abgeleiteten ersten Differentialquotienten allerlei verschiedene Werthe bekommen können; so ergeben sich die dem $U' = \psi(\mathfrak{x})$ jedesmal nächstanliegenden Nachbarzustände $(\psi(\mathfrak{x}) + \Delta U)$ dadurch, dass man die Reihe II oder V, d. h. die Reihe

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d\delta^3 y}{dx} + \cdots\cdots$$

an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$, dagegen nur $\varphi(x)$ an die Stelle des y, und nur $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$ an die Stelle des $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die ursprüngliche Gleichung einsetzt etc. etc.

Hier hat man zu untersuchen, welche von den beiden Gleichungen

$$\text{entweder } \frac{d_p U}{dp} = 0, \text{ oder } \frac{d_p U}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

stattfindet. Da man auch hier jedesmal nur eine einzige Gleichung hat, aus welcher die für y gesuchte Function bestimmt werden soll; so wird jetzt die Aufgabe niemals eine überbestimmte sein, sondern in der Regel ein brauchbares Resultat liefern.

Und so fort.

Siebenter Fall.

§. 198. Soll die gesuchte Function bei jedem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ nur mit denjenigen ihr nächstanliegenden verglichen werden, wo bei diesem beliebigen speciellen Werthe $\mathfrak{x}$ sowohl die ersten als auch die zweiten Differentialquotienten alle bezüglich mit $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_\mathfrak{x}$ und mit $\left(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\right)_\mathfrak{x}$ einerlei Werth haben, während diese verschiedenen Urfunctionen selbst allerlei verschiedene Werthe bekommen können; so ergeben sich die dem $U' = \psi(\mathfrak{x})$ jedesmal nächstanliegenden Nachbarzustände dadurch, dass man die Reihe I oder IV, d. h. die Reihe

$$\varphi(x) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdots\cdots$$

an die Stelle des y, dagegen nur $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$, und nur $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$ an die Stelle des $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die ursprüngliche Gleichung einsetzt. etc. etc.

Hier hat man zu untersuchen, welche von den beiden Gleichungen

$$\text{entweder } \frac{d_\gamma U}{dy} = 0, \text{ oder } \frac{d_\gamma U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$$

stattfindet. Da man auch hier jedesmal nur eine einzige Gleichung hat, aus welcher die für y gesuchte Function bestimmt werden soll; so wird jetzt die Aufgabe niemals eine überbestimmte sein, sondern in der Regel ein brauchbares Resultat liefern.

Und so fort.

Es ist nun nicht mehr nöthig, diejenigen Untersuchungen vorzunehmen, wo U ein mit den Elementen $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, oder ein mit den Elementen $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}$, etc. etc. gebildeter Ausdruck ist. Das bisherige Verfahren lässt sich gradezu auf dergleichen Untersuchungen ausdehnen.

Untersuchung 28.

Es ist U ein reeller mit den Elementen $x, y, \frac{dy}{dx}$ gebildeter Ausdruck; und man sucht für y eine solche Function von x, dass dabei sowohl der Gleichung $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ identisch genügt, als auch U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Erste Auflösung.

§. 199. Man suche das zu $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ gehörige allgemeine Integral, und bezeichne es durch

$$\text{I)}\quad y = \varphi(x, c)$$

wo c der durch die Integration eingegangene willkürliche Constante ist. Die einzige Mutation, welcher Gleichung I unterworfen werden kann, besteht darin, dass man dem c Werthänderungen beilegt, während, wie sein muss, das x ungeändert bleibt. Setzt man nun (c + Dc) oder vielmehr

$$\text{II)}\quad c + \varkappa \cdot \vartheta c + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 c + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 c + \cdots\cdots$$

an die Stelle des c in Gleichung I ein, so bekommt man

$$\text{III)}\quad \delta y = \frac{d_c\varphi(x, c)}{dc} \cdot \vartheta c$$

$$\text{IV)}\quad \delta^2 y = \frac{d_c\varphi(x, c)}{dc} \cdot \vartheta^2 c + \frac{d_c^2\varphi(x, c)}{dc^2} \cdot \vartheta c^2$$

etc. etc.

Nun setze man $\varphi(x, c)$ und $\frac{d_x\varphi(x, c)}{dx}$ bezüglich an die Stelle des y und $\frac{dy}{dx}$ in die ursprüngliche Gleichung ein, und man bekommt

$$\text{V)}\quad U' = \psi(x, c)$$

Setzt man auch hier die Reihe II an die Stelle des c ein, so bekommt man

$$\text{VI)}\quad \delta U = \frac{d_c\psi(x, c)}{dc} \cdot \vartheta c$$

$$\text{VII)}\quad \delta^2 U = \frac{d_c\psi(x, c)}{dc} \cdot \vartheta^2 c + \frac{d_c^2\psi(x, c)}{dc^2} \cdot \vartheta c^2$$

und so fort.

A) Man sehe nun zu, ob man $\frac{d_c\psi(x, c)}{dc} = 0$ setzen kann, und beachte zweierlei:

1) Es ergibt sich aus $\frac{d_c\psi(x, c)}{dc} = 0$ für c ein constanter d. h. von x unabhängiger Werth; dann hat man ein zur Gleichung $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ gehöriges besonderes Integral.

2) Es ergibt sich aus $\frac{d_c\psi(x, c)}{dc} = 0$ für c ein noch mit x versehener Ausdruck, der durch $c = \pi(x)$ bezeichnet sein mag. Dabei geht Gleichung I über in $y = \varphi(x, \pi(x))$. Man hat aber jetzt $\varphi(x, \pi(x))$ und $\frac{d\varphi(x, \pi(x))}{dx}$ an die Stelle des y und des $\frac{dy}{dx}$ in $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ überall einzuführen, und zu untersuchen, ob diese Gleichung dabei identisch wird. Wird sie identisch, so hat man ein singuläres Integral; wird sie nicht identisch, so ist $y = \varphi(x, \pi(x))$ kein zu $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ gehöriges Integral, und $y = \varphi(x, \pi(x))$ muss verworfen werden.

Das Prüfungsmittel gewinnt man entweder durch directe Reihenentwickelung, oder an einem der Coefficienten $\delta^2 U$, $\delta^4 U$, etc. Namentlich, wenn man es am $\delta^2 U$ gewinnen kann, hat man die Gleichung

$$\text{VIII)}\quad \delta^2 U = \frac{d_c^2\psi(x, c)}{dc^2} \cdot \vartheta c^2$$

B) Man sehe zu, ob die Gleichung $\frac{d_c\psi(x, c)}{dc} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ möglich ist, etc.

Zweite Auflösung.

§. 200. Man mutire $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, und setze zur Abkürzung noch p statt $\frac{dy}{dx}$; so bekommt man

$$\text{IX)}\quad \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p F}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx} = 0$$

$$\text{X)}\quad \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_p F}{dp} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{d_y^2 F}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_p F}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dy}$$
$$+ \frac{d_p^2 F}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 = 0$$

etc. etc.

Und wenn man die ursprüngliche Gleichung mutirt, so bekommt man

$$\text{XI)}\quad \delta U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p U}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\text{XII)}\quad \delta^2 U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_p U}{dp} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \delta y^2$$
$$+ 2 \cdot \frac{d_y d_p U}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2 U}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

etc. etc.

Erstens. Es ist einerlei, ob man δy oder $\frac{d\delta y}{dx}$ als abhängig nimmt. Nimmt man $\frac{d\delta y}{dx}$ als abhängig, so muss man auch $\frac{d\delta^2 y}{dx}$ als abhängig nehmen, etc; und wenn man diese abhängigen Elemente eliminirt, so nehmen die Gleichungen XI und XII folgende Form an

$$\text{XIII)} \quad \delta U = (f'(x, y, p)) \cdot \delta y$$

$$\text{XIV)} \quad \delta^2 U = (f'(x, y, p)) \cdot \delta^2 y + (f''(x, y, p)) \cdot \delta y^2$$

A) Man sehe zu, ob die Gleichung $f'(x, y, p) = 0$ möglich ist, und verbinde sie mit $F(x, y, p) = 0$. Man hat also jetzt für y eine Function aufzusuchen, welche zwei Gleichungen zugleich identisch macht. Das geeignete Verfahren ist in §. 184 der 26ten Untersuchung auseinandergesetzt. Wenn man das Prüfungsmittel an $\delta^2 U$ gewinnen kann, so bekommt man

$$\text{XV)} \quad \delta^2 U = (f''(x, y, p)) \cdot \delta y^2$$

Und wenn man δy mittelst Gleichung III eliminirt, so geht XV über in

$$\delta^2 U = (f''(x, y, p)) \cdot \left(\frac{d_c \varphi(x, c)}{dc}\right)^2 \cdot \vartheta c^2,$$

welcher Ausdruck mit VIII gleichbedeutend ist.

B) Man sehe zu, ob die Gleichung $f'(x, y, p) = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ möglich ist, und verbinde auch sie mit $F(x, y, p) = 0$. Man hat also für y wieder eine Function zu suchen, welche zwei Gleichungen zugleich identisch macht.

Zweitens. Hätte man aber δy und $\delta^2 y$ als abhängig genommen, und eliminirt; so hätten die Gleichungen XI und XII folgende Form angenommen:

$$\text{XVI)} \quad \delta U = (\mathfrak{F}'(x, y, p)) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\text{XVII)} \quad \delta^2 U = (\mathfrak{F}'(x, y, p)) \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + (\mathfrak{F}''(x, y, p)) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

A) Man sehe zu, ob die Gleichung $\mathfrak{F}'(x, y, p) = 0$ möglich ist, und verbinde sie mit $F(x, y, p) = 0$. Man hat also für y eine Function aufzusuchen, welche zwei Gleichungen zugleich identisch macht. Wenn man das Prüfungsmittel an $\delta^2 U$ gewinnen kann, so bekommt man

$$\text{XVIII)} \quad \delta^2 U = (\mathfrak{F}''(x, y, p)) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Aus III aber folgt $\frac{d\delta y}{dx} = \frac{d_x d_c \varphi(x, c)}{dx \cdot dc} \cdot \vartheta c$, und somit geht XVIII über in

$$\delta^2 U = (\mathfrak{F}''(x, y, p)) \cdot \left(\frac{d_x d_c \varphi(x, c)}{dx \cdot dc}\right)^2 \cdot \vartheta c^2,$$

welcher Ausdruck mit VIII gleichbedeutend ist.

B) Man sehe zu, ob auch die Gleichung $\mathfrak{F}'(x, y, p) = \frac{\mathfrak{B}}{0}$ möglich ist.

Dass aber die in dieser 28ten Untersuchung aufgestellte Aufgabe sehr oft unmöglich ist, weil widersprechende Gleichungen vorkommen können; das bedarf nicht mehr der Erinnerung. (Man sehe die Aufgaben 76, 77, 78 und 81.)

Untersuchung 29.

Es ist U ein reeller mit den Elementen x, y, $\frac{dy}{dx}$ gebildeter Ausdruck; und man sucht für y eine solche Function von x, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-

stand wird, während diese für y gesuchte Function nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei welchen allen irgend ein anderer Ausdruck $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ entweder immer der nemlichen aber nichtgegebenen Function von x gleichbleibt, oder immer den nemlichen aber nichtgegebenen constanten Werth behält.

§. 201. Weil diesmal $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ keine Gleichung ist, so kann man diesen Ausdruck auch nicht integriren; aber wegen der für ihn gemachten Bedingung müssen die Mutationsgleichungen jeder einzelnen Ordnung zu Null werden. Setzt man nun zur Abkürzung noch p statt $\frac{dy}{dx}$, so bekommt man

$$\text{I)}\quad \frac{d_yF}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_pF}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx} = 0$$

$$\text{II)}\quad \frac{d_yF}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_pF}{dp} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{d_y^2F}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_yd_pF}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2F}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 = 0$$

etc. etc.

Mutirt man auch den für U aufgestellten Ausdruck, so bekommt man

$$\text{III)}\quad \delta U = \frac{d_yU}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_pU}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\text{IV)}\quad \delta^2 U = \frac{d_yU}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_pU}{dp} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{d_y^2U}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_yd_pU}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2U}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

etc. etc.

Man kann nun δy oder $\frac{d\delta y}{dx}$ als abhängig nehmen; und wenn man $\frac{d\delta y}{dx}$ als abhängig nimmt, so muss man auch $\frac{d\delta^2 y}{dx}$ als abhängig nehmen. Durch Elimination dieser abhängigen Elemente gehen aber die Gleichungen III und IV bezüglich über in

$$\text{V)}\quad \delta U = (f'(x.\ y,\ p)) \cdot \delta y$$

$$\text{VI)}\quad \delta^2 U = (f'(x,\ y,\ p)) \cdot \delta^2 y + (f''(x,\ y,\ p)) \cdot \delta y^2$$

A) Man setze $f'(x, y, p) = 0$, und integrire diese Gleichung, so bekommt man $y = \varphi(x, c)$, d. h. man bekommt für y eine Function mit einem willkürlichen Constanten. Weil aber jetzt der Ausdruck F(x, y, p) keine Gleichung ist, so kann dieser Constante nur durch eine Nebenbedingung bestimmt werden.

B) Man sehe auch zu, ob die Gleichung $f'(x, y, p) = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ möglich ist, und integrire auch sie.

Da man hier jedesmal nur eine einzige Gleichung hat, aus welcher die für y gesuchte Function bestimmt werden soll; so wird jetzt die Aufgabe niemals überbestimmt sein, sondern in der Regel ein brauchbares Resultat liefern. Man vergleiche den Schluss der vorigen Untersuchung. (Man sehe noch die Aufgaben 79, 80 und 82.)

Untersuchung 30.

Es ist U ein reeller mit den Elementen x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ gebildeter Ausdruck; und man sucht für y eine solche Function von x, dass dabei sowohl der Gleichung

$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ identisch genügt, als auch U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Erste Auflösung.

§. 202. Man suche das zu $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ gehörige allgemeine Integral, und bezeichne es durch

$$\text{I)}\quad y = \varphi(x, c, e)$$

wo c und e die durch die Integration eingegangenen willkürlichen Constanten sind. Die einzige Mutation, welcher Gleichung I unterworfen werden kann, besteht darin, dass man dem c und dem e Werthänderungen beilegt, während, wie sein muss, das x ungeändert bleibt. Setzt man nun $(c + Dc)$ und $(e + De)$, oder vielmehr die Reihen

$$\text{II)}\quad c + \varkappa \cdot \vartheta c + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 c + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 c + \cdots\cdots$$

$$\text{III)}\quad e + \varkappa \cdot \vartheta e + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 e + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 e + \cdots\cdots$$

bezüglich an die Stelle des c und des e in Gleichung I ein, so bekommt man

$$\text{IV)}\quad \delta y = \frac{d_c\varphi(x, c, e)}{dc} \cdot \vartheta c + \frac{d_e\varphi(x, c, e)}{de} \cdot \vartheta e$$

$$\text{V)}\quad \delta^2 y = \frac{d_c\varphi}{dc} \cdot \vartheta^2 c + \frac{d_e\varphi}{de} \cdot \vartheta^2 e + \frac{d_c^2\varphi}{dc^2} \cdot \vartheta c^2 + 2 \cdot \frac{d_c d_e\varphi}{dc.de} \cdot \vartheta c \cdot \vartheta e + \frac{d_e^2\varphi}{de^2} \cdot \vartheta e^2$$

etc. etc.

Nun setze man $\varphi(x, c, e)$, $\frac{d_x\varphi(x, c, e)}{dx}$ und $\frac{d_x^2\varphi(x, c, e)}{dx^2}$ bezüglich statt y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die für U aufgestellte Gleichung ein, und man bekommt

$$\text{VI)}\quad U = \psi(x, c, e)$$

Setzt man auch hier die Reihen II und III statt c und e ein, so bekommt man

$$\text{VII)}\quad \delta U = \frac{d_c\psi(x, c, e)}{dc} \cdot \vartheta c + \frac{d_e\psi(x, c, e)}{de} \cdot \vartheta e$$

$$\text{VIII)}\quad \delta^2 U = \frac{d_c\psi}{dc} \cdot \vartheta^2 c + \frac{d_e\psi}{de} \cdot \vartheta^2 e + \frac{d_c^2\psi}{dc^2} \cdot \vartheta c^2 + 2 \cdot \frac{d_c d_e\psi}{dc.de} \cdot \vartheta c \cdot \vartheta e + \frac{d_e^2\psi}{de^2} \cdot \vartheta e^2$$

etc. etc.

Nun sehe man zu, welches von den vier Systemen zweier Gleichungen

$$\frac{d_c\psi(x, c, e)}{dc} = 0 \text{ und } \frac{d_e\psi(x, c, e)}{de} = 0$$

$$\frac{d_c\psi(x, c, e)}{dc} = 0 \text{ und } \frac{d_e\psi(x, c, e)}{de} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

$$\frac{d_c\psi(x, c, e)}{dc} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_e\psi(x, c, e)}{de} = 0$$

$$\frac{d_c\psi(x, c, e)}{dc} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_e\psi(x, c, e)}{de} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

stattfindet.

A) Findet das erste dieser vier Systeme statt, so bestimme man daraus c und e. Ergibt sich sowohl für c als auch für e ein constanter, d. h. von x unabhängiger Werth; so hat man ein zu der Gleichung $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ gehöriges besonderes Integral.

Ergibt sich aber entweder für c oder für e oder auch für c und e zugleich kein von x unabhängiger Werth; so muss man noch untersuchen, ob man vielleicht ein zur Gleichung $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ gehöriges singuläres Integral hat; und ein solches kann auch die Aufgabe lösen. Kann man dabei das Prüfungsmittel an $\delta^2 U$ gewinnen, so hat man

$$\text{IX)}\quad \delta^2 U = \frac{d_c^2\psi}{dc^2} \cdot \vartheta c^2 + 2 \cdot \frac{d_c d_e \psi}{dc . de} \cdot \vartheta c \cdot \vartheta e + \frac{d_e^2\psi}{de^2} \cdot \vartheta e^2$$

B) Wie zu verfahren ist, wenn das zweite oder dritte oder vierte der obigen Systeme stattfindet, braucht jetzt keine Auseinandersetzung.

Zweite Auflösung.

§. 203. Man mutire $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$, und setze zur Abkürzung noch p anstatt $\frac{dy}{dx}$, und q anstatt $\frac{d^2y}{dx^2}$, so bekommt man

$$\text{X)}\quad \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p F}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_q F}{dq} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$$

etc. etc.

Und wenn man die ursprüngliche Gleichung mutirt, so bekommt man

$$\text{XI)}\quad \delta U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p U}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_q U}{dq} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

etc. etc.

Es ist einerlei, ob man δy, oder $\frac{d\delta y}{dx}$, oder $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$ als abhängig nimmt. Nimmt man δy als abhängig, und eliminirt man δy aus XI; so bekommt man

$$\text{XII)}\quad \delta U = (f'(x, y, p, q)) \cdot \frac{d\delta y}{dx} + (f''(x, y, p, q)) \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

Nun sehe man zu, welches von den vier Systemen zweier Gleichungen

$$f'(x, y, p, q) = 0 \text{ und } f''(x, y, p, q) = 0$$

$$f'(x, y, p, q) = 0 \text{ und } f''(x, y, p, q) = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

$$f'(x, y, p, q) = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } f''(x, y, p, q) = 0$$

$$f'(x, y, p, q) = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } f''(x, y, p, q) = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

stattfindet.

A) Findet das erste dieser Systeme statt, so hat man für y eine solche Function aufzusuchen, welche den drei Gleichungen $f'(x, y, p, q) = 0$, $f''(x, y, p, q) = 0$ und $F(x, y, p, q) = 0$ zugleich genügt. Das geeignete Verfahren ist im §. 192 der 27ten Untersuchung auseinander gesetzt. Wenn man das Prüfungsmittel an $\delta^2 U$ gewinnen kann, so eliminire man die nun einmal als abhängig angenommenen Mutationscoefficienten δy und $\delta^2 y$, und man bekommt einen Ausdruck von folgender Form

$$\text{XIII)}\quad \delta^2 U = \mathfrak{F}' \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 2 \cdot \mathfrak{F}'' \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \mathfrak{F}''' \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2$$

Aus IV aber folgt

$$\frac{d\delta y}{dx} = \frac{d_x d_c \varphi(x, c, e)}{dx \cdot dc} \cdot \vartheta c + \frac{d_x d_e \varphi(x, c, e)}{dx \cdot de} \cdot \vartheta e$$

$$\frac{d^2\delta y}{dx^2} = \frac{d_x^2 d_c \varphi(x, c, e)}{dx^2 \cdot dc} \cdot \vartheta c + \frac{d_x^2 d_e \varphi(x, c, e)}{dx^2 \cdot de} \cdot \vartheta e$$

und wenn man $\frac{d\delta y}{dx}$ und $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$ aus XIII eliminirt, so bekommt man wieder Gleichung IX.

B) Man sehe zu, ob das zweite, oder dritte, oder vierte jener Systeme von Gleichungen möglich ist.

Dass aber die in dieser 30ten Untersuchung aufgestellte Aufgabe sehr oft unmöglich ist, weil die drei Gleichungen, die jedesmal von einer und derselben Function erfüllt werden sollen, sehr oft einander widersprechen; das bedarf nicht mehr der Erinnerung.

Untersuchung 31.

Es ist U ein reeller mit den Elementen $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ gebildeter Ausdruck, und man sucht für y eine solche Function von x, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während diese für y gesuchte Function nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werden darf, bei welchen allen irgend ein anderer Ausdruck $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)$ entweder immer der nemlichen aber nichtgegebenen Function von x gleichbleibt, oder immer den nemlichen aber nichtgegebenen constanten Werth behält.

§. 204. Weil diesmal $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)$ keine Gleichung ist, so kann man diesen Ausdruck auch nicht integriren; aber wegen der für ihn gemachten Bedingung müssen die Mutationsgleichungen jeder einzelnen Ordnung zu Null werden. Setzt man nun zur Abkürzung noch p statt $\frac{dy}{dx}$, und q statt $\frac{d^2y}{dx^2}$, so bekommt man

$$\text{I)} \quad \frac{d_yF}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_pF}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_qF}{dq} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$$

etc. etc.

Mutirt man auch den für U aufgestellten Ausdruck, so bekommt man

$$\text{II)} \quad \delta U = \frac{d_yU}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_pF}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_qF}{dq} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

etc. etc.

Es ist einerlei, ob man δy, oder $\frac{d\delta y}{dx}$, oder $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$ als abhängig nimmt. Nimmt man δy als abhängig, und eliminirt man δy aus II; so bekommt man einen Ausdruck von folgender Form

$$\text{III)} \quad \delta U = (f'(x, y, p, q)) \cdot \frac{d\delta y}{dx} + (f''(x, y, p, q)) \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

Man sehe nun zu, welches von den vier Systemen zweier Gleichungen

$$f'(x, y, p, q) = 0 \text{ und } f''(x, y, p, q) = 0$$

$$f'(x, y, p, q) = 0 \text{ und } f''(x, y, p, q) = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

$$f'(x, y, p, q) = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } f''(x, y, p, q) = 0$$

$$f'(x, y, p, q) = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } f''(x, y, p, q) = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

stattfindet.

Man hat also hier eine Function y von x zu suchen, welche jedesmal zweien Differentialgleichungen genügt. Desshalb kann die Aufgabe auch oft eine überbestimmte sein, jedoch nicht so oft, als in der vorigen Untersuchung, wo die gesuchte Function dreien Gleichungen zugleich genügen muss.

Und so fort.

Untersuchung 32.

Es ist U ein reeller mit den Elementen x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ gebildeter Ausdruck; und man sucht für y eine solche Function von x, dass dabei gleichzeitig den beiden Gleichungen $F'\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ und $F''\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ identisch genügt, und U selbst ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Erste Auflösung.

§. 205. Man integrire eine der Bedingungsgleichungen, z. B. $F'(x, y, p, q) = 0$, so wird man

$$\text{I)}\quad y = \varphi(x, c, e)$$

bekommen, wo c und e zwei noch willkürliche Constanten sind. Nun führe man $\varphi(x, c, e)$, $\frac{d\varphi(x, c, e)}{dx}$, $\frac{d^2\varphi(x, c, e)}{dx^2}$ statt y, p, q in $F''(x, y, p, q) = 0$ überall ein, und sehe zu, ob diese Gleichung identisch wird. Wird sie aber identisch, so kann sich dabei dreierlei ergeben.

1) Die beiden Constanten erhalten dabei eine Bestimmung, indem sie

α. entweder beide solche Werthe annehmen, die von x unabhängig sind, so dass man ein den beiden Gleichungen $F' = 0$ und $F'' = 0$ gemeinsames Integral hat, welches ein zu $F' = 0$ gehöriges zweifach besonderes Integral ist. Oder

β. einer der Constanten c und e bekommt einen von x unabhängigen Werth, der andere aber wird eine Function von x. Hier hat man strenge zu untersuchen, ob dabei noch der Gleichung $F' = 0$ genügt wird, und in diesem Falle hat man ein zu $F' = 0$ gehöriges einfach singuläres Integral. Oder

γ. die beiden Constanten c und e werden Functionen von x. Auch hier hat man strenge zu untersuchen, ob dabei noch der Gleichung $F' = 0$ genügt wird, und hat dann ein zu $F' = 0$ gehöriges zweifach singuläres Integral.

Da aber hier, wo c und e eine Bestimmung erhalten, das y eine ganz bestimmte Function wird, die nicht einmal einen willkürlichen Constanten mehr enthält; so wird auch U ein ganz bestimmter Ausdruck, der nicht einmal einen willkürlichen Constanten mehr enthält. Und sonach kann jetzt von einem Maximum-stande oder Minimum-stande durchaus keine Rede sein.

2) Von den beiden Constanten c und e erleidet nur einer eine Bestimmung. Man nehme an, e sei dieser Constante. Bekommt er einen von x unabhängigen Werth, so werden jedenfalls die beiden Gleichungen $F' = 0$ und $F'' = 0$ zugleich erfüllt, und man hat ein zu Gleichung $F' = 0$ gehöriges einfach besonderes Integral; wird aber e eine Function von x, so hat man strenge zu untersuchen, ob dabei noch Gleichung $F' = 0$ identisch wird, und man hat dann ein zu $F' = 0$ gehöriges einfach singuläres Integral. Die jetzt für y sich ergebende Function mag dargestellt sein durch

$$\text{II)}\quad y = \varphi'(x, c)$$

Die einzige Mutation, welcher diese Gleichung unterworfen werden kann, besteht jetzt

darin, dass man dem c Werthänderungen beilegt, während, wie sein muss, das x ungeändert bleibt. Dabei gibt sich aus II

$$\text{III)}\quad \delta y = \frac{d_c\varphi'(x, c)}{dc}\cdot\vartheta c$$

$$\text{IV)}\quad \delta^2 y = \frac{d_c\varphi'(x, c)}{dc}\cdot\vartheta^2 c + \frac{d_c^2\varphi'(x, c)}{dc^2}\cdot\vartheta c^2$$

etc. etc.

Für U gibt sich jetzt auch ein aus x und c gebildeter Ausdruck, welcher dargestellt sein mag durch

$$\text{V)}\quad U = \psi'(x, c)$$

Man sehe zu, ob $\frac{d_c\psi'(x, c)}{dc} = 0$ oder $\frac{d_c\psi'(x, c)}{dc} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ möglich ist; und wenn man das Prüfungsmittel an $\delta^2 U$ gewinnen kann, so ist jetzt nur

$$\text{VI)}\quad \delta^2 U = \frac{d_c^2\psi'(x, c)}{dc^2}\cdot\vartheta c^2$$

3) Von den beiden Constanten c und e erleidet kein einziger eine Bestimmung, d. h. die Gleichung

$$\text{VII)}\quad y = \varphi(x, c, e)$$

macht die beiden Gleichungen $F' = 0$ und $F'' = 0$ zugleich identisch bei jedem Werthe des c und bei jedem Werthe des e. Die einzige Mutation, welche nun Gleichung VII erleiden kann, ist, dass man dem c und dem e Werthänderungen beilegt; und man bekommt:

$$\text{VIII)}\quad \delta y = \frac{d_c\varphi(x, c, e)}{dc}\cdot\vartheta c + \frac{d_e\varphi(x, c, e)}{de}\cdot\vartheta e$$

etc. etc.

Für U bekommt man gleichfalls einen aus x, c und e gebildeten Ausdruck, welcher dargestellt sein mag durch

$$\text{IX)}\quad U = \psi(x, c, e)$$

Daraus folgt

$$\text{X)}\quad \delta U = \frac{d_c\psi(x, c, e)}{dc}\cdot\vartheta c + \frac{d_e\psi(x, c, e)}{de}\cdot\vartheta e$$

etc. etc.

und wenn man das Prüfungsmittel an $\delta^2 U$ gewinnen kann, so ist nur

$$\text{XI)}\quad \delta^2 U = \frac{d_c^2\psi}{dc^2}\cdot\vartheta c^2 + 2\cdot\frac{d_c d_e\psi}{dc.de}\cdot\vartheta c\cdot\vartheta e + \frac{d_e^2\psi}{de^2}\cdot\vartheta e^2$$

Zweite Auflösung.

§. 206. Man mutire die Gleichungen $F'(x, y, p, q) = 0$ und $F''(x, y, p, q) = 0$, so bekommt man

$$\text{XII)}\quad \frac{d_y F'}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_p F'}{dp}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_q F'}{dq}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$$

$$\text{XIII)}\quad \frac{d_y F''}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_p F''}{dp}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_q F''}{dq}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$$

etc. etc.

und wenn man auch den für U gegebenen Ausdruck mutirt, so bekommt man

$$\text{XIV)}\quad \delta U = \frac{d_y U}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_p U}{dp}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_q U}{dq}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

etc. etc.

Man hat nun von den drei Ausdrücken δy, $\frac{d\delta y}{dx}$ und $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$ zwei als abhängig zu behandeln und zu eliminiren. Eliminirt man δy und $\frac{d\delta y}{dx}$, so gibt sich für δU folgende Form:

$$\text{XV)}\quad \delta U = (\mathfrak{F}'(x, y, p, q)) \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

A) Man sehe zu, ob $\mathfrak{F}'(x, y, p, q) = 0$ möglich ist, und verbinde diese Gleichung mit $F'(x, y, p, q) = 0$ und mit $F''(x, y, p, q) = 0$. Dabei unterscheide man wieder dreierlei:

1. Den beiden Bedingungsgleichungen $F'(x, y, p, q) = 0$ und $F''(x, y, p, q) = 0$ genügt nur eine ganz bestimmte Function $y = \varphi''(x)$, welche nicht einmal einen willkürlichen Constanten mehr enthält; und dabei muss, eben weil nur eine bestimmte Function die beiden Bedingungsgleichungen erfüllen kann, identisch stattfinden $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$ etc., so dass auch $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} = 0$, etc. ist. Dabei ist also auch $\delta U = 0$, $\delta^2 U = 0$ etc. Es kann daher jetzt von keinem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede sein; und somit ist es ganz unnöthig, zu untersuchen, ob die Gleichung $\mathfrak{F}'(x, y, p, q) = 0$ von der bestimmten Function $y = \varphi''(x)$ erfüllt wird, oder nicht.
2. Den beiden Bedingungsgleichungen $F'(x, y, p, q) = 0$ und $F''(x, y, p, q) = 0$ genügt eine Function

$$\text{XVI)}\quad y = \varphi'(x, c)$$

welche noch einen willkürlichen Constanten enthält. Hierbei ist

$$\text{XVII)}\quad \delta y = \frac{d_c\varphi'(x, c)}{dc} \cdot \vartheta c$$

$$\text{XVIII)}\quad \frac{d\delta y}{dx} = \frac{d_x d_c\varphi'(x, c)}{dx \cdot dc} \cdot \vartheta c$$

$$\text{XIX)}\quad \frac{d^2\delta y}{dx^2} = \frac{d_x^2 d_c\varphi'(x, c)}{dx^2 \cdot dc} \cdot \vartheta c$$

und man hat noch zu untersuchen, ob durch $\varphi'(x, c)$ die Gleichung $\mathfrak{F}'(x, y, p, q) = 0$ identisch wird. Wenn man das Prüfungsmittel an $\delta^2 U$ gewinnen kann, so bekommt man jetzt folgende Form:

$$\text{XX)}\quad \delta^2 U = (\mathfrak{F}''(x, y, p, q)) \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2$$

Eliminirt man $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$ mittelst XIX, so bekommt man gradezu wieder Gleichung VI.

3. Den beiden Bedingungsgleichungen $F'(x, y, p, q) = 0$ und $F''(x, y, p, q) = 0$ genügt eine Function

$$\text{XXI)}\quad y = \varphi(x, c, e)$$

welche noch zwei willkürliche Constanten enthält. Hierbei ist

$$\text{XXII)}\quad \delta y = \frac{d_c\varphi(x, c, e)}{dc} \cdot \vartheta c + \frac{d_e\varphi(x, c, e)}{de} \cdot \vartheta e$$

$$\text{XXIII)}\quad \frac{d\delta y}{dx} = \frac{d_x d_c\varphi(x, c, e)}{dx \cdot dc} \cdot \vartheta c + \frac{d_x d_e\varphi(x, c, e)}{dx \cdot de} \cdot \vartheta e$$

$$\text{XXIV)}\quad \frac{d^2\delta y}{dx^2} = \frac{d_x^2 d_c \varphi(x, c, e)}{dx^2 \cdot dc} \cdot \vartheta c + \frac{d_x^2 d_e \varphi(x, c, e)}{dx^2 \cdot de} \cdot \vartheta e$$

und man hat noch zu untersuchen, ob durch $\varphi(x, c, e)$ die Gleichung $\mathfrak{F}'(x, y, p, q) = 0$ identisch wird. Wenn man das Prüfungsmittel an $\delta^2 U$ gewinnen kann, so bekommt man jetzt folgende Form

$$\text{XXV)}\quad \delta^2 U = (\mathfrak{F}''(x, y, p, q)) \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2$$

Eliminirt man $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$ mittelst XXIV, so bekommt man gradezu wieder Gleichung XI.

B) Man sehe zu, ob $\mathfrak{F}'(x, y, p, q) = \frac{\mathfrak{B}}{0}$ möglich ist. Und so fort.

Man hat also hier für y eine Function von x zu suchen, welche jedesmal dreien Differentialgleichungen genügt. Desshalb wird die Aufgabe oft eine überbestimmte sein.

Untersuchung 33.

Es ist U ein reeller mit den Elementen $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ gebildeter Ausdruck; und man sucht für y eine solche Function von x, dass U ein Maximum-stand oder Minimumstand wird, während y nur aus der Zahl derjenigen Functionen gewählt werden darf, bei denen eine gegebene Gleichung $F'\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ identisch wird, und ein Ausdruck $F''\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)$ entweder immer derselben aber nichtgegebenen Function gleich bleibt, oder immer denselben aber nichtgegebenen Werth behält.

Erste Auflösung.

§. 207. Man integrire die Gleichung $F'(x, y, p, q) = 0$, so bekommt man

$$\text{I)}\quad y = \varphi(x, c, e)$$

wo c und e zwei noch willkürliche Constanten sind. Nun führe man $\varphi(x, c, e)$, $\frac{d_x\varphi(x, c, e)}{dx}$, $\frac{d_x^2\varphi(x, c, e)}{dx^2}$ statt y, p, q in $F''(x, y, p, q)$ ein; so bekommt man dafür einen Ausdruck von folgender Form

$$\text{II)}\quad \mathfrak{F}(x, c, e)$$

welcher immer derselben aber nichtgegebenen Function gleichbleiben, oder immer denselben aber nichtgegebenen Werth behalten soll. Einen ähnlichen Ausdruck bekommt man für U, welcher dargestellt sein mag durch

$$\text{III)}\quad U = \psi(x, c, e)$$

Aus II folgt

$$\text{IV)}\quad \frac{d_c\mathfrak{F}(x, c, e)}{dc} \cdot \vartheta c + \frac{d_e\mathfrak{F}(x, c, e)}{de} \cdot \vartheta e = 0$$

und aus III folgt

$$\text{V)}\quad \delta U = \frac{d_c\psi(x, c, e)}{dc} \cdot \vartheta c + \frac{d_e\psi(x, c, e)}{de} \cdot \vartheta e$$

Nimmt man ϑe als abhängig, und eliminirt man es, so nimmt Gleichung V folgende Form an:

$$\text{VI)}\quad \delta U = (\mathfrak{F}'(x, c, e)) \cdot \vartheta c$$

A) Man sehe zu, ob die Gleichung $\mathfrak{F}'(x, c, e) = 0$ möglich ist; und wenn sich für c und e Werthe ergeben, die von x unabhängig sind, so hat man ein zu $F'(x, y, p, q) = 0$ gehöriges besonderes Integral; wenn sich aber entweder für c oder für e oder für c und e zugleich Functionen von x ergeben, so muss man untersuchen, ob auch jetzt die Gleichung $F'(x, y, p, q) = 0$ identisch wird, und man hat ein zu dieser Gleichung gehöriges einfach singuläres oder zweifach singuläres Integral. Wenn man das Prüfungsmittel an $\delta^2 U$ gewinnen kann, so hat man jetzt

$$\text{VII)}\quad \delta^2 U = (\mathfrak{F}''(x, c, e)) \cdot \vartheta c^2$$

B) Man sehe zu, ob auch $\mathfrak{F}'(x, c, e) = \frac{\mathfrak{B}}{0}$ möglich ist.

Und so fort.

Zweite Auflösung.

§. 208. Aus $F'(x, y, p, q) = 0$ folgt

$$\text{VIII)}\quad \frac{d_y F'}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p F'}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_q F'}{dq} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$$

etc. etc.

Aus der für den Ausdruck $F''(x, y, p, q)$ vorgeschriebenen Bedingung folgt

$$\text{IX)}\quad \frac{d_y F''}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p F''}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_q F''}{dq} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$$

etc. etc.

Aus der für U gegebenen Gleichung folgt

$$\text{X)}\quad \delta U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p U}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_q U}{dq} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

etc. etc.

Nimmt man nun δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ als abhängig, und eliminirt man beide; so nimmt δU folgende Form an:

$$\text{XI)}\quad \delta U = (f'(x, y, p, q)) \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

A) Man sehe zu, ob $f'(x, y, p, q) = 0$ gesetzt werden kann. Hier hat man ein den beiden Gleichungen

$$f'(x, y, p, q) = 0 \text{ und } F'(x, y, p, q) = 0$$

gemeinsames Integral zu suchen. Wenn man das Prüfungsmittel an $\delta^2 U$ gewinnen kann, so bekommt man folgende Form:

$$\text{XII)}\quad \delta^2 U = (f''(x, y, p, q)) \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2$$

Aus I folgt

$$\text{XIII)}\quad \delta y = \frac{d_c \varphi(x, c, e)}{dc} \cdot \vartheta c + \frac{d_e \varphi(x, c, e)}{de} \cdot \vartheta e$$

$$\text{XIV)}\quad \frac{d\delta y}{dx} = \frac{d_x d_c \varphi(x, c, e)}{dx \cdot dc} \cdot \vartheta c + \frac{d_x d_e \varphi(x, c, e)}{dx \cdot dc} \cdot \vartheta e$$

$$\text{XV)}\quad \frac{d^2\delta y}{dx^2} = \frac{d_x^2 d_c \varphi(x, c, e)}{dx^2 \cdot dc} \cdot \vartheta c + \frac{d_x^2 d_e \varphi(x, c, e)}{dx^2 \cdot de} \cdot \vartheta e$$

Mittelst Gleichung IV und XV kann man nun den Ausdruck XII auf die Form VII bringen.

B) Man sehe zu, ob $f'(x, y, p, q) = \frac{\mathfrak{B}}{0}$ gesetzt werden kann.

Und so fort.

Man hat also hier eine Function von x zu suchen, welche jedesmal zweien Differentialgleichungen zu genügen hat. Desshalb kann die Aufgabe auch oft eine überbestimmte sein, jedoch nicht so oft, wie in der vorigen Untersuchung, wo die gesuchte Function jedesmal dreien Differentialgleichungen genügen muss.

Untersuchung 34.

Es ist U ein reeller mit den Elementen x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ gebildeter Ausdruck; und man sucht für y eine solche Function von x, dass U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während y nur aus der Zahl derjenigen Functionen gewählt werden darf, bei denen nicht nur

1) ein Ausdruck $F'(x, y, p, q)$ immer derselben aber nichtgegebenen Function gleichbleibt oder immer denselben aber nichtgegebenen Werth behält, sondern

2) auch noch ein anderer Ausdruck $F''(x, y, p, q)$ immer einer und derselben aber nichtgegebenen Function gleichbleibt oder immer einen und denselben aber nichtgegebenen Werth behält.

§. 209. Wegen der für die Ausdrücke $F'(x, y, p, q)$ und $F''(x, y, p, q)$ vorgeschriebenen Bedingungen ist

$$\text{I)}\quad \frac{d_yF'}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_pF'}{dp}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_qF'}{dq}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$$

$$\text{II)}\quad \frac{d_yF''}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_pF''}{dp}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_qF''}{dq}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$$

etc. etc.

und aus dem für U gegebenen Ausdrucke folgt

$$\text{III)}\quad \delta U = \frac{d_yU}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_pU}{dp}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_qU}{dq}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

etc. etc.

Nimmt man δy und $\frac{d\delta y}{dx}$ als abhängig, und eliminirt man sie; so nimmt δU folgende Form an

$$\text{IV)}\quad \delta U = (f'(x, y, p, q))\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

A) Man sehe zu, ob $f'(x, y, p, q) = 0$ möglich ist, und integrire diese Gleichung, so bekommt man

$$\text{V)}\quad y = \varphi(x, c, e)$$

wo c und e zwei noch willkürliche Constanten sind. Weil aber keine weitere Gleichung mehr gegeben ist, so hat man auch die Function V keiner weiteren Prüfung zu unterwerfen; und die Constanten c und e werden durch Nebenbedingungen bestimmt. Kann man das Prüfungsmittel an δ^2U gewinnen, so bekommt man die Form

$$\text{VI)}\quad \delta^2U = (f''(x, y, p, q))\cdot\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2$$

B) Man sehe zu, ob die Gleichung $f'(x, y, p, q) = \frac{\mathfrak{B}}{0}$ möglich ist.

Und so fort.

Da man hier jedesmal nur eine einzige Gleichung hat, aus welcher die für y gesuchte Function bestimmt werden soll; so wird jetzt die Aufgabe niemals eine überbestimmte sein, sondern in der Regel ein brauchbares Resultat liefern.

Es ist nun nicht mehr nöthig, diejenigen Untersuchungen vorzunehmen, wo sowohl der für U gegebene Ausdruck als auch die Bedingungsgleichungen mit Differentialquotienten versehen sind, welche die zweite Ordnung übersteigen. Das bisherige Verfahren lässt sich gradezu auf dergleichen Untersuchungen ausdehnen.

Untersuchung 35.

Es ist U ein mit den Elementen x, y, y_a, y_α, $\frac{dy}{dx}$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_\alpha$, etc. gebildeter reeller Ausdruck; und man sucht für y eine solche Function von x, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 210. Mutirt man, so bekommt man für δU einen Ausdruck von folgender Form:

$$\begin{aligned}\delta U = {} & A \cdot \delta y + A' \cdot \delta y_a + A'' \cdot \delta y_\alpha \\ & + B \cdot \frac{d\delta y}{dx} + B' \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a + B'' \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha \\ & + C \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + C' \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_a + C'' \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_\alpha \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Je nachdem nun die Ausdrücke δy, δy_a, δy_α, $\frac{d\delta y}{dx}$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$, etc. alle willkürlichen oder bestimmten Bedingungen unterworfen sind, wird die Zerlegung verschieden ausfallen. Dergleichen Verschiedenheiten hier besonders aufzuführen, ist nun nicht mehr nöthig; und es ist genug, die Aufgaben 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102 zu citiren.

Untersuchung 36.

Es ist U ein reeller mit den Elementen x, y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc. etc. gebildeter Ausdruck, wo die Elemente y und z ganz unabhängig untereinander sind; und man sucht für y und z solche reelle Functionen des nichtmutablen Veränderlichen x, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 211. Mutirt man, so bekommt man für δU einen Ausdruck von folgender Form:

$$\begin{aligned}\delta U = {} & A \cdot \delta y + A' \cdot \frac{d\delta y}{dx} + A'' \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + A''' \cdot \frac{d^3\delta y}{dx^3} + \ldots\ldots \\ & + B \cdot \delta z + B' \cdot \frac{d\delta z}{dx} + B'' \cdot \frac{d^2\delta z}{dx^2} + B''' \cdot \frac{d^3\delta z}{dx^3} + \ldots\ldots\end{aligned}$$

Die Ausdrücke δy und δz sind sowohl dem Werthe nach als auch der Form nach ganz unabhängig voneinander; ein Gleiches gilt zwischen $\frac{d\delta y}{dx}$ und $\frac{d\delta z}{dx}$; ein Gleiches gilt zwischen $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$ und $\frac{d^2\delta z}{dx^2}$; und so fort. Wenn aber gleich mit der Form der willkürlichen Function δy auch die Formen aller ihrer Differentialquotienten $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, $\frac{d^3\delta y}{dx^3}$, etc. mitgegeben sind; so sind doch alle diese Ausdrücke dem Werthe nach völlig unabhängig voneinander. Ein Gleiches gilt zwischen der willkürlichen Function δz und den davon abgeleiteten Differentialquotienten (Man vergleiche noch §. 91 und §. 94). Hinsichtlich der Zerlegung von δU braucht nun nichts weiter bemerkt zu werden; es ist genug, auf die Aufgaben 103—110, 119, 120, 123—125 zu verweisen.

Untersuchung 37.

Es ist U ein reeller mit den Elementen x, y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$, etc. gebildeter Ausdruck; und zugleich ist noch eine Urgleichung $F(x, y, z) = 0$ gegeben. Man sucht für y und z solche zusammengehörige Functionen von x, dass dabei nicht nur U ein Maximum-stand oder Minimum-stand, sondern dass auch der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ identisch genügt wird.

§. 212. Um in das Verfahren einzuleiten, setze man, U sei ein nur mit den Elementen x, y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ gebildeter Ausdruck; dann sind folgende drei Auflösungen möglich.

Erste Auflösung.

Weil y und z solche zusammengehörige Functionen sein sollen, dass jedesmal die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ identisch erfüllt wird; so ist von den zwei Elementen y und z das eine unmittelbar mutabel, und das andere ist mittelbar mutabel. Man gelangt zu ganz gleichen Resultaten, man mag das eine oder das andere als unmittelbar mutabel nehmen. Man schaue sich also jedesmal genau danach um, ob es bequemer ist, y oder z als unmittelbar mutabel zu nehmen. Man nehme z als mittelbar, und entwickle es aus $F(x, y, z) = 0$, so dass sich dabei $z = \mathfrak{F}(x, y)$ ergibt. Nun differentiire man diese Gleichung nach allem x, und es gibt sich $\frac{dz}{dx} = \frac{d_x\mathfrak{F}(x, y)}{dx} + \frac{d_y\mathfrak{F}(x, y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$. Diese für z und $\frac{dz}{dx}$ hergestellten Ausdrücke führe man in den für U gegebenen Ausdruck ein, so ist die Untersuchung auf die sechsundzwanzigste gebracht.

Zweite Auflösung.

Man mutire vorerst, und eliminire die mittelbaren Mutationscoefficienten. Aus dem für U hergestellten Ausdrucke folgen für δU und $\delta^2 U$ folgende Formen

$$\text{I)}\quad \delta U = A \cdot \delta y + A' \cdot \frac{d\delta y}{dx} + A'' \cdot \delta z + A''' \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

$$\text{II)}\quad \delta^2 U = A \cdot \delta^2 y + A' \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + A'' \cdot \delta^2 z + A''' \cdot \frac{d\delta^2 z}{dx}$$

$$+ B \cdot \delta y^2 + 2 \cdot B' \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2B'' \cdot \delta y \cdot \delta z + 2B''' \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

$$+ C \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 2C' \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta z + 2C'' \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

$$+ E \cdot \delta z^2 + 2E' \cdot \delta z \cdot \frac{d\delta z}{dx} + F \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2$$

Aus $F(x, y, z) = 0$ geben sich Mutationsgleichungen von folgenden Formen:

$$\text{III)} \quad \mathfrak{A} \cdot \delta y + \mathfrak{A}' \cdot \delta z = 0$$

$$\text{IV)} \quad \mathfrak{A} \cdot \delta^2 y + \mathfrak{A}' \cdot \delta^2 z + \mathfrak{B} \cdot \delta y^2 + 2\mathfrak{B}' \cdot \delta y \cdot \delta z + \mathfrak{B}'' \cdot \delta z^2 = 0$$

Und wenn man beide Gleichungen nach allem x differentiirt, so bekommt man

$$\text{V)} \quad \frac{d\mathfrak{A}}{dx} \cdot \delta y + \mathfrak{A} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d\mathfrak{A}'}{dx} \cdot \delta z + \mathfrak{A}' \cdot \frac{d\delta z}{dx} = 0$$

$$\text{VI)} \quad \frac{d\mathfrak{A}}{dx} \cdot \delta^2 y + \mathfrak{A} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{d\mathfrak{A}'}{dx} \cdot \delta^2 z + \mathfrak{A}' \cdot \frac{d\delta^2 z}{dx}$$

$$+ \frac{d\mathfrak{B}}{dx} \cdot \delta y^2 + 2\mathfrak{B} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot \frac{d\mathfrak{B}'}{dx} \cdot \delta y \cdot \delta z + 2\mathfrak{B}' \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

$$+ 2\mathfrak{B}' \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta z + \frac{d\mathfrak{B}''}{dx} \cdot \delta z^2 + 2\mathfrak{B}'' \cdot \delta z \cdot \frac{d\delta z}{dx} = 0$$

Man nehme nun III und V, und eliminire δz und $\frac{d\delta z}{dx}$ aus I; so bekommt man für δU folgende Form

$$\text{VII)} \quad \delta U = \mathfrak{C} \cdot \delta y + \mathfrak{C}' \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Man nehme III, IV, V, VI, und eliminire δz, $\delta^2 z$, $\frac{d\delta z}{dx}$, $\frac{d\delta^2 z}{dx}$ aus II; so bekommt man für $\delta^2 U$ folgende Form

$$\text{VIII)} \quad \delta^2 U = \mathfrak{C} \cdot \delta^2 y + \mathfrak{C}' \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \mathfrak{F} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \mathfrak{F}' \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{F}'' \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Wie man mit VII und VIII zu verfahren hat, bedarf keiner Auseinandersetzung mehr.

Dritte Auflösung.

Weil $F(x, y, z) = 0$ eine identische Function ist, so ist auch jede nach allem x genommene Differentialgleichung eine identische Function. Differentiirt man wirklich nach allem x, und setzt man dann zur Abkürzung p und $\mathfrak{p}$ bezüglich statt $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$; so bekommt man

$$\text{IX)} \quad \frac{d_x F}{dx} + \frac{d_y F}{dy} \cdot p + \frac{d_z F}{dz} \cdot \mathfrak{p} = 0$$

Man multiplicire nun $F(x, y, z) = 0$ mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{L}$ von x; so ist auch das Product $\mathfrak{L} \cdot F(x, y, z) = 0$ noch eine identische Gleichung. Man multiplicire auch Gleichung IX mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{M}$ von x; so ist auch dieses Product noch eine identische Gleichung. Somit ist noch vollkommen genau

$$\text{X)} \quad U = U + \mathfrak{L} \cdot F(x, y, z) + \mathfrak{M} \cdot \left(\frac{d_x F}{dx} + \frac{d_y F}{dy} \cdot p + \frac{d_z F}{dz} \cdot \mathfrak{p}\right)$$

Und so fort.

Statt aller weiteren Auseinandersetzungen genügt es, auf die Aufgaben **111**, **112**, **113**, **114** zu verweisen.

Ist aber der Gang des in dieser Untersuchung vorgenommenen einfachen Falles, wo nemlich U ein nur mit den Elementen x, y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ gebildeter Ausdruck ist, einmal recht aufgefasst; so kann man das Verfahren ohneweiters auch auf zusammengesetztere Fälle, wo nemlich der für U gegebene Ausdruck noch Differentialquotienten, die höher als $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ sind, enthält, ausdehnen.

Untersuchung 38.

Es ist U ein reeller mit den Elementen x, y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ gebildeter Ausdruck; und man sucht für y und z solche Functionen von x, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während eben diese für y und z gesuchten Functionen solche zusammengehörige sein müssen, dass irgend ein anderer Ausdruck F(x, y, z) entweder immer der nemlichen aber nichtgegebenen Function von x gleichbleibt oder immer den nemlichen aber nichtgegebenen constanten Werth behält.

§. 213. Wegen der für F(x, y, z) gemachten Bedingung müssen die von diesem Ausdrucke herkommenden Mutationsgleichungen jeder Ordnung für sich identisch zu Null werden, d. h. es muss sein

$$\text{I)}\quad \frac{d_yF}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_zF}{dz}\cdot\delta z = 0$$

$$\text{II)}\quad \frac{d_yF}{dy}\cdot\delta^2 y + \frac{d_zF}{dz}\cdot\delta^2 z + \frac{d_y^2F}{dy^2}\cdot\delta y^2 + 2\cdot\frac{d_yd_zF}{dy.dz}\cdot\delta y\cdot\delta z + \frac{d_z^2F}{dz^2}\cdot\delta z^2 = 0$$

etc. etc.

Man erkennt also, dass, wenn man z für das mittelbar mutable Element nimmt, und man wie bei der zweiten Auflösung der vorigen Untersuchung verfahrt, sich für δU und $\delta^2 U$ folgende Formen ergeben:

$$\text{III)}\quad \delta U = (f'(x, y, z, p, \mathfrak{p}))\cdot\delta y + (f''(x, y, z, p, \mathfrak{p}))\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$

$$\text{IV)}\quad \delta^2 U = (f'(x, y, z, p, \mathfrak{p}))\cdot\delta^2 y + (f''(x, y, z, p, \mathfrak{p}))\cdot\frac{d\delta^2 y}{dx}$$
$$+ \mathfrak{F}\cdot\delta y^2 + 2\cdot\mathfrak{F}'\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{F}''\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Erstens. Sollen die gesuchten Functionen aus allen möglichen einander nächstanliegenden herausgewählt werden, so muss eines von folgenden vier Systemen zweier Gleichungen stattfinden:

$$f'(x, y, z, p, \mathfrak{p}) = 0 \text{ und } f''(x, y, z, p, \mathfrak{p}) = 0$$

$$f'(x, y, z, p, \mathfrak{p}) = 0 \text{ und } f''(x, y, z, p, \mathfrak{p}) = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

$$f'(x, y, z, p, \mathfrak{p}) = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } f''(x, y, z, p, \mathfrak{p}) = 0$$

$$f'(x, y, z, p, \mathfrak{p}) = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } f''(x, y, z, p, \mathfrak{p}) = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

Man hat also jedesmal zwei Gleichungen, aus denen sich durch Integration für y und z bestimmte Functionen mit zwei willkürlichen Constanten ergeben.

Zweitens. Da z als das mittelbar mutable Element genommen worden ist, so sind die Mutationen des z von denen des y abhängig Man kann also auch nur die Mutationen des y willkürlichen Bedingungen unterwerfen; die Zustände des δz, d^2z etc. ergeben sich dann jedesmal aus den Gleichungen I, II etc. Macht man also die Einschränkung, dass man y nur aus der Zahl derjenigen bei jedem Werthe des x einander nächstanliegenden Functionen herauswählen dürfe, deren erste Differentialquotienten bei dem grade für x gedachten Werthe alle mit $\frac{dy}{dx}$ einerlei Werth annehmen; so ist jetzt $\frac{d\delta y}{dx} = 0$, $\frac{d\delta^2 y}{dx} = 0$ etc., und die Gleichungen III und IV reduciren sich auf

$$\text{V)}\quad \delta U = (f'(x, y, z, p, \mathfrak{p})) \cdot \delta y$$

$$\text{VI)}\quad \delta^2 U = (f'(x, y, z, p, \mathfrak{p})) \cdot \delta^2 y + \mathfrak{F} \cdot \delta y^2$$

Hier muss also eine von folgenden zwei Gleichungen

$$\text{entweder } f'(x, y, z, p, \mathfrak{p}) = 0 \text{ oder } f'(x, y, z, p, \mathfrak{p}) = \frac{\mathfrak{A}}{0}$$

stattfinden; und man erkennt, dass, weil nur eine einzige Gleichung existirt, während sowohl für y als auch für z eine Function von x gesucht werden soll, die Aufgabe jetzt eine diophantische ist, welche ihre Lösung dadurch findet, dass man für das mittelbar mutable Element z eine ganz beliebige Function von x annimmt.

Drittens. Soll man y nur aus der Zahl derjenigen bei jedem Werthe des x einander nächstanliegenden Functionen herauswählen, welche bei dem grade für x gedachten Werthe alle mit y einerlei Werth bekommen, während ihre ersten Differentialquotienten allerlei verschiedene Werthe bekommen können; so ist jetzt $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$ etc.; und die Gleichungen III und IV reduciren sich auf

$$\text{VII)}\quad \delta U = (f''(x, y, z, p, \mathfrak{p})) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\text{VIII)}\quad \delta^2 U = (f''(x, y, z, p, \mathfrak{p})) \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \mathfrak{F}'' \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Dieser dritte Fall liefert also ein ähnliches Resultat, wie der vorhergehende zweite.

Ist aber der Gang des in dieser Untersuchung vorgenommenen einfachen Falles recht aufgefasst; so kann man das Verfahren auf den zusammengesetzten Fall, wo nemlich der für U gegebene Ausdruck noch Differentialquotienten, die höher als $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ sind, enthält, ohneweiters ausdehnen.

Untersuchung 39.

Es ist U ein reeller mit den Elementen x, y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ gebildeter Ausdruck; und zugleich ist noch eine Differentialgleichung

$$F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = 0$$

gegeben. Man sucht für y und z solche zusammengehörige Functionen von x, dass dabei nicht nur U ein Maximum-stand oder Minimum-stand, sondern auch der Bedingungsgleichung identisch genügt wird.

§. 214. Man integrire die Bedingungsgleichung $F = 0$, so ist diese Untersuchung auf die 37[te] zurückgedacht, und hat keine Eigenthümlichkeiten mehr. Statt aller Weitläufigkeiten ist es besser, auf die Aufgaben 115, 121 und 122 zu verweisen.

Untersuchung 40.

Es ist U ein reeller mit den Elementen $x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ gebildeter Ausdruck; und man sucht für y und z solche Functionen von x, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während eben diese für y und z gesuchten Functionen solche zusammengehörige sein sollen, dass irgend ein anderer Ausdruck

$$F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right)$$

entweder immer der nemlichen aber nichtgegebenen Function von x gleich bleibt, oder immer den nemlichen aber nichtgegebenen constanten Werth behält.

§. 215. Weil diesmal $F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right)$ keine Gleichung ist, so kann man diesen Ausdruck auch nicht integriren; aber wegen der für ihn gemachten Bedingung müssen die Mutationsgleichungen jeder einzelnen Ordnung zu Null werden. Setzt man nur zur Abkürzung noch p statt $\frac{dy}{dx}$, und $\mathfrak{p}$ statt $\frac{dz}{dx}$; so bekommt man

$$\text{I)}\quad \frac{d_y F}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_p F}{dp}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_z F}{dz}\cdot\delta z + \frac{d_\mathfrak{p} F}{d\mathfrak{p}}\cdot\frac{d\delta z}{dx} = 0$$

etc. etc.

Aus dem für U gegebenen Ausdrucke bekommt man

$$\text{II)}\quad \delta U = \frac{d_y U}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_p U}{dp}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_z U}{dz}\cdot\delta z + \frac{d_\mathfrak{p} U}{d\mathfrak{p}}\cdot\frac{d\delta z}{dx}$$

etc. etc.

Man kann also hier von den vier Elementen $\delta y, \delta z, \frac{d\delta y}{dx}, \frac{d\delta z}{dx}$ nur eines als abhängig nehmen. Nimmt man z. B. $\frac{d\delta z}{dx}$ als abhängig, so geht II über in

$$\text{III)}\quad \delta U = (\mathfrak{F}(x, y, z, p, \mathfrak{p}))\cdot\delta y + (\mathfrak{F}'(x, y, z, p, \mathfrak{p}))\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$
$$+ (\mathfrak{F}''(x, y, z, p, \mathfrak{p}))\cdot\delta z$$

Und so fort.

Untersuchung 41.

Es ist U ein reeller mit den Elementen $x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ gebildeter Ausdruck; und zugleich sind noch zwei Differentialgleichungen

$$F'\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = 0$$

$$F''\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = 0$$

gegeben. Man sucht für y und z solche zusammengehörige Functionen von x, dass dabei nicht nur U ein Maximum-stand oder Minimum-stand, sondern auch den beiden Bedingungsgleichungen F' = 0 und F'' = 0 identisch genügt wird.

§. 216. Man integrire die beiden Bedingungsgleichungen, so bekommt man sowohl für y als auch für z eine ganz bestimmte Function von x mit der gehörigen Zahl willkürlicher Constanter. Man kann aber auch zuerst mutiren, hieraus die mittelbaren Mutationscoefficienten eliminiren, und dann erst die gesuchten Functionen bestimmen. (Man sehe die Aufgaben 116, 117 und 118.)

Untersuchung 42.

Es ist U ein reeller mit den Elementen x, y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ gebildeter Ausdruck; und man sucht für y und z solche Functionen von x, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während eben diese für y und z gesuchten Functionen solche zusammengehörige sein sollen, dass dabei

1) der Gleichung $F'\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = 0$ identisch genügt wird, und dass zugleich

2) der Ausdruck $F''\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right)$ entweder immer derselben aber nichtgegebenen Function von x gleichbleibt, oder immer denselben aber nichtgegebenen constanten Werth behält.

§. 217. Aus der Gleichung F' = 0 folgt

$$\text{I)}\quad \frac{d_y F'}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_p F'}{dp}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_z F'}{dz}\cdot\delta z + \frac{d_{\mathfrak{p}} F'}{d\mathfrak{p}}\cdot\frac{d\delta z}{dx} = 0$$

etc. etc.

Wegen der für den Ausdruck F'' gemachten Bedingung müssen alle davon abgeleiteten Mutationsgleichungen identisch zu Null werden, d. h. es muss sein

$$\text{II)}\quad \frac{d_y F''}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_p F''}{dp}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_z F''}{dz}\cdot\delta z + \frac{d_{\mathfrak{p}} F''}{d\mathfrak{p}}\cdot\frac{d\delta z}{dx} = 0$$

etc. etc.

Jetzt sind also von den vier Elementen δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, δz, $\frac{d\delta z}{dx}$ zwei abhängig. Man nehme δz und $\frac{d\delta z}{dx}$ als abhängig, so ergibt sich für δU ein Ausdruck von folgender Form:

$$\text{III)}\quad \delta U = (\mathfrak{F}'(x, y, z, p, \mathfrak{p}))\cdot\delta y + (\mathfrak{F}''(x, y, z, p, \mathfrak{p}))\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$

Hat man nun mittelst der aus $\mathfrak{F}'(x, y, z, p, \mathfrak{p})$ und $\mathfrak{F}''(x, y, z, p, \mathfrak{p})$ sich ergebenden zwei Gleichungen für y und z zwei bestimmte Functionen hergestellt, so muss man noch sorgfältig untersuchen, ob dadurch auch die Gleichung $F'(x, y, z, p, \mathfrak{p}) = 0$ identisch wird.

Untersuchung 43.

Es ist U ein reeller mit den Elementen x, y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ gebildeter Ausdruck, und man sucht für y und z solche Functionen von x, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während die für y und z gesuchten Functionen solche zusammengehörige sein sollen, bei denen nicht nur

1) ein Ausdruck $F'(x, y, z, p, \mathfrak{p})$ immer derselben aber nichtgegebenen Function gleichbleibt oder immer denselben aber nichtgegebenen Werth behält; sondern bei denen auch noch

2) ein anderer Ausdruck $F''(x, y, z, p, \mathfrak{p})$ immer derselben aber nichtgegebenen Function gleichbleibt oder immer denselben aber nichtgegebenen Werth behält.

§. 218. Wegen der für die beiden Ausdrücke F' und F'' gemachten Bedingungen müssen die davon abgeleiteten Mutationsgleichungen alle identisch zu Null werden; und wenn man δz und $\frac{d\delta z}{dx}$ als abhängig nimmt, so bekommt man für δU einen Ausdruck von folgender Form

$$\delta U = (\mathfrak{F}'(x, y, z, p, \mathfrak{p})) \cdot \delta y + (\mathfrak{F}''(x, y, z, p, \mathfrak{p})) \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

Aus den Ausdrücken $\mathfrak{F}'(x, y, z, p, \mathfrak{p})$ und $\mathfrak{F}''(x, y, z, p, \mathfrak{p})$ ergeben sich jedesmal zwei Gleichungen, die zur Herstellung bestimmter Functionen für y und z dienen. Und weil man nicht zu untersuchen hat, ob durch diese Functionen noch eine dritte Gleichung identisch wird; so wird jetzt die Aufgabe niemals eine überbestimmte sein.

Untersuchung 44.

Es ist U ein reeller mit den Elementen x, y, y_a, y_α, z, z_a, z_α, p, p_a, p_α, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_a$, $\mathfrak{p}_\alpha$, q, q_a, q_α, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_a$, $\mathfrak{q}_\alpha$, etc. gebildeter Ausdruck, wo $p = \frac{dy}{dx}$, $\mathfrak{p} = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{d^2y}{dx^2}$, $\mathfrak{q} = \frac{d^2z}{dx^2}$, etc. ist; und man sucht für y und z solche Functionen von x, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 219. Mutirt man, so bekommt man für δU einen Ausdruck von folgender Form

$$\begin{aligned}\delta U = {} & A \cdot \delta y + A' \cdot \delta y_a + A'' \cdot \delta y_\alpha + \mathfrak{A} \cdot \delta z + \mathfrak{A}' \cdot \delta z_a + \mathfrak{A}'' \cdot \delta z_\alpha \\ & + B \cdot \frac{d\delta y}{dx} + B' \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a + B'' \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha \\ & + \mathfrak{B} \cdot \frac{d\delta z}{dx} + \mathfrak{B}' \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a + \mathfrak{B}'' \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha \\ & + C \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + C' \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_a + C'' \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_\alpha \\ & + \mathfrak{C} \cdot \frac{d^2\delta z}{dx^2} + \mathfrak{C}' \cdot \left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right)_a + \mathfrak{C}'' \cdot \left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right)_\alpha \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Je nachdem nun die Mutationen alle willkürlich oder bestimmten Bedingungen unterworfen sind, wird die Zerlegung verschieden ausfallen. Dergleichen Verschiedenheiten aber besonders aufzuzählen, ist hier nicht mehr nöthig. (Man sehe die Aufgaben 126 bis 132.)

Untersuchung 45.

Es ist U ein reeller mit den Elementen x, w, y, $\frac{d_xy}{dx}$, $\frac{d_wy}{dw}$, $\frac{d_x^2y}{dx^2}$, $\frac{d_xd_wy}{dx.dw}$, $\frac{d_w^2y}{dw^2}$ etc. gebildeter Ausdruck; und man sucht für y eine solche Function der beiden nichtmutablen Veränderlichen x und w, dass dabei U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 220. Da U ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden soll, so sind die nichtmutablen Elemente x und w noch ganz allgemein, d. h. man kann jedem was immer für einen beliebigen besondern reellen Werth beilegen. Wenn man nun irgend eine durch $\varphi(x, w)$ dargestellte reelle Function an die Stelle des y, folglich auch $\frac{d_x\varphi(x, w)}{dx}$, $\frac{d_w\varphi(x, w)}{dw}$, $\frac{d_x^2\varphi(x, w)}{dx^2}$, etc. bezüglich statt $\frac{d_xy}{dx}$, $\frac{d_wy}{dw}$, $\frac{d_x^2y}{dx^2}$, etc. in die ursprüngliche Gleichung einsetzt; so bekommt man auch für U eine Function von x und w, welche mit $\psi(x, w)$ bezeichnet sein mag. Die dem $\varphi(x, w)$ bei jedem Werthe des x und bei jedem Werthe des w nächstvorgehenden und nächstnachfolgenden Nachbarfunctionen werden (nach §. 60) im Allgemeinen dargestellt durch

$$\text{I)}\quad \varphi(x, w) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

wo jeder der Ausdrücke δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. eine für sich beliebige reelle Function von x und w vorstellt, und $\varkappa$ bald als positiv bald als negativ im Momente des Verschwindens befindlich gedacht wird. Die aus diesen Functionen sich ergebenden Differentialquotienten sind dann

$$\text{II)}\quad \frac{d_x\varphi(x, w)}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d_x\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d_x\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d_x\delta^3 y}{dx} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\text{III)}\quad \frac{d_w\varphi(x, w)}{dw} + \varkappa \cdot \frac{d_w\delta y}{dw} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d_w\delta^2 y}{dw} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d_w\delta^3 y}{dw} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

etc. etc.

Man erkennt aber, dass alle Untersuchungen, wo eine Function zweier Veränderlicher verlangt wird, denjenigen Untersuchungen analog sind, welche eine Function eines einzigen Veränderlichen verlangen, und bereits (in §§. 180–219) abgehandelt sind. Desshalb genügt es, auf die Aufgaben 133 bis 153 zu verweisen.

Untersuchung 46.

Es ist U ein reeller mit den Elementen x, y, $\frac{dy}{dx}$ gebildeter Ausdruck; und man sucht für y eine solche reelle Function von x und zugleich für x einen solchen besonderen reellen Werth, dass der dabei sich ergebende bestimmte reelle Werth des U grösser oder kleiner wird, als alle diesem bestimmten Werthe des U nächstanliegenden Nachbarzustände, d. h. der gesuchte Werth des U soll ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes werden.

§. 221. Die irgend einem Werthe des x nächstvorangehenden und nächstnachfolgenden Nachbarwerthe werden im Allgemeinen dargestellt durch

$$\text{I)}\quad x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Alle irgend einem Werthe einer für y beliebig gewählten Function nächstvorangehenden und nächstnachfolgenden, sowohl aus dieser für y gewählten Function als auch aus allen nächstanliegenden Nachbarfunctionen hervorgehenden Nachbarwerthe werden im Allgemeinen dargestellt durch

$$\text{II)}\quad y + \varkappa \cdot (\delta) y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\delta)^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot (\delta)^3 y + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und die davon abgeleiteten Differentialquotienten sind

$$\text{III)}\quad \frac{dy}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d_{(}\delta_{)}^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d_{(}\delta_{)}^3 y}{dx} + \ldots\ldots$$

wo, wie (aus §. 77) bekannt,

$${}_{(}\delta_{)}y = \delta y + \frac{dy}{dx} \cdot \vartheta x$$

$$\frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx} = \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \vartheta x$$

$${}_{(}\delta_{)}^2 y = \delta^2 y + 2 \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + \frac{dy}{dx} \cdot \vartheta^2 x$$

$$\frac{d_{(}\delta_{)}^2 y}{dx} = \frac{d\delta^2 y}{dx} + 2 \cdot \frac{d^2 \delta y}{dx^2} \cdot \vartheta x + \frac{d^3 y}{dx^3} \cdot \vartheta x^2 + \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \vartheta^2 x$$

etc. etc.

ist. Mutirt man U, so bekommt man

$$\text{IV)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = \delta U + \frac{dU}{dx} \cdot \vartheta x$$

$$\text{V)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2 U = \delta^2 U + 2 \cdot \frac{d\delta U}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d^2 U}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + \frac{dU}{dx} \cdot \vartheta^2 x$$

etc. etc.

Hier ist aber bekanntlich

$$\delta U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p U}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\delta^2 U = \frac{d_y U}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_p U}{dp} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_p U}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2 U}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

Also ist

$$\frac{d\delta U}{dx} = \frac{d\left(\frac{d_y U}{dy}\right)}{dx} \cdot \delta y + \frac{d_y U}{dy} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d\left(\frac{d_p U}{dp}\right)}{dx} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p U}{dp} \cdot \frac{d^2 \delta y}{dx^2}$$

Ferner ist

$$\frac{dU}{dx} = \frac{d_x U}{dx} + \frac{d_y U}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_p U}{dp} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{d_x^2 U}{dx^2} + 2 \cdot \frac{d_x d_y U}{dx.dy} \cdot \frac{dy}{dx} + 2 \cdot \frac{d_x d_p U}{dx.dp} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d_y^2 U}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$+ 2 \cdot \frac{d_y d_p U}{dy.dp} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d_p^2 U}{dp^2} \cdot \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 + \frac{d_y U}{dy} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d_p U}{dp} \cdot \frac{d^3 y}{dx^3}$$

etc. etc.

Wie man alle diese Ausdrücke weiter zu behandeln hat, bedarf keiner Auseinandersetzung.

Untersuchung 47.

Es ist U ein reeller mit den Elementen x, a, α, y, y_a, y_α, $\frac{dy}{dx}$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha$ gebildeter Ausdruck; und man sucht für y eine solche reelle Function von x, und zugleich

auch für x einen solchen besonderen reellen Werth, dass der dabei sich für U ergebende bestimmte reelle Werth grösser oder kleiner wird, als alle diesem bestimmten Werthe des U nächstanliegenden Nachbarzustände, d. h. der gesuchte Werth des U soll ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes werden.

§. 222. Die irgend einem Werthe des x nächstvorgehenden und nächstnachfolgenden Nachbarwerthe werden im Allgemeinen dargestellt durch

$$\text{I)}\quad x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x + \cdots\cdots$$

Alle irgend einem Werthe einer für y beliebig gewählten Function nächstvorgehenden und nächstnachfolgenden, sowohl aus dieser für y gewählten Function als auch aus allen nächstanliegenden Nachbarfunctionen hervorgehenden Nachbarwerthe werden im Allgemeinen dargestellt durch

$$\text{II)}\quad y + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 y + \cdots\cdots$$

und die davon abgeleiteten Differentialquotienten sind

$$\text{III)}\quad \frac{dy}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d{}_{(}\delta_{)}y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d{}_{(}\delta_{)}^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d{}_{(}\delta_{)}^3 y}{dx} + \cdots\cdots$$

Weil aber a und α feste Werthe sind, so erleiden die Elemente y_a, y_α, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha$ nur reine Mutationen, d. h. die ihnen nächstanliegenden Nachbarzustände sind bezüglich

$$\text{IV)}\quad y_a + \varkappa \cdot \delta y_a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y_a + \cdots\cdots$$

$$\text{V)}\quad y_\alpha + \varkappa \cdot \delta y_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y_\alpha + \cdots\cdots$$

$$\text{VI)}\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_a + \varkappa \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \left(\frac{d\delta^3 y}{dx}\right)_a + \cdots\cdots$$

$$\text{VII)}\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha + \varkappa \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \left(\frac{d\delta^3 y}{dx}\right)_\alpha + \cdots\cdots$$

Die weitere Ausführung dieser Untersuchung kann in Folge alles Vorhergehenden unterlassen werden.

Es ist ersichtlich, dass die in diese zweite Abtheilung gehörigen Untersuchungen sich noch ungeheuer vervielfältigen lassen.

Auch wären namentlich noch solche Untersuchungen aufzustellen, wo

zusammengesetze Mutationen

angewendet werden. Dieses ist aber nicht mehr nöthig, da in Folge alles Vorhergehenden dergleichen Untersuchungen ohne Anstand ausgeführt werden können.

C. Ausdrücke, wo Integrale vorkommen.

Untersuchung 48.

Es ist V ein reeller, mit den Elementen x und y gebildeter Ausdruck, und man sucht für y eine solche reelle Function des nichtmutablen Veränderlichen x, dass dabei das zwischen den Gränzen von x = a bis x = α erstreckte Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 223. Weil die Werthe von a und α nicht gesucht zu werden brauchen, sondern beliebig sein können, und nicht mit ihren nächstanliegenden Nachbarwerthen verglichen werden müssen; desshalb kann hier nur im Allgemeinen von einem Maximum-stande oder Minimum-stande, und nicht von einem Maximumwerthe oder Minimumwerthe die Rede sein (vergleiche §. 112). Man berücksichtige jedoch stets, dass $\alpha > a$, d. h. dass die Differenz $(\alpha - a)$ positiv ist.

Wenn man nun irgend eine durch $\varphi(x)$ dargestellte reelle Function an die Stelle des y in Gleichung I einsetzt; so bekommt man für U einen aus a und α gebildeten Ausdruck, welcher dargestellt sein mag durch

$$\text{II)}\quad U' = \psi(\alpha) - \psi(a)$$

Nun werden (nach §. 60) alle die der Function $\varphi(x)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen dargestellt durch

$$\text{III)}\quad \varphi(x) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

wo jeder der Ausdrücke δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. eine für sich beliebige reelle Function vorstellt, und $\varkappa$ bald als positiv bald als negativ im Momente des Verschwindens befindlich gedacht wird. Führt man diese Reihe III an die Stelle des y in Gleichung I ein, so bekommt man die dem U' nächstanliegenden Nachbarzustände, welche dargestellt werden mögen durch $(\psi(\alpha) - \psi(a) + \Delta U)$ oder durch $(U' + \Delta U)$.

Soll nun bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ die Differenz $(U' + \Delta U) - U'$ unter allen Umständen ihr Zeichen nicht wechseln können; so darf sich, wenn man für ΔU die nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt, keineswegs die (in §. 62 aufgestellte) allgemeine Reihenform

$$\Delta U = \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

ergeben, wo

$$\delta U = \int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y \cdot dx$$

$$\delta^2 U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_y^2 V}{dy^2} \cdot \delta y^2 \right) \cdot dx$$

etc. etc.

ist; denn hierbei würde ΔU zugleich mit $\varkappa$ das Zeichen ändern. Die für ΔU herzustellende Reihe darf also nicht mit $\varkappa \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y \cdot dx$ anfangen, während δy jede beliebige reelle Function von x vorstellt. Die Reihe fängt aber nicht mit $\varkappa \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y \cdot \delta x$ an, wenn eine von folgenden Gleichungen

$$\text{IV)}\quad \frac{d_y V}{dy} = 0, \quad \text{oder}\quad \text{V)}\quad \frac{d_y V}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$$

stattfindet. Beide Gleichungen müssen für jeden beliebigen reellen Werth des x gelten, und können rückwärts eben noch dazu benützt werden, zu bestimmen, was $\varphi(x)$ für eine Function ist, bei welcher U möglicherweise ein Maximum-stand oder Minimumstand wird. Das Praktische des Verfahrens ist nun:

A) Man sehe zu, ob die Gleichung $\frac{d_y V}{dy} = 0$ möglich ist, und bestimme daraus y als Function von x.

B) Hierauf sehe man zu, ob die Gleichung $\frac{d_y V}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ möglich ist, und bestimme abermals y als Function von x.

Man erkennt aber gradezu, dass die Gränzen a und α, welche sie auch immer sein mögen, hier in beiden Fällen durchaus keinen Einfluss auf die gesuchte Function y von x haben; und dieses ist ein sehr bemerkenswerther Umstand.

Das Prüfungsmittel gewinnt man, indem man die Reihe III an die Stelle des y in Gleichung I einsetzt. Es ist aber bequem, vorerst nur $(\varphi(x) + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ statt der Reihe III zu nehmen, und erst, wenn man die für ΔU sich ergebende Reihe nach steigenden Potenzen des $\varkappa$ geordnet hat, wieder

$$\delta y + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3.4} \cdot \delta^4 y + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \text{ an die Stelle des } \mathfrak{P}$$

zurückzuführen. Das erste Glied der für ΔU herzustellenden und nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigenden Reihe muss, weil es sein Zeichen nicht ändern darf, den Factor $\varkappa$ in der Weise enthalten, dass sein Exponent entweder eine ganze grade Zahl oder ein in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch mit gradem Zähler und ungradem Nenner ist. Die für ΔU herzustellende Reihe sei

$$\Delta U = \varkappa^m \cdot \int_a^\alpha M \cdot dx + \varkappa^{m+n} \cdot \int_a^\alpha N \cdot dx + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

wo der Exponent m die eben besagte Eigenschaft hat; so ist das erste Glied (nach §. 9) beständig positiv oder negativ, wenn der Ausdruck M bei jedem von a bis α möglichen Werthe des x beständig positiv oder negativ bleibt.

Sollte einmal der Quotient $\frac{d_y V}{dy}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen; so wird die directe Reihenentwicklung nicht nur die dem $U' = \psi(\alpha) - \psi(a)$ nächstanliegenden Nachbarzustände herstellen, sondern sie wird auch die wahre Bedeutung dieser Form angeben.

§. 224. Hier mag noch einmal erinnert werden, wie nöthig es ist, sich bei Herstellung des Prüfungsmittels zu der Ueberzeugung hinzuarbeiten, dass kein einziges wenn auch noch so spätes Glied der für ΔU herzustellenden Reihe aus irgend einem Grunde, z. B. wenn $\varkappa$ vom Positiven ins Negative oder umgekehrt übergeht, imaginär werden kann. Hat man sich aber zu dieser Ueberzeugung hingearbeitet, so ist es schon genug: wenn man nur das erste Glied vollständig hergestellt hat, da alle folgenden Glieder nichts mehr zum Zeichenstande des verschwindend kleinen ΔU beitragen.

In Beziehung auf die Herstellung dieses ersten Gliedes bemerke man nun Folgendes:

1) Ist $\frac{d_y V}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ gesetzt worden, so muss man dieses erste Glied durch die bereits besagte directe Reihenentwicklung herstellen; ist aber

2) $\frac{d_y V}{dy} = 0$ gesetzt worden, so ist es nicht immer nöthig, directe Reihenentwicklung zu Hilfe zu nehmen, sondern man kann auch auf folgende Weise verfahren:

A) Wegen $\frac{d_y V}{dy} = 0$ bleibt im Allgemeinen nur

$$\Delta U = \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y^2 V}{dy^2} \cdot \delta y^2 \cdot dx + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Bekommt nun bei den jetzigen Specialitäten kein Glied der Reihe Null in den Nenner, und ist der Quotient $\frac{d_y^2 V}{dy^2}$ bei jedem von a bis α möglichen Werthe des x positiv oder

negativ, so ist (nach §. 9) auch der Ausdruck $\int_a^\alpha \frac{d_y^2 V}{dy^2} \cdot \delta y^2 \cdot dx$ positiv oder negativ. Wird aber bei den jetzigen Specialitäten $\frac{d_y^2 V}{dy^2} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$, so muss man directe Reihenentwicklung vornehmen. Wird aber bei den jetzigen Specialitäten $\frac{d_y^2 V}{dy^2} = 0$, so bleibt

B) im Allgemeinen nur

$$\Delta U = \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y^3 V}{dy^3} \cdot \delta y^3 \cdot dx + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und es kann jetzt nur dann ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinden, wenn bei den aus $\frac{d_y V}{dy} = 0$ folgenden Specialitäten entweder $\frac{d_y^3 V}{dy^3} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$ oder $\frac{d_y^3 V}{dy^3} = 0$ wird. Wird $\frac{d_y^3 V}{dy^3} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$, so wird das Prüfungsmittel durch directe Reihenentwicklung hergestellt; wird aber $\frac{d_y^3 V}{dy^3} = 0$, so bleibt

C) im Allgemeinen nur

$$\Delta U = \frac{\varkappa^4}{1.2.3.4} \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y^4 V}{dy^4} \cdot \delta y^4 \cdot dx + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und so fort.

Untersuchung 49.

Es sind V und W zwei reelle mit den Elementen x und y gebildete Ausdrücke, und man sucht für y eine solche reelle Function des nichtmutablen Veränderlichen x, dass dabei das Product der zwichen den Gränzen von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckten Integrale $\int_a^\alpha V \cdot dx$ und $\int_a^\alpha W \cdot dx$, d. h. der Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx \times \int_a^\alpha W \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 225. In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange des §. 223) auseinandergesetzt. Wenn man nun irgend eine durch $\varphi(x)$ dargestellte reelle Function an die Stelle des y in Gleichung I einsetzt; so bekommt man für U einen aus a und α gebildeten Ausdruck, welcher dargestellt sein mag durch

$$\text{II)} \quad U' = \psi(\alpha, a)$$

Nun werden (nach §. 60) alle die der Function $\varphi(x)$ nächstanliegenden Nachbarfunctionen dargestellt durch

$$\text{III)} \quad \varphi(x) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Führt man diese Reihe III an die Stelle des y in Gleichung I ein, so bekommt man die dem U' nächstanliegenden Nachbarzustände, welche dargestellt werden mögen durch $(\psi(\alpha, a) + \Delta U)$ oder durch $(U' + \Delta U)$

Soll nun bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ die Differenz $(U' + \Delta U) - U'$ unter allen Umständen ihr Zeichen nicht wechseln können; so darf sich, wenn man für ΔU die nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt, keineswegs die (in §. 62 aufgestellte) allgemeine Reihenform

$$\Delta U = \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

ergeben, wo

$$\delta U = \int_a^\alpha V \cdot dx \times \int_a^\alpha \frac{d_y W}{dy} \cdot \delta y \cdot dx + \int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y \cdot dx \times \int_a^\alpha W \cdot dx$$

$$\delta^2 U = \int_a^\alpha V \cdot dx \times \int_a^\alpha \frac{d_y W}{dy} \cdot \delta^2 y \cdot dx + \int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \delta^2 y \cdot dx \times \int_a^\alpha W \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha V \cdot dx \times \int_a^\alpha \frac{d_y^2 W}{dy^2} \cdot \delta y^2 \cdot dx + 2 \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y \cdot dx \times \int_a^\alpha \frac{d_y W}{dy} \cdot \delta y \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha \frac{d_y^2 V}{dy^2} \cdot \delta y^2 \cdot dx \times \int_a^\alpha W \cdot dx$$

etc. etc.

ist. Wenn man nun die für y gewählte Function in $\int_a^\alpha V \cdot dx$ und in $\int_a^\alpha W \cdot dx$ substituirt, so ergeben sich für beide Integrale Ausdrücke, die von x unabhängig sind; ihr Quotient ist also auch von x unabhängig. Man bezeichne diesen Quotient mit A, so bekommt man die Gleichung

$$\text{IV)} \quad \int_a^\alpha V \cdot dx = A \cdot \int_a^\alpha W \cdot dx$$

Der für ΔU bereits hergestellte Ausdruck geht also über in

$$\delta U = \left[A \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y W}{dy} \cdot \delta y \cdot dx + \int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y \cdot dx \right] \times \int_a^\alpha W \cdot dx$$

Aber eben weil A von x unabhängig ist, so kann man auch setzen

$$\text{V)} \quad \delta U = \left[\int_a^\alpha \left(A \cdot \frac{d_y W}{dy} + \frac{d_y V}{dy} \right) \cdot \delta y \cdot dx \right] \times \int_a^\alpha W \cdot dx$$

A) Setzt man den zu δy gehörigen Factor $= 0$, so bekommt man die identische Gleichung

$$\text{VI)} \quad A \cdot \frac{d_y W}{dy} + \frac{d_y V}{dy} = 0$$

Daraus ergibt sich für y eine Function von x mit dem noch unbestimmten Constanten A, welcher durch Gleichung IV bestimmt wird. Dabei hat man aber zu beachten, ob nicht Gleichung IV einen Widerspruch in sich selbst enthält, in welchem Falle die Aufgabe unmöglich ist (man sehe z. B. die Aufgaben 229, 232, etc.); und weil der Constante A durch Gleichung IV bestimmt wird, so erkennt man, dass die hier sich ergebende Function y von x in einer gewissen Abhängigkeit von den Gränzen a und α steht.

Andere Schriftsteller haben es übersehen, dass man beachten müsse, ob Gleichung IV einen Widerspruch in sich selbst enthalte; und dadurch sind sie in grobe Irrthümer verfallen.

B) Man kehre wieder zu Gleichung V zurück, und sehe zu, ob man dem daselbst bei δy befindlichen Factor die Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ geben, und so abermals eine Gleichung gewin-

nen kann, aus welcher sich y als Function von x bestimmen lässt. Weil aber in Gleichung V der Constante A nur im Zähler vorkommt, so enthält die jetzige Function y von x den Constanten A nicht. Somit braucht auch jetzt Gleichung IV nicht weiter berücksichstigt zu werden (s. Aufgabe 229), und die jetzt für y sich ergebende Function ist von den Gränzen a und α ganz unabhängig.

§. 226. Das Prüfungsmittel gewinnt man, indem man die Reihe III an die Stelle des y in Gleichung I einsetzt, und für ΔU eine nach steigenden Potenzen des $\varkappa$ fortlaufende Reihe entwickelt. Für den Fall aber, dass man das Prüfungsmittel an dem Mutationscoefficienten $\delta^2 U$ entnehmen kann, bedenke man, dass aus Gleichung VI folgt $\frac{d_y V}{dy} = -A \cdot \frac{d_y W}{dy}$; und somit geht unter fernerer Beachtung der Gleichung IV der für $\delta^2 U$ bereits hergestellte Ausdruck über in

$$\delta^2 U = \left[\int_a^\alpha \left(A \cdot \frac{d_y^2 W}{dy^2} + \frac{d_y^2 V}{dy^2}\right) \cdot \delta y^2 \cdot dx\right] \cdot \int_a^\alpha W \cdot dx$$

$$- 2A \cdot \left(\int_a^\alpha \frac{d_y W}{dy} \cdot \delta y \cdot dx\right)^2$$

Hier führe man die für y gefundene und bereits vollständig bestimmte Function ein, und untersuche dann den Zeichenstand des $\delta^2 U$ nach §. 9. Bleibt $\delta^2 U$ unter allen Umständen negativ, so findet ein Maximum-stand statt; bleibt $\delta^2 U$ unter allen Umständen positiv, so findet ein Minimum-stand statt; kann aber das $\delta^2 U$ nicht unter allen Umständen denselben Zeichenstand behalten, so findet weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt (man sehe noch Aufgabe 229).

Untersuchung 50.

Es sind V, W, Z drei reelle mit den Elementen x und y gebildete Ausdrücke; und man sucht für y eine solche reelle Function des nichtmutablen Veränderlichen x, dass dabei das Product der zwischen den Gränzen von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckten Integrale

$$\text{I)} \quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx \times \int_a^\alpha W \cdot dx \times \int_a^\alpha Z \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 227. In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange des §. 223) auseinandergesetzt. Wenn man nun irgend eine durch $\varphi(x)$ dargestellte reelle Function an die Stelle des y in Gleichung I einsetzt; so bekommt man für U einen aus a und α gebildeten Ausdruck, welcher dargestellt sein mag durch $U' = \psi(a, \alpha)$, etc. etc. (Statt aller Wiederholungen soll auf den Anfang von §. 225. verwiesen werden.) Aus Gleichung I folgt zunächst

$$\text{II)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y \cdot dx \times \int_a^\alpha W \cdot dx \times \int_a^\alpha Z \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha V \cdot dx \times \int_a^\alpha \frac{d_y W}{dy} \cdot \delta y \cdot dx \times \int_a^\alpha Z \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha V \cdot dx \times \int_a^\alpha W \cdot dx \times \int_a^\alpha \frac{d_y Z}{dy} \cdot \delta y \cdot dx$$

Wenn man nun die für y genommene Function $\varphi(x)$ in $\int_a^\alpha V \cdot dx$, in $\int_a^\alpha W \cdot dx$, und in $\int_a^\alpha Z \cdot dx$ einsetzt, so ergeben sich für diese drei Integrale Ausdrücke, welche von x unabhängig sind; es sind also auch die Quotienten $\frac{\int_a^\alpha V \cdot dx}{\int_a^\alpha W \cdot dx}$ und $\frac{\int_a^\alpha V \cdot dx}{\int_a^\alpha Z \cdot dx}$ von x unabhängig; und wenn man

$$\text{III)} \quad \int_a^\alpha V \cdot dx = A \cdot \int_a^\alpha W \cdot dx$$

und

$$\text{IV)} \quad \int_a^\alpha V \cdot dx = B \cdot \int_a^\alpha Z \cdot dx$$

setzt, so geht Gleichung II über in

$$\delta U = \int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y \cdot dx \times \int_a^\alpha W \cdot dx \times \int_a^\alpha Z \cdot dx$$

$$+ A \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y W}{dy} \cdot \delta y \cdot dx \times \int_a^\alpha W \cdot dx \times \int_a^\alpha Z \cdot dx$$

$$+ B \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y Z}{dy} \cdot \delta y \cdot dx \times \int_a^\alpha W \cdot dx \times \int_a^\alpha Z \cdot dx$$

Aber eben weil A und B von x ganz unabhängig sind, so kann man diese Gleichung auch umformen in

$$\text{V)} \quad \delta U = \left[\int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy} + A \cdot \frac{d_y W}{dy} + B \cdot \frac{d_y Z}{dy}\right) \cdot \delta y \cdot dx\right] \times \int_a^\alpha W \cdot dx \times \int_a^\alpha V \cdot dx$$

A) Lässt man den bei δy befindlichen Factor zu Null werden, so bekommt man die identische Gleichung

$$\text{VI)} \quad \frac{d_y V}{dy} + A \cdot \frac{d_y W}{dy} + B \cdot \frac{d_y Z}{dy} = 0$$

Daraus ergibt sich für y eine Function von x mit den zwei noch unbestimmten Constanten A und B, welche aber durch die Gleichungen III und IV bestimmt werden. Dabei hat man zu beachten, ob keine der Gleichungen III und IV einen Widerspruch in sich enthält, in welchem Falle die Aufgabe unmöglich ist; und weil die Constanten A und B durch die Gleichungen III und IV bestimmt werden, so erkennt man, dass die hier sich ergebende Function y von x in einer gewissen Abhängigkeit von den Gränzen a und α steht.

B) Man kehre wieder zu Gleichung V zurück, und schaue, ob man dem daselbst bei δy befindlichen Factor die Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ geben, und so abermals eine Gleichung gewinnen kann, aus welcher sich y als Function von x bestimmen lässt. Weil aber in Gleichung V die Constanten A und B nur im Zähler vorkommen; so enthält die jetzige Function y von x die Constanten A und B nicht. Somit brauchen auch jetzt die Gleichungen III und IV nicht weiter berücksichtigt zu werden, und die jetzt für y sich ergebende Function ist von den Gränzen a und α ganz unabhängig.

Und so fort.

Es ist unnöthig, diese Untersuchung auf Producte von vier und noch mehr Integralen auszudehnen.

Untersuchung 51.

Es sind V und W zwei reelle mit den Elementen x und y gebildete Ausdrücke; und man sucht für y eine solche reelle Function des nichtmutablen Veränderlichen x, dass dabei der Quotient

$$\text{I)}\quad U = \frac{\int_a^\alpha V \cdot dx}{\int_a^\alpha W \cdot dx}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 228. In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange des §. 223) auseinandergesetzt. Wenn man nun irgend eine durch $\varphi(x)$ dargestellte reelle Function an die Stelle des y in Gleichung I einsetzt; so bekommt man für U einen aus a und α gebildeten Ausdruck, welcher dargestellt sein mag durch $U' = \psi(a, \alpha)$, etc. etc. (Statt aller Wiederholungen soll auf den Anfang des §. 225 verwiesen werden). Aus Gleichung I folgt zunächst

$$\text{II)}\quad \delta U = \frac{\int_a^\alpha W \cdot dx \times \int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y \cdot dx - \int_a^\alpha V \cdot dx \times \int_a^\alpha \frac{d_y W}{dy} \cdot \delta y \cdot dx}{\left(\int_a^\alpha W \cdot dx\right)^2}$$

Wenn man nun die für y gewählte Function in $\int_a^\alpha V \cdot dx$ und in $\int_a^\alpha W \cdot dx$ substituirt, so ergeben sich für beide Integrale Ausdrücke, die von x unabhängig sind; ihr Quotient ist also auch von x unabhängig. Man bezeichne diesen Quotienten mit A, so bekommt man die Gleichung

$$\text{III)}\quad \int_a^\alpha V \cdot dx = A \cdot \int_a^\alpha W \cdot dx$$

Gleichung II reducirt sich also jetzt auf

$$\text{IV)}\quad \delta U = \frac{\int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y \cdot dx - A \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y W}{dy} \cdot \delta y \cdot dx}{\int_a^\alpha W \cdot dx}$$

Aber eben weil A von x unabhängig ist, so kann man auch setzen

$$\text{V)}\quad \delta U = \frac{1}{\int_a^\alpha W \cdot dx} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy} - A \cdot \frac{d_y W}{dy}\right) \cdot \delta y \cdot dx$$

A) Lässt man den bei δy befindlichen Factor zu Null werden, so bekommt man die identische Gleichung

$$\text{VI)}\quad \frac{d_y V}{dy} - A \cdot \frac{d_y W}{dy} = 0$$

Daraus ergibt sich für y eine Function von x mit dem noch willkürlichen Constanten A, welcher durch Gleichung III bestimmt wird. Dabei hat man aber zu beachten, ob nicht Gleichung III einen Widerspruch in sich selbst enthält, in welchem Falle die Aufgabe unmöglich ist; und weil der Constante A durch die Gleichung III bestimmt wird, so erkennt man, dass die hier sich ergebende Function y von x in einer gewissen Abhängigkeit von den Gränzen a und α steht (man sehe Aufgabe 232 und 260).

B) Man kehre wieder zu Gleichung V zurück, und schaue, ob man dem daselbst bei δy befindlichen Factor die Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ geben, und so abermals eine Gleichung gewinnen kann, aus welcher sich y als Function von x bestimmen lässt. Weil aber in Gleichung V der Constante A nur im Zähler vorkommt, so enthält die jetzige Function y von x den Constanten A nicht; somit braucht auch jetzt Gleichung III nicht weiter berücksichtigt zu werden, und die jetzt für y sich ergebende Function ist von den Gränzen a und α unabhängig.

Ueber die Herstellung des Prüfungsmittels ist nichts weiter mehr beizufügen; und wenn man es an dem zweiten Mutationscoefficienten $\delta^2 U$ gewinnen kann, so muss man die Gleichung II noch einmal mutiren, und dann alle möglichen Substitutionen und Reductionen ausführen.

Untersuchung 52.

Es sei V ein reeller mit den Elementen x, y und $\frac{dy}{dx}$ gebildeter Ausdruck, und man sucht für y eine solche reelle Function des nichtmutablen Veränderlichen x, dass dabei das zwischen den Gränzen von x = a bis x = α erstreckte Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 229. In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange des §. 223) auseinandergesetzt. Wenn man nun irgend eine durch $\varphi(x)$ dargestellte reelle Function an die Stelle des y, also $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$, in Gleichung I einsetzt; so bekommt man für U einen aus a und α gebildeten Ausdruck, welcher dargestellt sein mag durch

$$\text{II)}\quad U' = \psi(\alpha) - \psi(a)$$

Die dem $\varphi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstvorhergehenden und nächstnachfolgenden Nachbarfunctionen werden im Allgemeinen (nach §. 60) dargestellt durch

$$\text{III)}\quad \varphi(x) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Der aus diesen Functionen sich ergebende Differentialquotient erster Ordnung ist dabei im Allgemeinen (man sehe §. 87)

$$\text{IV)}\quad \frac{d\varphi(x)}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d\delta^3 y}{dx} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

wo jeder der Ausdrücke δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. eine für sich beliebige reelle Function von x vorstellt, und $\varkappa$ bald als positiv bald als negativ im Momente des Verschwindens befindlich gedacht wird.

Führt man die Reihen III und IV bezüglich an die Stelle des y und des $\frac{dy}{dx}$ ein, so bekommt man die dem U′ nächstanliegenden Nachbarzustände; welche dargestellt werden mögen durch $(\psi(\alpha) - \psi(a) + \Delta U)$ oder durch $(U' + \Delta U)$.

Soll nun bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ die Differenz $(U' + \Delta U) - U'$ unter allen Umständen ihr Zeichen nicht wechseln können; so darf sich, wenn man für ΔU die nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt, keineswegs die (in §. 62 aufgestellte) allgemeine Reihenform

$$\delta U = \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

ergeben, wo, wenn man zur Abkürzung noch p anstatt $\frac{dy}{dx}$ setzt

$$\text{V)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx$$

$$\text{VI)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{d_y^2 V}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_p V}{dy . dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx$$

etc. etc.

ist; denn hierbei würde ΔU zugleich mit $\varkappa$ sein Zeichen ändern. Nun ist

$$\frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx} = \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp} \cdot \delta y\right) - \delta y \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right)$$

und

$$\frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} = \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp} \cdot \delta^2 y\right) - \delta^2 y \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right)$$

Führt man diese Ausdrücke in V und VI ein, und integrirt man dann die vollständigen Differentiale; so gehen V und VI bezüglich über in

$$\text{VII)}\quad \delta U = \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_a \cdot \delta y_a + \int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right)\right) \cdot \delta y \cdot dx$$

$$\text{VIII)}\quad \delta^2 U = \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_a \cdot \delta^2 y_a + \int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right)\right) \cdot \delta^2 y \cdot dx$$
$$+ \int_a^\alpha \left(\frac{d_y^2 V}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_p V}{dy . dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx$$

Man hat jetzt dafür zu sorgen, dass die für ΔU herzustellende Reihe kein solches erstes Glied hat, welches die erste Potenz $\varkappa$ als gemeinschaftlichen Factor enthält. Man ist aber, eben weil man dem δU zwei verschiedene Formen geben kann, gezwungen, auch beide Formen besonders zu untersuchen.

Erste Abtheilung.

§. 230. Untersuchung der ersten (in V aufgestellten) Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass die für ΔU herzustellende Reihe jedenfalls dann kein solches erstes Glied hat, welches die erste Potenz $\varkappa$ als gemeinschaftlichen Factor enthält, wenn eines von folgenden vier Systemen zweier Gleichungen

$$\text{IX)}\quad \frac{d_y V}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_p V}{dp} = 0$$

$$\text{X)}\quad \frac{d_y V}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_p V}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

$$\text{XI)}\quad \frac{d_y V}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_p V}{dp} = 0$$

$$\text{XII)}\quad \frac{d_y V}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_p V}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

stattfindet. Alle diese Gleichungen müssen bei jedem Werthe des x gelten, sind also identische Gleichungen; und sie können rückwärts noch eben dazu benützt werden, zu bestimmen, was $y = \varphi(x)$ für eine Function ist, bei welcher U möglicherweise ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird. Wie aber eine Function aufgefunden wird, welche zweien Gleichungen, die auch noch Differentialgleichungen sein können, zugleich genügt, ist schon früher (in §. 184) auseinandergesetzt.

Weil aber die gesuchte Function $y = \varphi(x)$ aus einem der vier Systeme IX, X, XI, XII entnommen wird, so erkennt man gradezu, dass die Grenzen a und α, welche sie auch immer sein mögen, auf die hier gesuchte Function $y = \varphi(x)$ durchaus keinen Einfluss haben; und dieses ist ein sehr bemerkenswerther Umstand.

Das Prüfungsmittel gewinnt man, indem man die Reihen III und IV bezüglich an die Stelle des y und $\frac{dy}{dx}$ einsetzt. Es ist aber bequem, vorerst nur $(\varphi(x) + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ und $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d\mathfrak{P}}{dx}\right)$ bezüglich an die Stelle von y und $\frac{dy}{dx}$ einzusetzen, und dann eine nach Potenzen des $\varkappa$ fortschreitende Reihe zu entwickeln, etc. etc.

Hat man aber namentlich die gesuchte Function $y = \varphi(x)$ aus dem ersten der obigen vier Systeme zweier Gleichungen, d. h. aus den beiden gleichzeitig bestehenden Gleichungen

$$\frac{d_y V}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_p V}{dp} = 0$$

entnommen; so ist, weil $\frac{d_p V}{dp} = 0$ identisch ist, auch $\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right) = 0$ eine identische Gleichung, und es werden nicht nur zwischen den Gränzen $x = a$ bis $x = \alpha$, sondern auch zwischen allen andern beliebigen Gränzen die beiden (in V und VII aufgestellten) Formen des δU zu Null, und die beiden (in VI und VIII aufgestellten) Formen des $\delta^2 U$ reduciren sich auf

$$\text{XIII)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y^2 V}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_p V}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx$$

Man hat also noch zu untersuchen, unter welchen Bedingungen dieser Ausdruck beständig positiv oder negativ bleibt. Man bezeichne zur Abkürzung das, was aus $\frac{d_y^2 V}{dy^2}$, $\frac{d_y d_p V}{dy.dp}$, $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ hervorgeht, wenn man für y und $\frac{dy}{dx}$ die gefundene Function setzt, bezüglich mit M, N, P; und, um soviel als möglich zu integriren, setze für das unbestimmte bei $x = a$ anfangende Integral folgende Gleichung

$$\text{XIV)}\quad \int_a^x \left(M \cdot \delta y^2 + 2N \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + P \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx = \eta_x \cdot \delta y_x^2 - \eta_a \cdot \delta y_a^2$$
$$+ \int_a^x \left(C \cdot \delta y^2 + 2B \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + A \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx$$

Wenn man auf beiden Seiten differentiirt, so bekommt man

$$M \cdot \delta y^2 + 2 \cdot N \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + P \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 = \frac{d\eta}{dx} \cdot \delta y^2 + 2\eta \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$
$$+ C \cdot \delta y^2 + 2B \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + A \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

und wenn man ordnet, so ist

$$\text{XV)}\quad \left(M - \frac{d\eta}{dx} - C\right) \cdot \delta y^2 + 2 \cdot (N - \eta - B) \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + (P - A) \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 = 0$$

Diese Gleichung gilt für jede beliebige Function δy von x, sie zerfällt also (nach §. 91) in folgende einzelne identische Gleichungen:

$$M - \frac{d\eta}{dx} - C = 0,\ N - \eta - B = 0,\ P - A = 0$$

und daraus folgt

$$\text{XVI)}\quad A = P = \frac{d_p^2 V}{dp^2}$$

$$\text{XVII)}\quad B = N - \eta$$

$$\text{XVIII)}\quad C = M - \frac{d\eta}{dx}$$

Man erkennt also, dass nur A vollkommen bestimmt ist, dagegen zur Bestimmung von B und C noch nöthig wäre, dass vorher auch η bestimmt ist. Da nun durchaus keine Bedingung existirt, welcher η genügen muss; so ist η eine ganz willkürliche Function von x. Man kann also durch geeignete Annahme der willkürlichen Function η die Ausdrücke B und C so einrichten, dass Gleichung XIV übergeht in

$$\text{XIX)}\quad \int_a^x \left(M \cdot \delta y^2 + 2 \cdot N \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + P \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx$$

$$= \eta_x \cdot \delta y_x^2 - \eta_a \cdot \delta y_a^2 + \int_a^x A \cdot \left(g \cdot \delta y + \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Dazu ist aber (nach §. 11) nöthig, dass $AC = B^2$, d. h. dass

$$\text{XX)}\quad P \cdot \left(M - \frac{d\eta}{dx}\right) = (N - \eta)^2$$

Aus dieser Differentialgleichung der ersten Ordnung lässt sich nun η als Function von x mit einem noch willkürlichen Constanten bestimmen. Dieser willkürliche Constante ist aber sowohl in der Function η als auch in der Function g enthalten. Die Gleichung XIX, welche, indem sie von $x = a$ bis zu jedem beliebigen andern Werthe des x erstreckt wird, giltig ist, ist auch giltig, wenn sie von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckt wird; und man hat daher auch (in Folge der Gleichung XIII)

$$\text{XXI)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y^2 V}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_p V}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx$$

$$= \eta_\alpha \cdot \delta y_\alpha^2 - \eta_a \cdot \delta y_a^2 + \int_a^\alpha \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(g \cdot \delta y + \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Hieran erkennt man:

1) Dass die Veränderlichkeit des $\delta^2 U$ ganz unabhängig ist von der Veränderlichkeit des in η und g enthaltenen willkürlichen Constanten, d. h. man bekommt jedesmal den irgend einem δy entsprechenden wahren Werth des $\delta^2 U$, man mag dem in η und g enthaltenen willkürlichen Constanten was immer für einen beliebigen Werth beilegen. Da ferner unter δy nur eine reelle Function von x gedacht werden darf, so ist

2) Der quadratische Ausdruck $\left(g \cdot \delta y + \frac{d\delta y}{dx}\right)^2$ positiv, wenn g reell ist. Also ist (nach §. 9) bei reellem g das Integral $\int_a^\alpha \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(g \cdot \delta y + \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$ positiv oder ne-

gativ, wenn der Quotient $\frac{d_p^2V}{dp^2}$ bei jedem von a bis α möglichen Werthe des x positiv oder negativ bleibt, wobei freilich für einzelne von a bis α möglichen Werthe des x dieser Quotient auch zu Null werden darf.

Da nun, wie schon bemerkt, sich immer der irgend einem δy entsprechende wahre Werth des $\delta^2 U$ ergibt, man mag dem in η und g enthaltenen willkürlichen Constanten was immer für einen beliebigen Werth beilegen; so kann man auf zwei verschiedenen Wegen den Zeichenstand des $\delta^2 U$ kennen lernen:

1) Man richte den in η und g enthaltenen willkürlichen Constanten so ein, dass die Gleichung

$$\text{XXII)} \quad \eta_\alpha \cdot \delta y_\alpha^2 - \eta_a \cdot \delta y_a^2 = 0$$

stattfindet. Je nachdem man sich nemlich unter δy eine immer andere und andere Function denkt, muss man dem in η enthaltenen willkürlichen Constanten einen immer andern und andern Werth beilegen; und so kann Gleichung XXII stattfinden bei jeder beliebigen Function δy von x. Dabei reducirt sich Gleichung XXI auf

$$\text{XXIII)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \frac{d_p^2V}{dp^2} \cdot \left(g \cdot \delta y + \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

und man erkennt, dass jetzt der Zeichenstand des $\delta^2 U$ von dem Quotienten $\frac{d_p^2V}{dp^2}$ abhängig ist.

2) Wenn aber die Gleichung XXII einen Widerspruch in sich selbst enthält, so richte man den in η und g enthaltenen willkürlichen Constanten so ein, dass die Differenz

$$\text{XXIV)} \quad \eta_\alpha \cdot \delta y_\alpha^2 - \eta_a \cdot \delta y_a^2$$

dasselbe Vorzeichen bekommt, welches der Quotient $\frac{d_p^2V}{dp^2}$ bei allen von a bis α möglichen Werthen des x behält.

Aus allem Vorhergehenden folgt für das Prüfungsmittel folgende einfache Regel:

„Wenn der Quotient $\frac{d_p^2V}{dp^2}$ bei allen von a bis α möglichen Werthen des x positiv „oder negativ bleibt, so ist auch $\delta^2 U$ positiv oder negativ, und es findet bezüglich ein „Minimum-stand oder Maximum-stand statt."

Dabei beachte man, dass, wenn dieser Quotient bei einigen von a bis α möglichen Werthen des x zu Null wird, die vorstehende Regel ihre Giltigkeit behält; wenn aber dieser Quotient nicht bei allen von a bis α möglichen Werthen des x einerlei Zeichen behält, so ist dieses (man sehe §. 9) noch keine Anzeige, dass weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfinde, sondern dieses müsste noch besonders nachgewiesen werden. Dagegen verliert vorstehende Regel ihre Giltigkeit, sobald dieser Quotient bei irgend einem von a bis α möglichen Werthe des x Null in den Nenner bekommt.

In den Aufgaben 158, 159, 162, 163 mag man sich noch specieller umsehen, wie es zugeht, dass der Werth des $\delta^2 U$ von dem Werthe des in η und g eingehenden willkürlichen Constanten ganz unabhängig ist.

Ist aber bei jedem von a bis α möglichen Werthe des x sowohl $\frac{d_p^2V}{dp^2} = 0$ als auch $\frac{d_y d_p V}{dy \cdot dp} = 0$; dann ist $\delta^2 U$ positiv oder negativ, wenn der Quotient $\frac{d_y^2V}{dy^2}$ bei allen von a bis α möglichen Werthen des x positiv oder negativ bleibt. (Dieses erkennt man ohneweiters, wenn man auf Gleichung XIII zurückschaut.)

Dass aber diese über den Zeichenstand des $\delta^2 U$ bis jetzt geführte Untersuchung nur so lange ihre Giltigkeit behält, als keiner der Quotienten $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$, $\frac{d_p d_y V}{dp.dy}$, $\frac{d_y^2 V}{dy^2}$ bei irgend einem von a bis α möglichen Werthe des x Null in den Nenner bekommt; braucht hier wohl nicht mehr erinnert zu werden.

Da die Gränzen a und α durchaus keinen Einfluss haben auf die bis jetzt gesuchte Function $y = \varphi(x)$, so macht sie nicht allein das zwischen den Gränzen a bis α erstreckte Integral U, sondern auch das zwischen vielen andern Gränzen, ja oft auch das zwischen allen beliebigen Gränzen erstreckte U zu einem Maximum-stande oder Minimumstande. Allein eben diese Function $y = \varphi(x)$ muss jedesmal zwei Gleichungen zugleich identisch machen, eine Bedingung, die bekanntlich nicht immer erfüllt werden kann (man vergleiche noch §. 183 am Ende).

Zweite Abtheilung.

§. 231. Untersuchung der zweiten (in VII aufgestellten) Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass es auch eine von den Gränzen a und α abhängige Function $y = \varphi(x)$ gibt, welche nur eine einzige Gleichung identisch machen muss, dagegen aber auch nur das zwischen den Gränzen a bis α erstreckte Integral U zu einem Maximumstande oder Minimum-stande machen kann, während dabei das zwischen irgend zwei andern Gränzen erstreckte U weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand ist. Die Aufgabe, wo eine von den Gränzen a und α abhängige Function $y = \varphi(x)$ gesucht wird, ist aber diejenige, welche in der Anwendung am häufigsten vorkommt, und jedesmal möglich ist.

A) Man zerlege nun Gleichung VII zunächst in folgende zwei:

$$\text{XXV)} \quad \frac{d_y V}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right) = 0$$

und

$$\text{XXVI)} \quad \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Die erste dieser Gleichungen wird Hauptgleichung, und die zweite wird Gränzengleichung genannt. Die Hauptgleichung ist eine identische Gleichung, wird in der Regel eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung sein, und gibt die gesuchte Function $y = \varphi(x)$. Ist aber die Hauptgleichung wirklich von der zweiten Ordnung, so gehen durch deren Integration noch zwei willkürliche Constanten ein, die nicht schon in der vorgelegten Hauptgleichung selbst enthalten waren. Die Gränzengleichung ist keine identische, und gilt nur für die Werthe $x = a$ und $x = \alpha$. Diese Gränzengleichung muss bei Bestimmung der in $y = \varphi(x)$ eingegangenen Constanten mitbenützt werden; und sie wird sehr oft nicht erfüllt werden können, wenn die Hauptgleichung nicht von der zweiten Ordnung ist (man vergleiche die Aufgabe 230 erster Fall).

Gleichung VIII reducirt sich jedenfalls auf

$$\text{XXVII)} \quad \delta^2 U = \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_a \cdot \delta^2 y_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left(\frac{d_y^2 V}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_p V}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx$$

Dieser Gleichung kann man aber (nach vorigem §.) noch folgende Form geben

$$\text{XXVIII)} \quad \delta^2 U = \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha + \eta_\alpha \cdot \delta y_\alpha^2 - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_a \cdot \delta^2 y_a - \eta_a \cdot \delta y_a^2$$

$$+ \int_a^\alpha \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(g \cdot \delta y + \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Die Function η wird aus Gleichung XX bestimmt. Die Gränzengleichung soll nun unter der Voraussetzung, dass die Hauptgleichung eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung sei, noch näher untersucht, und dabei fünf besondere Fälle unterschieden werden. Wie man in solchen Fällen, wo die Hauptgleichung nicht von der zweiten Ordnung ist, verfahren muss; dazu ist hinreichende Anleitung geboten in den Aufgaben 230, 231.

Erster Fall. Wenn zwischen y_a und y_α, also auch zwischen den dazugehörigen Mutationscoefficienten, gar keine Abhängigkeit stattfindet; so sind δy_a und δy_α, wenn sie gleich einerlei Form haben, dennoch dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander (der Beweis steht in §. 92). Die Gränzengleichung muss also in zwei einzelne zerfallen:

$$\left(\frac{d_p V}{dp}\right)_a = 0, \text{ und } \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_\alpha = 0$$

mittelst welcher man die zwei in $y = \varphi(x)$ eingegangenen willkürlichen Constanten bestimmen kann. Aber eben wegen dieser zwei letzten Gleichungen und wegen XXV reducirt sich XXVIII auf

$$\delta^2 U = \eta_\alpha \cdot \delta y_\alpha^2 - \eta_a \cdot \delta y_a^2 + \int_a^\alpha \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(g \cdot \delta y + \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

und hinsichtlich des Zeichenstandes von $\delta^2 U$ gelten die nemlichen Bemerkungen, wie im vorigen §. (Man sehe Aufgabe 164 B zweiter Fall.)

Zweiter Fall. Wenn zwischen y_a und y_α eine Gleichung $\chi(y_a, y_\alpha) = 0$ gegeben ist, dann kann man aus der Gränzengleichung entweder δy_a oder δy_α eliminiren. Eliminirt man z. B. δy_a, so reducirt sich die Gränzengleichung auf folgende Form:

$$H \cdot \delta y_\alpha = 0$$

so dass $H = 0$ ist; und diese Gleichung, verbunden mit $\chi(y_a, y_\alpha) = 0$, reicht hin zur Bestimmung der beiden in $y = \varphi(x)$ eingehenden willkürlichen Constanten. Nun hat man aus XXVIII noch $\delta^2 y_a$ und δy_a zu eliminiren; und dabei bekommt man, eben wegen $H = 0$, einen Ausdruck von folgender Form:

$$\delta^2 U = [K + (\eta)_\alpha + L \cdot (\eta)_a] \cdot \delta y_\alpha^2 + \int_a^\alpha \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(g \cdot \delta y + \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Weil nun der Werth des $\delta^2 U$ von dem Werthe des in η und g eingehenden willkürlichen Constanten unabhängig ist, so sehe man zu, ob man diesen Constanten so einrichten kann, dass die Gleichung

$$K + (\eta)_\alpha + L \cdot (\eta)_a = 0$$

stattfindet. Wenn aber diese Gleichung einen Widerspruch in sich selbst enthält, so richte man den in η enthaltenen Constanten so ein, dass das Product

$$[K + (\eta)_\alpha + L \cdot (\eta)_a] \cdot \delta y_\alpha^2$$

dasselbe Vorzeichen bekommt, welches der Quotient $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ bei allen von a bis α möglichen Werthen des x behält. Der Zeichenstand des $\delta^2 U$ hangt also auch jetzt von dem Quotienten $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ ab.

Dritter Fall. Ist vorgeschrieben, dass die gesuchte Function $y = \varphi(x)$ nur aus der Anzahl derer herausgewählt werden darf, welche alle bei $x = \alpha$ den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth β bekommen; so findet bei $x = \alpha$ zwischen der gesuchten und allen hier zu betrachtenden Functionen folgende Gleichung

$$y_\alpha = y_\alpha + \varkappa \cdot \delta y_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y_\alpha + \cdots\cdots$$

statt. Diese Gleichung soll bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ gelten, ist also (nach §. 87) nur möglich, wenn einzeln stattfindet $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. Die Gränzengleichung XXVI reducirt sich also jetzt auf $-\left(\frac{d_p V}{dp}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$, d. h. es ist

$$\left(\frac{d_p V}{dp}\right)_a = 0$$

Aus dieser Gleichung lässt sich einer der beiden in $y = \varphi(x)$ eingegangenen Constanten bestimmen; und wenn bei $x = \alpha$ die gesuchte Function den bestimmt gegebenen Werth β haben soll, so hat man noch eine zweite Gleichung $\beta = \varphi(\alpha)$, so dass man jetzt beide in $\varphi(x)$ enthaltenen Constanten bestimmen kann. Wenn aber der Werth β, den die Function $\varphi(x)$ bei $x = \alpha$ annehmen soll, kein gegebener ist; so bleibt einer der beiden in $\varphi(x)$ enthaltenen Constanten unbestimmt, wenn man ihn nicht durch irgend eine andere Bedingung bestimmen will. Gleichung XXVIII reducirt sich dabei auf

$$\delta^2 U = -\eta_a \cdot \delta y_a^2 + \int_a^\alpha \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(g \cdot \delta y + \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Man sehe nun zu, ob man dem in η enthaltenen Constanten eine solche Bedeutung geben kann, dass $(\eta)_a = 0$ wird; und wenn dieses nicht möglich ist, so gebe man ihm eine solche Bedeutung, dass $-(\eta)_a$ dasselbe Vorzeichen bekommt, welches der Quotient $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ bei allen von a bis α möglichen Werthen des x behält. Der Zeichenstand des $\delta^2 U$ hangt also auch jetzt von $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ ab.

Vierter Fall. Ist vorgeschrieben, dass die gesuchte Function $y = \varphi(x)$ nur aus der Zahl derer herausgewählt werde, welche alle bei $x = a$ den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth b bekommen; so ist jetzt (nach §. 87) $\delta y_a = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, etc., dagegen δy_α, $\delta^2 y_\alpha$, etc werden nicht zu Null. Die Untersuchung wird also ganz nach dem Vorgange des vorigen Falles geführt.

Fünfter Fall. Wenn zwischen y_a und y_α zwei Gleichungen gegeben sind, oder, was das nemliche ist, wenn die Werthe von y_a und y_α bestimmt vorgeschrieben sind; dann ist (nach §. 87) $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. Die Gränzengleichung fällt jetzt von selbst hinweg, sowie sich Gleichung XXVIII zurückzieht auf

$$\delta^2 U = \int_a^\alpha \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(g \cdot \delta y + \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

so dass auch jetzt der Zeichenstand des $\delta^2 U$ von $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ abhangt.

Zum Ueberflusse soll noch einmal strenge darauf aufmerksam gemacht werden, dass die hier gesuchte und von den Gränzen a und α abhängige Function $y = \varphi(x)$ nur das von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckte U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande macht, eben weil nur das zwischen den nemlichen Gränzen erstreckte δU zu Null wird.

B) Hat man die bis jetzt (in diesem §.) gegebene Untersuchung ausgeführt, so kehre man abermals zu Gleichung VII zurück, und schaue, ob man nicht dem zu δy gehörigen Factor

$$\frac{d_y V}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right)$$

die Form $\frac{\mathfrak{H}}{0}$ beilegen kann; etc. etc. (Man vergleiche noch die Aufgaben 163—165).

Untersuchung 53.

Es sind V und W zwei reelle mit den Elementen x, y und $\frac{dy}{dx}$ gebildete Ausdrücke; und man sucht für y eine solche reelle Function des nichtmutablen Veränderlichen x, dass dabei das Product der zwischen den Gränzen von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckten Integrale $\int_a^\alpha V \cdot dx$ und $\int_a^\alpha W \cdot dx$, d. h. dass der Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx \times \int_a^\alpha W \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 232. Inwiefern hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange des §. 223) auseinandergesetzt. Wenn man nun irgend eine durch $\varphi(x)$ dargestellte reelle Function an die Stelle des y, also $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$, in Gleichung I einsetzt; so bekommt man für U einen aus a und α gebildeten Ausdruck, welcher durch $U' = \psi(a, \alpha)$ dargestellt sein mag, etc. etc. (Statt aller Wiederholungen soll auf den Anfang von §. 229 verwiesen werden.) Aus Gleichung I folgt zunächst

$$\text{II)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx \times \int_a^\alpha W \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha V \cdot dx \times \int_a^\alpha \left(\frac{d_y W}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p W}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx$$

Wenn man nun die für y genommene Function $\varphi(x)$ in $\int_a^\alpha V \cdot dx$ und in $\int_a^\alpha W . dx$ substituirt, so ergeben sich für beide Integrale Ausdrücke, die von x ganz unabhängig sind; ihr Quotient ist also auch von x unabhängig. Man bezeichne diesen Quotienten mit A, so bekommt man die Gleichung

$$\text{III)}\quad \int_a^\alpha V \cdot dx = A \cdot \int_a^\alpha W \cdot dx$$

Der für δU bereits hergestellte Ausdruck geht also über in

$$\text{IV)}\quad \delta U = \int_a^\alpha W \cdot dx \times \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_y V}{dy} + A \cdot \frac{d_y W}{dy}\right) \cdot \delta y\right.$$

$$\left. + \left(\frac{d_p V}{dp} + A \cdot \frac{d_p W}{dp}\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right] \cdot dx$$

Diesem Ausdrucke kann man auch noch folgende Form geben

$$\text{V)}\quad \delta U = \left[\left(\frac{d_p V}{dp} + A \cdot \frac{d_p W}{dp}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp} + A \cdot \frac{d_p W}{dp}\right)_a \cdot \delta y_a\right] \cdot \int_a^\alpha W \cdot dx$$

$$+ \int_a^\alpha W \cdot dx \times \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_y V}{dy} + A \cdot \frac{d_y W}{dy}\right) - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp} + A \cdot \frac{d_p W}{dp}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

Man hat nun zuerst die in Gleichung IV, und hierauf noch die in Gleichung V für δU aufgestellte Form zu untersuchen, wie dieses schon (in den beiden vorigen §§.) gesche-

hen ist. Wenn man aber die Gleichung III bei Bestimmung der Constanten noch mit benützt, so muss man sorgfältig beachten, ob sie nicht einen Widerspruch in sich selbst enthält, in welchem Falle die Aufgabe unmöglich ist. (Man sehe Aufgabe 238 und 240.)

Kann man das Prüfungsmittel an dem Mutationscoefficienten $\delta^2 U$ gewinnen, so muss man Gleichung II noch einmal mutiren, und dann alle möglichen Substitutionen und Reductionen vornehmen.

Untersuchung 54.

Es sind V und W zwei reelle mit den Elementen x, y und $\frac{dy}{dx}$ gebildete Ausdrücke, und man sucht für y eine solche reelle Function des nichtmutablen Veränderlichen x, dass dabei der Quotient

$$\text{I)}\quad U = \frac{\int_a^\alpha V \cdot dx}{\int_a^\alpha W \cdot dx}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 233. Inwiefern hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange des §. 223) auseinandergesetzt. Wenn man nun irgend eine durch $\varphi(x)$ dargestellte reelle Function an die Stelle des y, also $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$ in Gleichung I einsetzt; so bekommt man für U einen aus a und α gebildeten Ausdruck, welcher durch $U' = \psi(a, \alpha)$ dargestellt sein mag, etc. etc. (Statt aller Wiederholungen soll auf den Anfang von §. 229 verwiesen werden.) Aus Gleichung I folgt zunächst

$$\text{II)}\quad \delta U = \frac{1}{\left(\int_a^\alpha W \cdot dx\right)^2} \cdot \left[\int_a^\alpha W \cdot dx \times \int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx \right.$$
$$\left. - \int_a^\alpha V \cdot dx \times \int_a^\alpha \left(\frac{d_y W}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p W}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx\right]$$

Wenn man nun die für y genommene Function $\varphi(x)$ in $\int_a^\alpha V \cdot dx$ und in $\int_a^\alpha W \cdot dx$ substituirt, so ergeben sich für beide Integrale Ausdrücke, die von x unabhängig sind; ihr Quotient ist also auch von x unabhängig. Man bezeichne diesen Quotienten mit A, so bekommt man die Gleichung

$$\text{III)}\quad \int_a^\alpha V \cdot dx = A \cdot \int_a^\alpha W \cdot dx$$

Gleichung II geht also jetzt über in

$$\text{IV)}\quad \delta U = \frac{1}{\int_a^\alpha W \cdot dx} \times \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_y V}{dy} - A \cdot \frac{d_y W}{dy}\right) \cdot \delta y \right.$$
$$\left. + \left(\frac{d_p V}{dp} - A \cdot \frac{d_p W}{dp}\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right] \cdot dx$$

Diesem Ausdrucke kann man auch noch folgende Form geben

$$\text{V)}\quad \delta U = \frac{1}{\int_a^\alpha W \cdot dx} \cdot \left[\left(\frac{d_p V}{dp} - A \cdot \frac{d_p W}{dp}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp} - A \cdot \frac{d_p W}{dp}\right)_a \cdot \delta y_a\right]$$

$$+ \frac{1}{\int_a^\alpha W \cdot dx} \cdot \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_y V}{dy} - A \cdot \frac{d_y W}{dy}\right) - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp} - A \cdot \frac{d_p W}{dp}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

Man hat nun zuerst die in Gleichung IV, und hierauf noch die in Gleichung V für δU aufgestellte Form zu untersuchen, wie dieses schon (in §. 230 und 231) geschehen ist. Wenn man aber die Gleichung III bei Bestimmung der Constanten noch mit benützt, muss man sorgfältig beachten, ob sie nicht einen Widerspruch in sich selbst enthält, in welchem Falle die Aufgabe unmöglich ist. (Man sehe Aufgabe 236 und 242.)

Kann man das Prüfungsmittel an dem Mutationscoefficienten $\delta^2 U$ entnehmen, so muss man Gleichung II noch einmal mutiren, und dann alle möglichen Substitutionen und Reductionen vornehmen.

Untersuchung 55.

Es sei V ein reeller mit den Elementen x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ gebildeter Ausdruck; und man sucht für y eine solche reelle Function des nichtmutablen Veränderlichen x, dass dabei das zwischen den Gränzen von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckte Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 234. Inwiefern hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange des §. 223) auseinandergesetzt. Wenn man nun irgend eine durch $\varphi(x)$ dargestellte reelle Fnnction an die Stelle des y in Gleichung I einsetzt; so bekommt man für U einen aus a und α gebildeten Ausdruck, welcher dargestellt sein mag durch

$$\text{II)}\quad U' = \psi(\alpha) - \psi(a)$$

Die dem $\varphi(x)$ bei jedem Werthe des x nächstvorhergehenden und nächstnachfolgenden Nachbarfunctionen werden im Allgemeinen (nach §. 60) dargestellt durch

$$\text{III)}\quad \varphi(x) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots$$

Die aus diesen Functionen sich ergebenden Differentialquotienten der ersten und zweiten Ordnung sind dabei im Allgemeinen (man sehe §. 87)

$$\text{IV)}\quad \frac{d\varphi(x)}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d\delta^3 y}{dx} + \ldots\ldots$$

und

$$\text{V)}\quad \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \varkappa \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d^2\delta^2 y}{dx^2} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^2\delta^3 y}{dx^2} + \ldots\ldots$$

wo jeder der Ausdrücke δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, etc. eine für sich beliebige reelle Function von x vorstellt, und $\varkappa$ bald als positiv bald als negativ im Momente des Verschwindens befindlich gedacht wird.

Führt man die Reihen III, IV und V bezüglich an die Stelle des y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ein,

so bekommt man die dem U' nächstanliegenden Nachbarzustände, welche dargestellt werden mögen durch $(\psi(\alpha) - \psi(a) + \Delta U)$ oder durch $(U' + \Delta U)$.

Soll nun bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ die Differenz $(U' + \Delta U) - U'$ unter allen Umständen ihr Zeichen nicht wechseln können; so darf sich, wenn man für ΔU die nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe entwickelt, keineswegs die (in §. 62 aufgestellte) allgemeine Reihenform

$$\Delta U = \varkappa \cdot \delta U + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 U + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 U + \ldots\ldots$$

ergeben, wo, wenn man zur Abkürzung noch p anstatt $\frac{dy}{dx}$, und q anstatt $\frac{d^2y}{dx^2}$ setzt,

$$\text{VI)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \left[\frac{d_yV}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_pV}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_qV}{dq} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right] \cdot dx$$

$$\text{VII)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left[\frac{d_yV}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_pV}{dp} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{d_qV}{dq} \cdot \frac{d^2\delta^2 y}{dx^2}\right.$$

$$+ \frac{d_y^2V}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_yd_pV}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot \frac{d_yd_qV}{dy.dq} \cdot \delta y \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

$$\left. + \frac{d_p^2V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_pd_qV}{dp.dq} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \frac{d_q^2V}{dq^2} \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2\right] \cdot dx$$

etc. etc.

ist; denn hierbei würde ΔU zugleich mit $\varkappa$ sein Zeichen ändern. Nun ist

$$\frac{d_pV}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx} = \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_pV}{dp} \cdot \delta y\right) - \delta y \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_pV}{dp}\right)$$

$$\frac{d_qV}{dq} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} = \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_qV}{dq} \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right) - \frac{d\delta y}{dx} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_qV}{dq}\right)$$

$$= \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_qV}{dq} \cdot \frac{d\delta y}{dx} - \delta y \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right) + \delta y \cdot \frac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\frac{d_qV}{dq}\right)$$

Verfährt man ebenso mit $\frac{d_pV}{dp} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx}$ und mit $\frac{d_qV}{dq} \cdot \frac{d^2\delta^2 y}{dx^2}$, und führt man die sich ergebenden Ausdrücke in VI und VII ein; so gehen beide Gleichungen, wenn man die vollständigen Differentiale noch integrirt, über in

$$\text{VIII)}\quad \delta U = \left(\frac{d_pV}{dp} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(\frac{d_qV}{dq}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$$

$$- \left(\frac{d_pV}{dp} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right)_a \cdot \delta y_a - \left(\frac{d_qV}{dq}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\frac{d_yV}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_pV}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

und

$$\text{IX)}\quad \delta^2 U = \left(\frac{d_pV}{dp} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha + \left(\frac{d_qV}{dq}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_\alpha$$

$$- \left(\frac{d_pV}{dp} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right)_a \cdot \delta^2 y_a - \left(\frac{d_qV}{dq}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\frac{d_yV}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_pV}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right] \cdot \delta^2 y \cdot dx +$$

$$+\int_a^\alpha \left[\frac{d_y^2 V}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_p V}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot \frac{d_y d_q V}{dy.dq} \cdot \delta y \cdot \frac{d^2 \delta y}{dx^2} \right.$$

$$\left. + \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_p d_q V}{dp.dq} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \frac{d_q^2 V}{dq^2} \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 \right] \cdot dx$$

Man hat jetzt dafür zu sorgen, dass die für ΔU herzustellende Reihe kein solches erstes Glied hat, welches die erste Potenz $\varkappa$ als gemeinschaftlichen Factor enthält. Man ist aber, eben weil man dem δU zwei verschiedene Formen gegeben hat, gezwungen, auch beide Formen besonders zu untersuchen.

Erste Abtheilung.

§. 235. Untersuchung der ersten (in VI aufgestellten) Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass die für ΔU herzustellende Reihe jedenfalls dann kein solches erstes Glied hat, welches die erste Potenz $\varkappa$ als gemeinschaftlichen Factor enthält, wenn eines von folgenden acht Systemen dreier Gleichungen

$$\text{X)}\quad \frac{d_y V}{dy} = 0, \quad \frac{d_p V}{dp} = 0, \quad \frac{d_q V}{dq} = 0$$

$$\text{XI)}\quad \frac{d_y V}{dy} = 0, \quad \frac{d_p V}{dp} = 0, \quad \frac{d_q V}{dq} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

$$\text{XII)}\quad \frac{d_y V}{dy} = 0, \quad \frac{d_p V}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0}, \quad \frac{d_q V}{dq} = 0$$

$$\text{XIII)}\quad \frac{d_y V}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}, \quad \frac{d_p V}{dp} = 0, \quad \frac{d_q V}{dq} = 0$$

$$\text{XIV)}\quad \frac{d_y V}{dy} = 0, \quad \frac{d_p V}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0}, \quad \frac{d_q V}{dq} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

$$\text{XV)}\quad \frac{d_y V}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}, \quad \frac{d_p V}{dp} = 0, \quad \frac{d_q V}{dq} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

$$\text{XVI)}\quad \frac{d_y V}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}, \quad \frac{d_p V}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0}, \quad \frac{d_q V}{dq} = 0$$

$$\text{XVII)}\quad \frac{d_y V}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}, \quad \frac{d_p V}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0}, \quad \frac{d_q V}{dq} = \frac{\mathfrak{C}}{0}$$

stattfindet. Alle diese Gleichungen müssen bei jedem Werthe des x gelten, sind also identische Gleichungen; und sie können rückwärts noch eben dazu benützt werden, zu bestimmen, was $y = \varphi(x)$ für eine Function ist, bei welcher U möglicherweise ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird. Wie aber eine Function aufgefunden wird, welche dreien Gleichungen, die auch noch Differentialgleichungen sein können, zugleich genügt, ist schon früher (in §. 192) auseinandergesetzt.

Weil aber die gesuchte Function $y = \varphi(x)$ aus einem der hier aufgestellten acht Systeme entnommen wird, so erkennt man gradezu, dass die Gränzen a und α, welche sie auch immer sein mögen, auf die sich ergebende Function durchaus keinen Einfluss haben; und dieses ist ein sehr bemerkenswerther Umstand.

Das Prüfungsmittel gewinnt man, indem man die Reihen III, IV, V bezüglich an die Stelle des y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ einsetzt. Es ist aber bequem, vorerst nur $(\varphi(x) + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d\mathfrak{P}}{dx}\right)$ und $\left(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \varkappa \cdot \frac{d^2\mathfrak{P}}{dx^2}\right)$ bezüglich an die Stelle von y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ einzusetzen, und dann eine nach aufsteigenden Potenzen des $\varkappa$ fortschreitende Reihe zu entwickeln, etc. etc.

Hat man aber namentlich die gesuchte Function $y = \varphi(x)$ aus dem ersten der obi-

gen acht Systeme dreier Gleichungen, d. h. aus den drei gleichzeitig bestehenden Gleichungen

$$\frac{d_y V}{dy} = 0, \quad \frac{d_p V}{dp} = 0, \quad \frac{d_q V}{dq} = 0$$

entnommen, so sind, weil $\frac{d_p V}{dp} = 0$ und $\frac{d_q V}{dq} = 0$ identische Gleichungen sind, auch $\frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right) = 0$ und $\frac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\frac{d_q V}{dq}\right) = 0$ identische Gleichungen; und es werden nicht nur zwischen den Gränzen $x = a$ bis $x = \alpha$, sondern auch zwischen allen andern beliebigen Gränzen die beiden (in VI und VIII aufgestellten) Formen des δU zu Null, und die beiden (in VII und IX aufgestellten) Formen des $\delta^2 U$ reduciren sich auf

$$\text{XVIII)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left[\frac{d_y^2 V}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_p V}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot \frac{d_y d_q V}{dy.dq} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \frac{d^2 \delta y}{dx^2}\right.$$
$$\left. + \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_p d_q V}{dp.dq} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + \frac{d_q^2 V}{dq^2} \cdot \left(\frac{d^2 \delta y}{dx^2}\right)^2\right] \cdot dx$$

Man hat also noch zu untersuchen, unter welcher Bedingung dieser Ausdruck beständig positiv oder negativ bleibt. Man bezeichne zur Abkürzung das, was aus den sechs Quotienten $\frac{d_y^2 V}{dy^2}$, $\frac{d_y d_p V}{dy.dp}$, $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$, $\frac{d_y d_q V}{dy.dq}$, $\frac{d_p d_q V}{dp.dq}$, $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$ hervorgeht, wenn man für y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2 y}{dx^2}$ die gefundene Function $y = \varphi(x)$ setzt, bezüglich mit M, N, P, Q, R, S; und, um soviel als möglich zu integriren, setze für das allgemeine bei $x = a$ anfangende Integral folgende Gleichung

$$\text{XIX)} \quad \int_a^x \left[M \cdot \delta y^2 + 2N \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + P \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 2 \cdot Q \cdot \delta y \cdot \frac{d^2 \delta y}{dx^2}\right.$$
$$\left. + 2R \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + S \cdot \left(\frac{d^2 \delta y}{dx^2}\right)^2\right] \cdot dx$$
$$= \left(\eta \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \lambda \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \mu \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)_x$$
$$- \left(\eta \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \lambda \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \mu \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)_a$$
$$+ \int_a^x \left[F \cdot \delta y^2 + 2 \cdot E \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + 2 \cdot D \cdot \delta y \cdot \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + C \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right.$$
$$\left. + 2B \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + A \cdot \left(\frac{d^2 \delta y}{dx^2}\right)^2\right] \cdot dx$$

Nun differentiire man auf beiden Seiten, bringe alles auf eine Seite des Gleichheitszeichens, und zerlege die dabei sich ergebende Gleichung in ihre einzelnen identischen Gleichungen; so ergibt sich

$$F = M - \frac{d\eta}{dx}, \quad E = N - \eta - \frac{d\lambda}{dx}, \quad C = P - 2\lambda - \frac{d\mu}{dx},$$

$$D = Q - \lambda, \quad B = R - \mu, \quad A = S = \frac{d_q^2 V}{dq^2}$$

Man erkennt also, dass nur A vollkommen bestimmt ist, dagegen zur Bestimmung von B, C, D, E, F noch nöthig wäre, dass auch η, λ, μ bestimmt sind. Da nun durchaus keine Bedingung existirt, welcher die Ausdrücke η, λ und μ genügen sollen, so sind

sie ganz willkürliche Functionen von x. Man kann also durch geeignete Annahme dieser willkürlichen Functionen die Ausdrücke B, C, D, E und F so einrichten, dass Gleichung XIX übergeht in

$$\text{XX)}\quad \int_a^x \left[M \cdot \delta y^2 + 2 \cdot N \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + P \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 2Q \cdot \delta y \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} \right.$$
$$\left. + 2R \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + S \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 \right] \cdot dx$$
$$= \left(\eta \cdot \delta y^2 + 2\lambda \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \mu \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)_x$$
$$- \left(\eta \cdot \delta y^2 + 2\lambda \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \mu \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)_a$$
$$+ \int_a^x A \cdot \left(g \cdot \delta y + h \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 \cdot dx$$

Dazu ist aber (nach §. 12) nöthig, dass $AC = B^2$, $AF = D^2$ und $AE = BD$ ist, d. h. dass die Gleichungen stattfinden

$$\text{XXI)}\quad \left(P - 2\lambda - \frac{d\mu}{dx}\right) \cdot S = (R - \mu)^2$$

$$\text{XXII)}\quad \left(M - \frac{d\eta}{dx}\right) \cdot S = (Q - \lambda)^2$$

$$\text{XXIII)}\quad \left(N - \eta - \frac{d\lambda}{dx}\right) \cdot S = (Q - \lambda) \cdot (R - \mu)$$

Aus diesen drei Differentialgleichungen der ersten Ordnung lassen sich η, λ und μ als Functionen mit drei willkürlichen Constanten bestimmen. Diese willkürlichen Constanten sind aber sowohl in den Functionen η, λ, μ, als auch in den Functionen g, h enthalten. Die Gleichung XX, welche, indem sie von $x = a$ bis zu jedem beliebigen Werthe des x erstreckt wird, giltig ist, ist auch giltig, wenn sie von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckt wird; und man hat daher auch (in Folge der Gleichung XVIII)

$$\text{XXIV)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left[\frac{d_y^2 V}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_p V}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \right.$$
$$\left. + 2 \cdot \frac{d_y d_q V}{dy.dq} \cdot \delta y \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + 2 \cdot \frac{d_p d_q V}{dp.dq} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \frac{d_q^2 V}{dq^2} \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 \right] \cdot dx =$$
$$\left(\eta \cdot \delta y^2 + 2\lambda \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \mu \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)_\alpha$$
$$- \left(\eta \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \lambda \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \mu \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)_a$$
$$+ \int_a^\alpha \frac{d_q^2 V}{dq^2} \cdot \left(g \cdot \delta y + h \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 \cdot dx$$

Hieran erkennt man:

I) dass die Veränderlichkeit des $\delta^2 U$ ganz unabhängig ist von der Veränderlichkeit der in η, λ, μ, g, h enthaltenen drei willkürlichen Constanten, d. h. man bekommt jedesmal den irgend einem δy entsprechenden wahren Werth des $\delta^2 U$, man mag den in η, λ, μ, g, h enthaltenen drei willkürlichen Constanten was immer für beliebige Werthe beilegen. Da ferner unter δy nur eine reelle Function von x gedacht werden darf, so ist

2) der quadratische Ausdruck $\left(g \cdot \delta y + h \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2$ positiv, wenn g und h reell sind; also ist (nach §. 9) bei reellem g und reellem h das Integral $\int_a^\alpha \frac{d_q^2 V}{dq^2} \cdot \left(g \cdot \delta y + h \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 \cdot dx$ positiv oder negativ, wenn der Quotient $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$ bei jedem von a bis α möglichen Werthe des x positiv oder negativ bleibt, wobei freilich für einzelne von a bis α möglichen Werthe des x dieser Quotient auch zu Null werden darf.

Da nun, wie schon bemerkt, sich immer der irgend einem δy entsprechende wahre Werth des $\delta^2 U$ ergibt, man mag den in η, λ, μ, g, h enthaltenen drei willkürlichen Constanten was immer für einen beliebigen Werth beilegen; so kann man auf zwei verschiedenen Wegen den Zeichenstand des $\delta^2 U$ kennen lernen:

1) Man richte die in η, λ, μ, g, h enthaltenen drei willkürlichen Constanten so ein, dass die Gleichung

$$\text{XXV)} \quad \left(\eta \cdot \delta y^2 + 2\lambda \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \mu \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)_\alpha - \left(\eta \cdot \delta y^2 + 2\lambda \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \mu \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)_a = 0$$

stattfindet. Je nachdem man sich nemlich unter δy eine immer andere und andere Function denkt, muss man den in η, λ, μ enthaltenen drei willkürlichen Constanten einen immer andern und andern Werth beilegen; und so kann Gleichung XXV stattfinden bei jeder beliebigen Function δy von x. Dabei reducirt sich Gleichung XXIV auf

$$\text{XXVI)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \frac{d_q^2 V}{dq^2} \cdot \left(g \cdot \delta y + h \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 \cdot dx$$

und man erkennt, dass jetzt der Zeichenstand des $\delta^2 U$ von dem Quotienten $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$ abhängig ist.

2) Wenn aber die Gleichung XXV einen Widerspruch in sich selbst enthält, so richte man die drei in η, λ und μ enthaltenen willkürlichen Constanten so ein, dass die Differenz

$$\text{XXVII)} \quad \left(\eta \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \lambda \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \mu \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)_\alpha - \left(\eta \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \lambda \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \mu \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)_a$$

dasselbe Vorzeichen bekommt, welches der Quotient $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$ bei allen von a bis α möglichen Werthen des x behält.

Aus allem Vorhergehenden folgt für das Prüfungsmittel folgende einfache Regel:

„Wenn der Quotient $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$ bei allen von a bis α möglichen Werthen des x positiv „oder negativ bleibt, so ist auch $\delta^2 U$ positiv oder negativ; und es findet bezüglich ein „Minimum-stand oder Maximum-stand statt."

Dabei beachte man, dass, wenn dieser Quotient bei einigen von a bis α möglichen Werthen des x zu Null wird, die vorstehende Regel ihre Giltigkeit behält; wenn aber dieser Quotient nicht bei allen von a bis α möglichen Werthen des x einerlei Zeichen behält, so ist dieses (man sehe §. 9) noch keine Anzeige, dass weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfinde, sondern dieses müsste noch besonders nachgewiesen werden. Dagegen verliert vorstehende Regel ihre Giltigkeit, sobald dieser Quotient bei irgend einem von a bis α möglichen Werthe des x Null in den Nenner bekommt.

Wenn aber bei allen von a bis α möglichen Werthen das x gleichzeitig $\frac{d_q^2V}{dq^2}$, $\frac{d_pd_qV}{dp.dq}$, $\frac{d_yd_qV}{dy.dq}$ zu Null werden, dann zieht sich Gleichung XVIII zurück auf

$$\delta^2U = \int_a^\alpha \left[\frac{d_y^2V}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_yd_pV}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

und man erkennt, dass das Merkmal eines Maximum-standes oder Minimum-standes an dem Quotienten $\frac{d_p^2V}{dp^2}$ zu entnehmen ist.

Wenn aber bei allen von a bis α möglichen Werthen des x auch noch gleichzeitig $\frac{d_p^2V}{dp^2}$ und $\frac{d_yd_pV}{dy.dp}$ zu Null werden; so ist das Merkmal des Maximum-standes oder Minimum-standes an dem Quotienten $\frac{d_y^2V}{dy^2}$ zu entnehmen.

Dass aber diese über den Zeichenstand des δ^2U bis jetzt geführte Untersuchung nur so lange ihre Giltigkeit behält, als keiner der sechs Quotienten $\frac{d_q^2V}{dq^2}$, $\frac{d_pd_qV}{dp.dq}$, $\frac{d_yd_qV}{dy.dq}$, $\frac{d_p^2V}{dp^2}$, $\frac{d_yd_pV}{dy.dp}$, $\frac{d_y^2V}{dy^2}$ bei irgend einem von a bis α möglichen Werthe des x Null in den Nenner bekommt, braucht hier nicht mehr erinnert zu werden.

Da die Gränzen a und α durchaus keinen Einfluss haben auf die bis jetzt gesuchte Function $y = \varphi(x)$, so macht sie nicht allein das zwischen den Gränzen a bis α erstreckte Integral U, sondern auch das zwischen vielen andern Gränzen, ja oft auch das zwischen allen beliebigen Gränzen erstreckte U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande. Allein eben diese Function $y = \varphi(x)$ muss auch jedesmal drei Gleichungen zugleich identisch machen, eine Bedingung, die bekanntlich nicht immer erfüllt werden kann. (Man vergleiche noch §. 191 am Ende.)

Zweite Abtheilung.

§. 236. Untersuchung der zweiten (in VIII aufgestellten) Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass es auch eine von den Gränzen a und α abhängige Function $y = \varphi(x)$ gibt, welche nur eine einzige Gleichung identisch machen muss, dagegen aber auch nur das zwischen den Gränzen a bis α erstreckte Integral U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande machen kann, während dabei das zwischen irgend zwei andern Gränzen erstreckte U weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand ist. Die Aufgabe, wo eine von den Gränzen a und α abhängige Function $y = \varphi(x)$ gesucht wird, ist aber diejenige, welche in der Anwendung am häufigsten vorkommt, und jedesmal möglich ist.

A) Man zerlege nun Gleichung VIII zunächst in folgende zwei:

$$\text{XXVIII)} \quad \frac{d_yV}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_pV}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\frac{d_qV}{dq}\right) = 0$$

und

$$\text{XXIX} \quad \left(\frac{d_pV}{dp} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(\frac{d_qV}{dq}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$$

$$- \left(\frac{d_pV}{dp} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right)_a \cdot \delta y_a - \left(\frac{d_qV}{dq}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a = 0$$

Die erste dieser Gleichungen wird Hauptgleichung und die zweite wird Gränzengleichung genannt. Die Hauptgleichung ist eine identische Gleichung, wird in der Regel eine

Differentialgleichung der vierten Ordnung sein, und gibt die gesuchte Function $y = \varphi(x)$. Ist aber die Hauptgleichung wirklich von der vierten Ordnung, so gehen durch deren Integration noch vier willkürliche Constanten ein, die nicht schon in der vorgelegten Hauptgleichung selbst enthalten waren. Die Gränzengleichung ist keine identische, und gilt nur für die Werthe $x = a$ und $x = \alpha$. Diese Gränzengleichung muss bei Bestimmung der in $y = \varphi(x)$ eingegangenen willkürlichen Constanten mitbenützt werden; und sie wird sehr oft nicht erfüllt werden können, wenn die Hauptgleichung nicht von der vierten Ordnung ist.

Gleichung IX reducirt sich jetzt auf

$$\text{XXX)}\quad \delta^2 U = \left(\frac{d_pV}{dp} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha + \left(\frac{d_qV}{dq}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_\alpha$$

$$- \left(\frac{d_pV}{dp} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right)_a \cdot \delta^2 y_a - \left(\frac{d_qV}{dq}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\frac{d_y^2V}{dy^2}\cdot \delta y^2 + 2\cdot\frac{d_yd_pV}{dy.dp}\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} + 2\cdot\frac{d_yd_qV}{dy.dq}\cdot\delta y\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right.$$

$$\left. + \frac{d_p^2V}{dp^2}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 2\cdot\frac{d_pd_qV}{dp.dq}\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \frac{d_q^2V}{dq^2}\cdot\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2\right]\cdot dx$$

Man setze zur Abkürzung noch $Y = \frac{d_pV}{dp} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_qV}{dq}\right)$, und $Y' = \frac{d_qV}{dq}$, und gebe der Gleichung XXX (nach dem vorigen §.) folgende Form:

$$\text{XXXI)}\quad \delta^2 U = \left(Y\cdot\delta^2 y + Y'\cdot\frac{d\delta^2 y}{dx} + \eta\cdot\delta y^2 + 2\lambda\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \mu\cdot\left(\frac{d\delta y}{dy}\right)^2\right)_\alpha$$

$$- \left(Y\cdot\delta^2 y + Y'\cdot\frac{d\delta^2 y}{dx} + \eta\cdot\delta y^2 + 2\lambda\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \mu\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)_a$$

$$+ \int_a^\alpha \frac{d_q^2V}{dq^2}\cdot\left(g\cdot\delta y + h\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2\cdot dx$$

Die Functionen η, λ, μ werden aus den Gleichungen XXI, XXII und XXIII entnommen. Nun ist die Gränzengleichung noch zu erfüllen. Es genügt aber, wenn man nur die unten stehenden drei Fälle, wobei die Hauptgleichung als eine Differentialgleichung der vierten Ordnung vorausgesetzt wird, besonders unterscheidet, weil andere Fälle sich auf ähnliche Weise behandeln lassen. Wie man dann, wann die Hauptgleichung nicht von der vierten Ordnung ist, verfahren muss, ergibt sich nach Analogie der Aufgaben 230, 231.

Erster Fall. Wenn zwischen y_a, y_α, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha$, also auch zwischen den dazu gehörigen Mutationscoefficienten durchaus keine Abhängigkeit stattfindet; so zerfällt die Gränzengleichung (nach §. 92) in folgende vier einzelne:

$$\left(\frac{d_pV}{dp} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right)_\alpha = 0,\quad \left(\frac{d_pV}{dp} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right)_a = 0,$$

$$\left(\frac{d_qV}{dq}\right)_\alpha = 0,\ \text{und}\ \left(\frac{d_qV}{dq}\right)_a = 0$$

und diese vier Gleichungen dienen zur Bestimmung der vier in $y = \varphi(x)$ eingegangenen willkürlichen Constanten. Gleichung XXXI reducirt sich jetzt auf

$$\delta^2 U = \left(\eta\cdot\delta y^2 + 2\lambda\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \mu\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)_\alpha$$

$$- \left(\eta\cdot\delta y^2 + 2\lambda\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \mu\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)_a +$$

$$+\int_a^\alpha \frac{d_q^2 V}{dq^2} \cdot \left(g \cdot \delta y + h \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 \cdot dx$$

und hinsichtlich des Zeichenstandes des $\delta^2 U$ gelten die schon im vorigen §. gemachten Bemerkungen.

Zweiter Fall. Es sei vorgeschrieben, dass die gesuchte Function $y = \varphi(x)$ nur aus der Zahl derjenigen herausgewählt werde, welche alle folgenden vier Bedingungen genügen:

1) Bei $x = a$ sollen alle in Betracht zu ziehenden Functionen den gegebenen Werth b bekommen.

2) Bei $x = \alpha$ sollen alle in Betracht zu ziehenden Functionen den gegebenen Werth β bekommen.

3) Bei $x = a$ soll der erste Differentialquotient aller in Betracht zu ziehenden Functionen den gegebenen Werth c bekommen, und

4) Bei $x = \alpha$ soll der erste Differentialquotient aller in Betracht zu ziehenden Functionen den gegebenen Werth γ bekommen.

Hier ist $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a = 0$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, $\left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_a = 0$, $\left(\frac{d\delta^2 y}{dx}\right)_\alpha = 0$ etc. Die Gränzengleichung fällt also jetzt von selbst weg, und die vier in $y = \varphi(x)$ eingegangenen willkürlichen Constanten bestimmen sich durch die hier gestellten vier Bedingungen. Gleichung XXXI reducirt sich jetzt auf

$$\delta^2 U = \int_a^\alpha \frac{d_q^2 V}{dq^2} \cdot \left(g \cdot \delta y + h \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 \cdot dx$$

und der Zeichenstand des $\delta^2 U$ hangt von $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$ ab.

Dritter Fall. Es seien zwischen y_a, y_α, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha$ drei Gleichungen gegeben. Man eliminire δy_a, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$ und $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$, so reducirt sich die Gränzengleichung XXIX auf folgende Form:

$$H \cdot \delta y_\alpha = 0$$

so dass $H = 0$ ist, und diese Gleichung, verbunden mit den drei gegebenen, reichen hin, um die vier in $y = \varphi(x)$ eingegangenen willkürlichen Constanten zu bestimmen. Gleichung XXXI nimmt folgende Form an:

$$\delta^2 U = \left[K + (\eta)_\alpha + L \cdot (\lambda)_\alpha + L' \cdot (\mu)_\alpha + L'' \cdot (\eta)_a + L''' \cdot (\lambda)_a + L'''' \cdot (\mu)_a\right] \cdot \delta y_\alpha^2$$

$$+\int_a^\alpha \frac{d_q^2 V}{dq^2} \cdot \left(g \cdot \delta y + h \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 \cdot dx$$

Weil nun der Werth des $\delta^2 U$ von den Werthen der drei in η, λ, μ, g, h eingegangenen willkürlichen Constanten ganz unabhängig ist, so sehe man zu, ob man diese drei Constanten so einrichten kann, dass die Gleichung

$$K + (\eta)_\alpha + L \cdot (\lambda)_\alpha + L' \cdot (\mu)_\alpha + L'' \cdot (\eta)_a + L''' \cdot (\lambda)_a + L'''' \cdot (\mu)_a = 0$$

stattfindet. Wenn aber diese Gleichung einen Widerspruch in sich selbst enthält, so richte man die drei in η, λ, μ, g, h enthaltenen willkürlichen Constanten so ein, dass der Ausdruck

$$\left[K + (\eta)_\alpha + L \cdot (\lambda)_\alpha + L' \cdot (\mu)_\alpha + L'' \cdot (\eta)_a + L''' \cdot (\lambda)_a + L'''' \cdot (\mu)_a\right] \cdot \delta y_\alpha^2$$

dasselbe Vorzeichen bekommt, welches der Quotient $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$ bei allen von a bis α mögli-

chen Werthen des x behält. Der Zeichenstand des $\delta^2 U$ hangt also auch jetzt von $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$ ab.

Und so fort bei andern Fällen, die sich auf die Gränzen beziehen.

Zum Ueberflusse soll auch hier noch einmal strenge darauf aufmerksam gemacht werden, dass die hier gesuchte und von den Gränzen a und α abhängige Function $y = \varphi(x)$ nur das zwischen den Gränzen $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckte U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande macht, eben weil auch nur das zwischen den nemlichen Gränzen erstreckte δU zu Null wird.

B) Hat man die bis jetzt (in diesem §.) gegebene Untersuchung ausgeführt, so kehre man abermals zu Gleichung VIII zurück, und schaue, ob man nicht dem zu δy gehörigen Factor

$$\frac{d_y V}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\frac{d_q V}{dq}\right)$$

die Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ beilegen kann; etc. etc. (Man vergleiche noch die Aufgabe 172.)

Untersuchung 56.

Es ist V ein reeller mit den Elementen x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ gebildeter Ausdruck, und man sucht für y eine solche reelle Function des nichtmutablen Veränderlichen x, dass dabei das zwischen den Gränzen von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckte Integral

$$\text{I)} \quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 237. Inwiefern hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange des §. 223) auseinandergesetzt. Wenn man nun irgend eine durch $\varphi(x)$ dargestellte reelle Function an die Stelle des y einsetzt, etc. etc. (Statt aller Wiederholungen soll auf den Anfang des §. 229 und des §. 234 hingewiesen werden). Wenn man zur Abkürzung noch p statt $\frac{dy}{dx}$, q statt $\frac{d^2y}{dx^2}$, und r statt $\frac{d^3y}{dx^3}$ setzt; so folgt aus Gleichung I

$$\text{II)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_q V}{dq} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \frac{d_r V}{dr} \cdot \frac{d^3\delta y}{dx^3}\right) \cdot dx$$

und wenn man hier die gewöhnliche Umformung vornimmt, so gibt sich

$$\begin{aligned}\text{III)} \quad \delta U = & \left(\frac{d_p V}{dp} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_q V}{dq}\right) + \frac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\frac{d_r V}{dr}\right)\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha \\ & + \left(\frac{d_q V}{dq} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_r V}{dr}\right)\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha + \left(\frac{d_r V}{dr}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_\alpha \\ & - \left(\frac{d_p V}{dp} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_q V}{dq}\right) + \frac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\frac{d_r V}{dr}\right)\right)_a \cdot \delta y_a \\ & - \left(\frac{d_q V}{dq} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_r V}{dr}\right)\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a - \left(\frac{d_r V}{dr}\right)_a \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_a \\ & + \int_a^\alpha \left[\frac{d_y V}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\frac{d_q V}{dq}\right) - \frac{1}{dx^3} \cdot d^3\left(\frac{d_r V}{dr}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx\end{aligned}$$

Erste Abtheilung.

Untersuchung der ersten (in Gleichung II aufgestellten) Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass die für ΔU herzustellende Reihe jedenfalls dann kein solches erstes Glied hat, welches die erste Potenz $\varkappa$ als gemeinschaftlichen Factor enthält, wenn eines von den sechszehn Systemen der vier Gleichungen stattfindet, welche sich combiniren lassen, indem man die Quotienten $\frac{d_y V}{dy}$, $\frac{d_p V}{dp}$, $\frac{d_q V}{dq}$, $\frac{d_r V}{dr}$ entweder zu Null werden lässt, oder ihnen die Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ beilegt. Man erkennt aber gradezu, dass auf die dabei sich ergebende Function $y = \varphi(x)$ die Gränzen a und α, welche sie auch immer sein mögen, keinen Einfluss haben; und dieses ist ein sehr bemerkenswerther Umstand.

Hat man namentlich die gesuchte Function $y = \varphi(x)$ aus dem ersten dieser sechszehn Systeme, d. h. aus den vier gleichzeitig bestehenden Gleichungen

$$\frac{d_y V}{dy} = 0, \quad \frac{d_p V}{dp} = 0, \quad \frac{d_q V}{dq} = 0, \quad \frac{d_r V}{dr} = 0$$

entnommen, so wird grade so, wie im vorigen §. bewiesen, dass jetzt der Zeichenstand des $\delta^2 U$ von dem Quotienten $\frac{d_r^2 V}{dr^2}$ abhängig ist, d. h. $\delta^2 U$ ändert sein Zeichen nicht, wenn der Quotient $\frac{d_r^2 V}{dr^2}$ bei allen von a bis α möglichen Werthen des x sein Zeichen nicht ändert. Aendert er aber sein Zeichen, so muss noch besonders nachgewiesen werden, dass weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfindet.

Wenn die Quotienten $\frac{d_r^2 V}{dr^2}$, $\frac{d_q d_r V}{dq.dr}$, $\frac{d_p d_r V}{dp.dr}$, $\frac{d_y d_r V}{dy.dr}$ gleichzeitig zu Null werden bei jedem von a bis α möglichen Werthe des x; so geht man zu dem Quotienten $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$ über.

Wenn aber die Quotienten $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$, $\frac{d_p d_q V}{dp.dq}$, $\frac{d_y d_q V}{dy.dq}$ gleichzeitig zu Null werden bei jedem von a bis α möglichen Werthe des x; so geht man zu dem Quotienten $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ über.

Wenn aber auch noch gleichzeitig die Quotienten $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ und $\frac{d_y d_p V}{dy.dp}$ zu Null werden bei jedem von a bis α möglichen Werthe des x; so geht man zu $\frac{d_y^2 V}{dy^2}$ über.

Da die Gränzen a und α durchaus keinen Einfluss haben auf die bis jetzt gesuchte Function $y = \varphi(x)$, so macht sie nicht allein das zwischen den Gränzen a bis α erstreckte Integral U, sondern auch das zwischen vielen andern Gränzen, ja oft auch das zwischen allen beliebigen Gränzen erstreckte U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande. Allein eben diese Function $y = \varphi(x)$ muss auch jedesmal vier Gleichungen zugleich identisch machen, eine Bedingung, die bekanntlich nicht immer erfüllt werden kann.

Zweite Abtheilung.

Untersuchung der zweiten (in Gleichung III aufgestellten) Form des δU. An dieser Form des δU erkennt man, dass es auch eine von den Gränzen a und α abhängige Function $y = \varphi(x)$ gibt, welche nur eine einzige Gleichung identisch machen muss, dagegen aber auch nur das zwischen den Gränzen a bis α erstreckte Integral U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande machen kann, während dabei das zwischen irgend zwei andern Gränzen erstreckte U weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand ist. Die Aufgabe, wo eine von den Gränzen a und α abhängige Function $y = \varphi(x)$

gesucht wird, ist aber diejenige, welche in der Anwendung am häufigsten vorkommt, und auch jedesmal möglich ist.

A) Die (in III aufgestellte) zweite Form des δU gibt zunächst die Hauptgleichung

$$\text{IV)}\quad \frac{d_y V}{dy} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2}\cdot d^2\left(\frac{d_q V}{dq}\right) - \frac{1}{dx^3}\cdot d^3\left(\frac{d_r V}{dr}\right) = 0$$

Sie ist eine identische Gleichung, wird in der Regel eine Differentialgleichusg der sechsten Ordnung sein, und liefert die gesuchte Function $y = \varphi(x)$. Die (in Gleichung III) ausserhalb des Integralzeichens befindlichen sechs Theilsätze geben zusammen die Gränzengleichung, welche bei Bestimmung der Gonstanten noch mit benützt werden muss. Ist die Hauptgleichung wirklich von der sechsten Ordnung, so gehen durch deren Integration noch sechs willkürliche Constanten ein, die nicht schon in der vorgelegten Hauptgleichung selbst enthalten waren. Die Gränzengleichung ist keine identische, und gilt nur für die Werthe $x = a$ und $x = \alpha$; sie wird aber sehr oft nicht erfüllt werden können, wenn die Hauptgleichung nicht von der sechsten Ordnung ist.

Hinsichtlich des Zeichenstandes von $\delta^2 U$ gelten die bereits (in diesem §.) gemachten Bemerkungen. Ferner soll noch einmal strenge darauf aufmerksam gemacht werden, dass die hier gesuchte und von den Gränzen a und α abhängige Function $y = \varphi(x)$ nur das zwischen den Gränzen $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckte Integral U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande macht, eben weil auch nur das zwischen den nemlichen Gränzen erstreckte δU zu Null wird.

B) Nun kehre man wieder zu Gleichung III zurück, und schaue, ob man nicht dem zu δy gehörigen Factor

$$\frac{d_y V}{dy} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2}\cdot d^2\left(\frac{d_q V}{dq}\right) - \frac{1}{dx^3}\cdot d^3\left(\frac{d_r V}{dr}\right)$$

die Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ beilegen kann, etc. etc.

Aus allem Vorhergehenden ist nun klar, wie man zu verfahren hat, wenn V ein reeller aus den Elementen $x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3}\ \cdots\cdots \frac{d^my}{dx^m}$ gebildeter Ausdruck ist, und man für y eine solche reelle Function von x sucht, dass das zwischen den Gränzen von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckte Integral

$$U = \int_a^\alpha V\cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Untersuchung 57.

Es ist V ein reeller mit den Elementen $x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \cdots\cdots,\ \frac{d^my}{dx^m},\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{d^2z}{dx^2},\ \cdots\cdots,\ \frac{d^nz}{dx^n}$ gebildeter Ausdruck, wo die Elemente y und z ganz unabhängig untereinander sind; und man sucht für y und z solche reelle Functionen des nichtmutablen Veränderlichen x, dass dabei das zwischen den Gränzen von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckte Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha V\cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 238. In wieferne hier von einem Maximum-stande oder Minimum-stande die Rede ist, ist schon (im Anfange des §. 223) auseinandergesetzt. Wenn man nun irgend zwei durch $\varphi'(x)$ und $\varphi''(x)$ dargestellte reelle Functionen bezüglich an die Stelle des y und des z in Gleichung I einsetzt; so bekommt man für U einen aus a und α gebildeten Ausdruck, welcher mit $U' = \psi(\alpha) - \psi(a)$ bezeichnet sein mag, etc. etc. (Statt aller Wiederholungen mag auf den Anfang der §§. 223, 225, 229, 234 verwiesen werden.)

Man nehme vorerst den bestimmten Fall vor, wo V ein nur aus den Elementen x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, z, $\frac{dz}{dx}$ gebildeter Ausdruck ist, und setze zur Bequemlichkeit p statt $\frac{dy}{dx}$, q statt $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\mathfrak{p}$ statt $\frac{dz}{dx}$; dann bekommt man zunächst

$$\text{II)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_yV}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_pV}{dp}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_qV}{dq}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \frac{d_zV}{dz}\cdot\delta z + \frac{d_\mathfrak{p}V}{d\mathfrak{p}}\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right)\cdot dx$$

und wenn man die gehörigen Umformungen vornimmt, so gibt sich

$$\text{III)}\quad \delta U = \left(\frac{d_pV}{dp} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha + \left(\frac{d_qV}{dq}\right)_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha + \left(\frac{d_\mathfrak{p}V}{d\mathfrak{p}}\right)_\alpha\cdot\delta z_\alpha$$
$$- \left(\frac{d_pV}{dp} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right)_a\cdot\delta y_a - \left(\frac{d_qV}{dq}\right)_a\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a - \left(\frac{d_\mathfrak{p}V}{d\mathfrak{p}}\right)_a\cdot\delta z_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_yV}{dy} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_pV}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2}\cdot d^2\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right)\cdot\delta y\right.$$
$$\left. + \left(\frac{d_zV}{dz} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_\mathfrak{p}V}{d\mathfrak{p}}\right)\right)\cdot\delta z\right]\cdot dx$$

§. 239. Untersuchung der ersten (in Gleichung II aufgestellten) Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass die für $\varDelta U$ herzustellende Reihe jedenfalls dann kein solches erstes Glied hat, welches die erste Potenz $\varkappa$ als gemeinschaftlichen Factor enthält, wann eines von den zweiunddreissig Systemen der fünf Gleichungen stattfindet, welche sich combiniren lassen, indem man die Quotienten $\frac{d_yV}{dy}$, $\frac{d_pV}{dp}$, $\frac{d_qV}{dq}$, $\frac{d_zV}{dz}$, $\frac{d_\mathfrak{p}V}{d\mathfrak{p}}$ entweder zu Null werden lässt, oder ihnen die Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ beilegt. Man erkennt aber gradezu, dass auf die dabei sich ergebenden Functionen $y = \varphi'(x)$ und $z = \varphi''(x)$ die Gränzen a und α, welche sie auch immer sein mögen, keinen Einfluss haben; und dieses ist ein sehr bemerkenswerther Umstand.

Hat man namentlich die gesuchten Functionen $y = \varphi'(x)$ und $z = \varphi''(x)$ aus dem ersten dieser zweiunddreissig Systeme, d. h. aus den fünf gleichzeitig bestehenden Gleichungen

$$\frac{d_yV}{dy} = 0,\ \frac{d_pV}{dp} = 0,\ \frac{d_qV}{dq} = 0,\ \frac{d_zV}{dz} = 0,\ \frac{d_\mathfrak{p}V}{d\mathfrak{p}} = 0$$

entnommen, und kann man das Prüfungsmittel an dem für δ^2U sich ergebenden Ausdrucke gewinnen; so bleibt jetzt nur

$$\text{IV)}\quad \delta^2U = \int_a^\alpha \left[\frac{d_q^2V}{dq^2}\cdot\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 + 2\cdot\frac{d_qd_pV}{dq.dp}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2V}{dp^2}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right.$$
$$+ 2\cdot\frac{d_qd_yV}{dq.dy}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2}\cdot\delta y + 2\cdot\frac{d_pd_yV}{dp.dy}\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot\delta y + \frac{d_y^2V}{dy^2}\cdot\delta y^2 + 2\cdot\frac{d_qd_\mathfrak{p}V}{dq.d\mathfrak{p}}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2}\cdot\frac{d\delta z}{dx}$$
$$+ 2\cdot\frac{d_pd_\mathfrak{p}V}{dp.d\mathfrak{p}}\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot\frac{d\delta z}{dx} + 2\cdot\frac{d_yd_\mathfrak{p}V}{dy.d\mathfrak{p}}\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta z}{dx} + \frac{d_\mathfrak{p}^2V}{d\mathfrak{p}^2}\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + 2\cdot\frac{d_qd_zV}{dq.dz}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2}\cdot\delta z +$$

$$+ 2 \cdot \frac{d_p d_z V}{dp.dz} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta z + 2 \cdot \frac{d_y d_z V}{dy.dz} \cdot \delta y \cdot \delta z + 2 \cdot \frac{d_{\mathfrak{p}} d_z V}{d\mathfrak{p}.dz} \cdot \frac{d\delta z}{dx} \cdot \delta z + \frac{d_z^2 V}{dz^2} \cdot \delta z^2 \Big] \cdot dx$$

und man hat noch die Bedingungen aufzusuchen, unter denen dieser Ausdruck sein Zeichen nicht wechselt. Man bezeichne zur Abkürzung das, was aus obigen Differentialquotienten hervorgeht, wenn man für y und z die gefundenen Functionen setzt, der Reihe nach mit den deutschen Buchstaben

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{E},\ \mathfrak{F},\ \mathfrak{G},\ \mathfrak{H},\ \mathfrak{J},\ \mathfrak{K},\ \mathfrak{L},\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{N},\ \mathfrak{P},\ \mathfrak{Q}$$

und um soviel als möglich zu integriren, setze man für das unbestimmte bei $x = a$ anfangende Integral folgende Gleichung:

$$\text{V)}\quad \int_a^x \Big[\mathfrak{A} \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 + 2\mathfrak{B} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{C} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 2\mathfrak{D} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} \cdot \delta y$$

$$+ 2\mathfrak{E} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta y + \mathfrak{F} \cdot \delta y^2 + 2\mathfrak{G} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} \cdot \frac{d\delta z}{dx} + 2 \cdot \mathfrak{H} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \frac{d\delta z}{dx} + 2\mathfrak{J} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

$$+ \mathfrak{K} \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + 2\mathfrak{L} \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} \cdot \delta z + 2\mathfrak{M} \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta z + 2\mathfrak{N} \cdot \delta y \cdot \delta z$$

$$+ 2\mathfrak{P} \cdot \frac{d\delta z}{dx} \cdot \delta z + \mathfrak{Q} \cdot \delta z^2 \Big] \cdot dx = \Big(\eta \cdot \delta y^2 + 2\zeta \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \lambda \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

$$+ 2\mu \cdot \delta y \cdot \delta z + 2\xi \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta z + \omega \cdot \delta z^2\Big)_x - \Big(\eta \cdot \delta y^2 + 2\zeta \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \lambda \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

$$+ 2\mu \cdot \delta y \cdot \delta z + 2\xi \cdot \frac{d\delta z}{dx} \cdot \delta z + \omega \cdot \delta z^2\Big)_a + \int_a^x \Big[A \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 + 2B \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$+ C \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 2D \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} \cdot \delta y + 2E \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta y + F \cdot \delta y^2 + 2G \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} \cdot \frac{d\delta z}{dx}$$

$$+ 2H \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \frac{d\delta z}{dx} + 2J \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta z}{dx} + K \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + 2L \cdot \frac{d^2\delta y}{dx^2} \cdot \delta z + 2M \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta z$$

$$+ 2N \cdot \delta y \cdot \delta z + 2P \cdot \frac{d\delta z}{dx} \cdot \delta z + Q \cdot \delta z^2 \Big] \cdot dx$$

Nun differentiire man auf beiden Seiten, und bringe Alles auf eine Seite des Gleichheitszeichens; so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$A = \mathfrak{A} = \frac{d_q^2 V}{dq^2},\quad B = \mathfrak{B} - \lambda,\quad C = \mathfrak{C} - 2\zeta - \frac{d\lambda}{dx},$$

$$D = \mathfrak{D} - \zeta,\quad E = \mathfrak{E} - \eta - \frac{d\zeta}{dx},\quad F = \mathfrak{F} - \frac{d\eta}{dx},$$

$$G = \mathfrak{G} = \frac{d_q d_{\mathfrak{p}} V}{dq.d\mathfrak{p}},\quad H = \mathfrak{H} - \xi,\quad J = \mathfrak{J} - \mu,$$

$$K = \mathfrak{K} = \frac{d_{\mathfrak{p}}^2 V}{d\mathfrak{p}^2},\quad L = \mathfrak{L} - \xi,\quad M = \mathfrak{M} - \frac{d\xi}{dx} - \mu,$$

$$N = \mathfrak{N} - \frac{d\mu}{dx},\quad P = \mathfrak{P} - \omega,\quad Q = \mathfrak{Q} - \frac{d\omega}{dx}$$

Man erkennt also, dass die drei Ausdrücke A, G, K vollkommen bestimmt sind, dagegen zur Bestimmung der übrigen zwölf Ausdrücke B, C, D, E, F, H, J, L, M, N, P, Q noch nöthig wäre, dass auch die sechs Functionen η, ζ, λ, μ, ξ, ω bestimmt seien. Da nun durchaus keine Bedingung existirt, welchen die Functionen η, ζ, λ, μ, ξ, ω genügen sollen; so sind sie ganz willkürliche Functionen von x. Man kann also

durch geeignete Annahme dieser willkürlichen Functionen die Ausdrücke B, C, D, E, F, H, J, L, M, N, P, Q so einrichten, dass Gleichung V übergeht in

$$\text{VI)}\quad \int_a^x \left[\mathfrak{A}\cdot\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 + 2\mathfrak{B}\cdot\frac{d^2\delta y}{dx^2}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \ldots\ldots\ldots \right.$$

$$\left. \ldots\ldots\ldots + 2\mathfrak{P}\cdot\frac{d\delta z}{dx}\cdot\delta z + \mathfrak{Q}\cdot\delta z^2\right]\cdot dx =$$

$$\left(\eta\cdot\delta y^2 + 2\zeta\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \lambda\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 2\mu\cdot\delta y\cdot\delta z + 2\xi\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot\delta z + \omega\cdot\delta z^2\right)_x$$

$$-\left(\eta\cdot\delta y^2 + 2\zeta\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \lambda\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 2\mu\cdot\delta y\cdot\delta z + 2\xi\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot\delta z + \omega\cdot\delta z^2\right)_a$$

$$+\int_a^x\left[A\cdot\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2} + g\cdot\frac{d\delta z}{dx} + g_1\cdot\frac{d\delta y}{dx} + g_2\cdot\delta y + g_3\cdot\delta z\right)^2\right.$$

$$\left. + A_1\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx} + h\cdot\frac{d\delta y}{dx} + h_1\cdot\delta y + h_2\cdot\delta z\right)^2\right]\cdot dx$$

Dazu ist aber (nach Analogie des §. 13) nöthig, dass folgende sechs Gleichungen

$$\text{VII)}\quad (AC - B^2)\cdot(AK - G^2) = (AH - BG)^2$$

$$\text{VIII)}\quad (AF - D^2)\cdot(AK - G^2) = (AJ - DG)^2$$

$$\text{IX)}\quad (AQ - L^2)\cdot(AK - G^2) = (AP - LG)^2$$

$$\text{X)}\quad (AE - BD)\cdot(AK - G^2) = (AH - BG)\cdot(AJ - DG)$$

$$\text{XI)}\quad (AM - BL)\cdot(AK - G^2) = (AH - BG)\cdot(AP - GL)$$

$$\text{XII)}\quad (AN - DL)\cdot(AK - G^2) = (AJ - DG)\cdot(AP - GL)$$

stattfinden. Wenn man hierin die kurz vorher für A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, L, M, N, P, Q hingestellten Ausdrücke substituirt; so bekommt man sechs Differentialgleichungen der ersten Ordnung, durch deren Integration sich η, ζ, λ, μ, ξ, ω als Functionen von x mit sechs willkürlichen Constanten bestimmen lassen. Die Gleichung VI, welche, indem sie von $x = a$ bis zu jedem beliebigen Werthe des x erstreckt wird, giltig ist, ist auch giltig, wenn sie von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckt wird; und man hat daher auch

$$\text{XIII)}\quad \delta^2 U =$$

$$\left(\eta\cdot\delta y^2 + 2\zeta\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \lambda\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 2\mu\cdot\delta y\cdot\delta z + 2\xi\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot\delta z + \omega\cdot\delta z^2\right)_\alpha$$

$$-\left(\eta\cdot\delta y^2 + 2\zeta\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \lambda\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 2\mu\cdot\delta y\cdot\delta z + 2\xi\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot\delta z + \omega\cdot\delta z^2\right)_a$$

$$+\int_a^\alpha\left[A\cdot\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2} + g\cdot\frac{d\delta z}{dx} + g_1\cdot\frac{d\delta y}{dx} + g_2\cdot\delta y + g_3\cdot\delta z\right)^2\right.$$

$$\left. + A_1\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx} + h\cdot\frac{d\delta y}{dx} + h_1\cdot\delta y + h_2\cdot\delta z\right)^2\right]\cdot dx$$

Vergleicht man Gleichung XIII mit IV, so erkennt man, dass die Veränderlichkeit des $\delta^2 U$ ganz unabhängig ist von der Veränderlichkeit der in η, ζ, λ, μ, ξ, ω, g, g_1, g_2, g_3, h, h_1, h_2 enthaltenen sechs willkürlichen Constanten. Man kann also auf zweierlei Weise den Zeichenstand des $\delta^2 U$ kennen lernen.

1) Man richte diese sechs willkürlichen Constanten so ein, dass die Gleichung

$$\text{XIV)}\quad \left(\eta\cdot\delta y^2 + 2\zeta\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \lambda\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 2\mu\cdot\delta y\cdot\delta z + 2\xi\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot\delta z + \omega\cdot\delta z^2\right)_\alpha -$$

$$- \left(\eta \cdot \delta y^2 + 2\zeta \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \lambda \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx} \right)^2 + 2\mu \cdot \delta y \cdot \delta z + 2\xi \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta z + \omega \cdot \delta z^2 \right)_a = 0$$

stattfindet. Debei nimmt Gleichung XIII folgende Form an:

$$\text{XV)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left[A \cdot \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2} + g \cdot \frac{d\delta z}{dx} + g_1 \cdot \frac{d\delta y}{dx} + g_2 \cdot \delta y + g_3 \cdot \delta z \right)^2 \right.$$

$$\left. + A_1 \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx} + h \cdot \frac{d\delta y}{dx} + h_1 \cdot \delta y + h_2 \cdot \delta z \right)^2 \right] \cdot dx$$

Wenn nun bei allen von a bis α möglichen Werthen des x die beiden Ausdrücke A und A_1 gleichzeitig positiv oder negativ bleiben, so ist auch $\delta^2 U$ bezüglich positiv oder negativ; und da $A_1 = \frac{1}{A} \cdot (AK - G^2)$, so hat man

$$A = \frac{d_q^2 V}{dq^2}$$

$$A_1 = \frac{1}{\left(\frac{d_q^2 V}{dq^2} \right)} \cdot \left[\frac{d_q^2 V}{dq^2} \times \frac{d_\mathfrak{p}^2 V}{d\mathfrak{p}^2} - \left(\frac{d_q d_\mathfrak{p} V}{dq.d\mathfrak{p}} \right)^2 \right]$$

woran man erkennt, dass $\delta^2 U$ negativ oder positiv ist, wenn bei allen von a bis α möglichen Werthen des x die beiden Quotienten $\frac{d_\mathfrak{p}^2 V}{dq^2}$ und $\frac{d_\mathfrak{p}^2 V}{d\mathfrak{p}^2}$ gleichzeitig negativ oder positiv bleiben, und bei allen diesen Werthen des x der Ausdruck

$$\frac{d_q^2 V}{dq^2} \times \frac{d_\mathfrak{p}^2 V}{d\mathfrak{p}^2} - \left(\frac{d_q d_\mathfrak{p} V}{dq.d\mathfrak{p}} \right)^2$$

positiv bleibt.

2) Wenn aber die Gleichung XIV einen Widerspruch in sich selbst enthält, so richte man die in η, ζ, λ, μ, ξ, ω, g, g_1, g_2, g_3, h, h_1, h_2 enthaltenen sechs willkürlichen Constanten so ein, dass die Differenz

$$\text{XVI)} \quad \left(\eta \cdot \delta y^2 + 2\zeta \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \lambda \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx} \right)^2 + 2\mu \cdot \delta y \cdot \delta z + 2\xi \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta z + \omega \cdot \delta z^2 \right)_\alpha$$

$$- \left(\eta \cdot \delta y^2 + 2\zeta \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \lambda \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx} \right)^2 + 2\mu \cdot \delta y \cdot \delta z + 2\xi \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \delta z + \omega \cdot \delta z^2 \right)_a$$

dasselbe Vorzeichen bekommt, welches die beiden Quotienten $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$ und $\frac{d_\mathfrak{p}^2 V}{d\mathfrak{p}^2}$ bei allen von a bis α möglichen Werthen des x behalten, während bei allen diesen Werthen des x der Ausdruck

$$\frac{d_q^2 V}{dq^2} \times \frac{d_\mathfrak{p}^2 V}{d\mathfrak{p}^2} - \left(\frac{d_q d_\mathfrak{p} V}{dq.d\mathfrak{p}} \right)^2$$

positiv bleiben muss. Wenn aber nicht bei allen von a bis α möglichen Werthen des x die beiden Quotienten $\frac{d_q^2 V}{dq^2}$ und $\frac{d_\mathfrak{p}^2 V}{d\mathfrak{p}^2}$ einerlei Zeichen behalten, oder bei allen diesen Werthen des x der Ausdruck

$$\frac{d_q^2 V}{dq^2} \times \frac{d_\mathfrak{p}^2 V}{d\mathfrak{p}^2} - \left(\frac{d_q d_\mathfrak{p} V}{dq.d\mathfrak{p}} \right)^2$$

nicht immer positiv bleibt; dann bedarf es noch eines besonderen Nachweises, dass weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfindet.

Werden aber bei jedem von a bis α möglichen Werthe des x die fünf Quotienten $\frac{d_q^2V}{dq^2}$, $\frac{d_q d_p V}{dq.dp}$, $\frac{d_q d_y V}{dq.dy}$, $\frac{d_q d_{\mathfrak{p}} V}{dp.d\mathfrak{p}}$, $\frac{d_q d_z V}{dq.dz}$ gleichzeitig zu Null, dann findet ein Maximum-stand oder Minimum-stand statt, wenn bei allen diesen Werthen des x die Quotienten $\frac{d_p^2V}{dp^2}$ und $\frac{d_{\mathfrak{p}}^2V}{d\mathfrak{p}^2}$ bezüglich beständig negativ oder positiv, dagegen der Ausdruck

$$\frac{d_p^2V}{dp^2} \times \frac{d_{\mathfrak{p}}^2V}{d\mathfrak{p}^2} - \left(\frac{d_p d_{\mathfrak{p}} V}{dp \cdot d\mathfrak{p}}\right)^2$$

immer positiv bleibt.

Und so fort.

Dass keiner von allen den Quotienten $\frac{d_q^2V}{dq^2}$, $\frac{d_q d_p V}{dq.dp}$, etc. etc. bei irgend einem der von a bis α möglichen Werthe des x die Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ annehmen darf, wenn diese über den Zeichenstand des $\delta^2 U$ vorgenommene Untersuchung ihre Giltigkeit behalten soll, braucht nicht mehr erinnert zu werden.

Da die Gränzen a und α durchaus keinen Einfluss haben auf die bis jetzt gesuchten Functionen $y = \varphi'(x)$ und $z = \varphi''(x)$; so wird dabei nicht allein das zwischen den Gränzen a bis α erstreckte Integral U, sondern auch das zwischen vielen andern Gränzen, ja oft auch das zwischen allen beliebigen Gränzen erstreckte U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande. Allein eben diese Functionen $y = \varphi'(x)$ und $z = \varphi''(x)$ müssen auch jedesmal fünf Gleichungen zugleich identisch machen, eine Bedingung, die bekanntlich nicht immer erfüllt werden kann.

§. 240. Untersuchung der zweiten (in III aufgestellten) Form des δU. An dieser Form erkennt man, dass es auch zwei von den Gränzen a und α abhängige Functionen $y = \varphi'(x)$ und $z = \varphi''(x)$ gibt, welche nur zwei Gleichungen identisch machen müssen, dagegen aber auch nur das zwischen den Gränzen a bis α erstreckte Integral U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande machen können, während dabei das zwischen irgend zwei andern Gränzen erstreckte U weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand ist. Die Aufgabe, wo zwei von den Gränzen a und α abhängige Functionen $y = \varphi'(x)$ und $z = \varphi''(x)$ gesucht werden, ist aber diejenige, welche in der Anwendung am häufigsten vorkommt, und jedesmal möglich ist.

A) Man zerlege die Gleichung III zunächst in folgende drei:

$$\text{XVII)} \quad \frac{d_yV}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_pV}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\frac{d_qV}{dq}\right) = 0$$

$$\text{XVIII)} \quad \frac{d_zV}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_{\mathfrak{p}}V}{d\mathfrak{p}}\right) = 0$$

$$\text{XIX)} \quad \left(\frac{d_pV}{dp} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(\frac{d_qV}{dq}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha + \left(\frac{d_{\mathfrak{p}}V}{d\mathfrak{p}}\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha$$
$$- \left(\frac{d_pV}{dp} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_qV}{dq}\right)\right)_a \cdot \delta y_a - \left(\frac{d_qV}{dq}\right)_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a - \left(\frac{d_{\mathfrak{p}}V}{d\mathfrak{p}}\right)_a \cdot \delta z_a = 0$$

Die beiden ersten Gleichungen werden Hauptgleichungen und die dritte wird Gränzengleichung genannt. Die Hauptgleichungen sind identische Gleichungen, und geben durch Integration die gesuchten Functionen $y = \varphi'(x)$ und $z = \varphi''(x)$. Die Gränzengleichung ist keine identische Gleichung, und gilt nur bei den Werthen $x = a$ und $x = \alpha$. Diese Gränzengleichung muss bei Bestimmung der in den gesuchten Functionen eingegangenen

Constanten mitbenützt werden. Die Zerfällung der Gränzengleichung wird aber verschieden ausfallen, je nachdem die Elemente δy_α, δy_a, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$, δz_a, δz_α alle unabhängig voneinander sind, oder eine gewisse Abhängigkeit zwischen ihnen stattfindet. Man setze noch zur Abkürzung $Y = \frac{d_pV}{dp} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_qV}{dq}\right)$, $Y' = \frac{d_qV}{dq}$, $Z = \frac{d_{\mathfrak{p}}V}{d\mathfrak{p}}$; so kann man den für δ^2U sich ergebenden Ausdruck auf folgende Form bringen:

$$\text{XX)}\quad \delta^2U = \left(Y\cdot\delta^2y + Y'\cdot\frac{d\delta^2y}{dx} + Z\cdot\delta^2z + \eta\cdot\delta y^2\right.$$

$$\left. + 2\zeta\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \lambda\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + 2\mu\cdot\delta y\cdot\delta z + 2\xi\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot\delta z + \omega\cdot\delta z^2\right)_\alpha$$

$$-\left(Y\cdot\delta^2y + Y'\cdot\frac{d\delta^2y}{dx} + Z\cdot\delta^2z + \eta\cdot\delta y^2 + 2\zeta\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx}\right.$$

$$\left. + \lambda\cdot\left(\frac{d\delta y}{dy}\right)^2 + 2\mu\cdot\delta y\cdot\delta z + 2\xi\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot\delta z + \omega\cdot\delta z^2\right)_a$$

$$+\int_a^\alpha\left[A\cdot\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2} + g\cdot\frac{d\delta z}{dx} + g_1\cdot\frac{d\delta y}{dx} + g_2\cdot\delta y + g_3\cdot\delta z\right)^2\right.$$

$$\left. + A_1\left(\frac{d\delta z}{dx} + h\cdot\frac{d\delta y}{dx} + h_1\cdot\delta y + h_2\cdot\delta z\right)^2\right]\cdot dx$$

Da der Werth des δ^3U ganz unabhängig ist von dem Werthe der in η, ζ, λ, μ, ξ, ω eingegangenen sechs willkürlichen Constanten; so erkennt man, dass der Zeichenstand des δ^2U ebenso an den Quotienten $\frac{d_q^2V}{dq^2}$, $\frac{d_{\mathfrak{p}}^2V}{d\mathfrak{p}^2}$, $\frac{d_qd_{\mathfrak{p}}V}{dq.d\mathfrak{p}}$ ermittelt werden kann, wie dieses (im vorigen §.) schon näher auseinandergesetzt ist.

Zum Ueberflusse soll auch hier noch einmal strenge darauf aufmerksam gemacht werden, dass die hier gesuchten und von den Gränzen a und α abhängigen Functionen $y = \varphi'(x)$ und $z = \varphi''(x)$ nur das zwischen den Gränzen $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckte Integral U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande machen, eben weil auch nur das zwischen den nemlichen Gränzen erstreckte δU zu Null wird.

B) Hat man die bis jetzt (in diesem §.) gegebene Untersuchung ausgeführt, so kehre man abermals zu Gleichung III zurück, und schaue, ob man nicht den zu δy und δz gehörigen Factoren solche Bedeutung beilegen kann, dass entweder eines, oder zwei, oder gar alle drei der folgenden Systeme zweier Gleichungen

$$\text{XXI)}\quad \begin{cases} \frac{d_yV}{dy} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_pV}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2}\cdot d^2\left(\frac{d_qV}{dq}\right) = 0 \\ \text{und} \\ \frac{d_zV}{dz} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_{\mathfrak{p}}V}{d\mathfrak{p}}\right) = \frac{\mathfrak{B}}{0} \end{cases}$$

oder

$$\text{XXII)}\quad \begin{cases} \frac{d_yV}{dy} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_pV}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2}\cdot d^2\left(\frac{d_qV}{dq}\right) = \frac{\mathfrak{A}}{0} \\ \text{und} \\ \frac{d_zV}{dz} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_{\mathfrak{p}}V}{d\mathfrak{p}}\right) = 0 \end{cases}$$

oder

oder

$$\text{XXIII)} \begin{cases} \dfrac{d_y V}{dy} - \dfrac{1}{dx} \cdot d\left(\dfrac{d_p V}{dp}\right) + \dfrac{1}{dx^2} \cdot d^2\left(\dfrac{d_q V}{dq}\right) = \dfrac{\mathfrak{A}}{0} \\ \text{und} \\ \dfrac{d_z V}{dz} - \dfrac{1}{dx} \cdot d\left(\dfrac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right) = \dfrac{\mathfrak{B}}{0} \end{cases}$$

stattfinden; etc. etc.

§. 241. Nun wird man auch den im Anfange dieser Untersuchung gestellten allgemeinen Fall zu behandeln verstehen, wo nemlich V ein mit den Elementen x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ $\frac{d^my}{dx^m}$, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ $\frac{d^nz}{dx^n}$ gebildeter reeller Ausdruck ist, und man für die unter sich ganz unabhängigen Elemente y und z solche reelle Functionen des nichtmutablen Veränderlichen x sucht, dass dabei das zwischen den Gränzen von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckte Integral $U = \int_a^\alpha V \cdot dx$ ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Ob das δ^2U positiv oder negativ sei, darüber wird die Untersuchung gerade so geführt, wie beim vorigen einfacheren Falle. Man setze zur Abkürzung $\frac{d^my}{dx^m} = r$ und $\frac{d^nz}{dx^n} = \mathfrak{r}$, so wird man zu dem Satze gelangen, dass δ^2U positiv oder negativ ist, wenn bei allen von a bis α möglichen Werthen des x die beiden Quotienten $\frac{d_r^2V}{dr^2}$ und $\frac{d_\mathfrak{r}^2V}{d\mathfrak{r}^2}$ gleichzeitig positiv oder negativ bleiben, während bei allen diesen Werthen des x der Ausdruck $\frac{d_r^2V}{dr^2} \times \frac{d_\mathfrak{r}^2V}{d\mathfrak{r}^2} - \left(\frac{d_r d_\mathfrak{r} V}{dr.d\mathfrak{r}}\right)^2$ positiv bleibt. Ob aber, wenn eine dieser Bedingungen nicht erfüllt wird, dieses eine Anzeige sei, dass weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfinde; dieses muss noch jedesmal besonders nachgewiesen werden.

Es ist beachtenswerth, dass die Bedingungen, unter denen δ^2U positiv oder negativ ist, genau mit den Bedingungen zusammenfallen, unter denen der Ausdruck

$$\frac{d_r^2V}{dr^2} \cdot \left(\frac{d^m\delta y}{dx^m}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_r d_\mathfrak{r} V}{dr.d\mathfrak{r}} \cdot \frac{d^m\delta y}{dx^m} \cdot \frac{d^n\delta z}{dx^n} + \frac{d_\mathfrak{r}^2V}{d\mathfrak{r}^2} \cdot \left(\frac{d^n\delta z}{dx^n}\right)^2$$

bei jedem von a bis α möglichen Werthe des x positiv oder negativ ist.

Wenn $\frac{d_r^2V}{dr^2}$ und alle andern nach r genommenen Differentialquotienten bei jedem von a bis α möglichen Werthe des x zu Null werden, so geht man systematisch zu den nächstfolgenden Differentialquotienten, und wird dann für diesen Ausnahmsfall nach dem Vorgange des vorvorigen §. die Bedingungen leicht auffinden, unter denen δ^2U positiv oder negativ ist.

Und so fort.

Untersuchung 58.

Es sei V ein reeller mit den Elementen x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ $\frac{d^my}{dx^m}$, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ $\frac{d^nz}{dx^n}$, v, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{d^2v}{dx^2}$ $\frac{d^sv}{dx^s}$ gebildeter Ausdruck, wo die Elemente y, z, v ganz unabhängig untereinander sind; und man sucht für y, z und v solche reelle Functionen des nichtmutablen Veränderlichen x, dass dabei das zwischen den Gränzen von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckte Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 242. Nach allem Vorhergehenden ist es nun nicht mehr nöthig, die Untersuchung vom Anfange bis zum Ende durchzuführen; und nur der über den Zeichenstand des $\delta^2 U$ geltende Lehrsatz mag hier noch aufgestellt werden. Man setze zur Abkürzung $\frac{d^m y}{dx^m} = r$, $\frac{d^n z}{dx^n} = \mathfrak{r}$, und $\frac{d^s v}{dx^s} = \varrho$, so gelangt man zu dem Resultate, dass $\delta^2 U$ positiv oder negativ ist, wenn folgender Ausdruck

$$\frac{d_r^2 V}{dr^2} \cdot \left(\frac{d^m \delta y}{dx^m}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d_r d_{\mathfrak{r}} V}{dr . d\mathfrak{r}} \cdot \frac{d^m \delta y}{dx^m} \cdot \frac{d^n \delta z}{dx^n} + \frac{d_{\mathfrak{r}}^2 V}{d\mathfrak{r}^2} \cdot \left(\frac{d^n \delta z}{dx^n}\right)^2$$

$$+ 2 \cdot \frac{d_r d_\varrho V}{dr \cdot d\varrho} \cdot \frac{d^m \delta y}{dx^m} \cdot \frac{d^s \delta v}{dx^s} + 2 \cdot \frac{d_{\mathfrak{r}} d_\varrho V}{d\mathfrak{r} \cdot d\varrho} \cdot \frac{d^n \delta z}{dx^n} \cdot \frac{d^s \delta v}{dx^s} + \frac{d_\varrho^2 V}{d\varrho^2} \cdot \left(\frac{d^s \delta v}{dx^s}\right)^2$$

bei jedem von a bis α liegenden Werthe des x beständig positiv oder negativ bleibt.

Und so fort.

Zusammengesetztere Fälle brauchen jetzt nicht mehr vorgenommen zu werden; und es sei nur noch bemerkt, dass der in diesem §. mitgetheilte schöne Lehrsatz in folgender Schrift „Lehre des Grössten und Kleinsten von Martin Ohm. Berlin 1825" auf Seite 293 zuerst ausgesprochen zu sein scheint.

In §. 259—264 habe ich diese Untersuchung auf solche Fälle ausgedehnt, wo auch die Gränzen Werthänderungen erleiden; und in den Aufgaben 248—283 habe ich sie auch auf doppelte Integrale ausgedehnt.

Untersuchung 59.

Es sei V ein reeller mit den Elementen x, y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ gebildeter Ausdruck; und man sucht für y und z solche reelle Functionen des nichtmutablen Veränderlichen x, dass dabei das zwischen den Gränzen von x = a bis x = α erstreckte Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während eben diese für y und z gesuchten Functionen solche zusammengehörige sein müssen, dass dabei noch einer Urgleichung

$$\text{II)}\quad F(x, y, z) = 0$$

identisch genügt wird.

Erste Auflösung.

§. 243. Man nehme z als das mittelbar mutable Element, und sondere es aus II ab, so dass man z = $\chi(x, y)$ bekommt. Daraus folgt $\frac{dz}{dx} = \frac{d_x \chi}{dx} + \frac{d_y \chi}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$. Nun eliminire man z und $\frac{dz}{dx}$ aus I, so wird V ein nur aus den Elementen x, y, $\frac{dy}{dx}$ zusammengesetzter Ausdruck, welcher mit W bezeichnet sein mag. Gleichung I geht also über in

$$\text{III)}\quad U = \int_a^\alpha W \cdot dx$$

Daraus folgt

$$\text{IV)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y W}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_p W}{dp}\cdot\frac{d\delta y}{dx}\right)\cdot dx$$

$$\text{V)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y W}{dy}\cdot\delta^2 y + \frac{d_p W}{dp}\cdot\frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{d_y^2 W}{dy^2}\cdot\delta y^2 + 2\cdot\frac{d_y d_p W}{dy.dp}\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2 W}{dp^2}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)\cdot dx$$

Wenn man diese beiden Ausdrücke umformt, so gibt sich bezüglich

$$\text{VI)}\quad \delta U = \left(\frac{d_p W}{dp}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{d_p W}{dp}\right)_a\cdot\delta y_a + \int_a^\alpha\left(\frac{d_y W}{dy} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_p W}{dp}\right)\right)\cdot dy\cdot dx$$

$$\text{VII)}\quad \delta^2 U = \left(\frac{d_p W}{dp}\right)_\alpha\cdot\delta^2 y_\alpha - \left(\frac{d_p W}{dp}\right)_a\cdot\delta^2 y_a + \int_a^\alpha\left[\left(\frac{d_y W}{dy} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_p W}{dp}\right)\right)\cdot\delta^2 y + \frac{d_y^2 W}{dy^2}\cdot\delta y^2 + 2\cdot\frac{d_y d_p W}{dy.dp}\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2 W}{dp^2}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right]\cdot dx$$

An den vier letzten Gleichungen erkennt man, dass die hiesige Untersuchung jetzt auf die zweiundfünfzigste zurückgeführt ist.

§. 244. Untersuchung der ersten (in IV aufgestellten) Form des δU. Hier hat man (nach §. 230) zu untersuchen, welches von folgenden Systemen zweier Gleichungen

$$1)\quad \frac{d_y W}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_p W}{dp} = 0$$

$$2)\quad \frac{d_y W}{dy} = 0 \text{ und } \frac{d_p W}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

$$3)\quad \frac{d_y W}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_p W}{dp} = 0$$

$$4)\quad \frac{d_y W}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0} \text{ und } \frac{d_p W}{dp} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$$

stattfindet. Man hat also eine solche Function y von x zu suchen, welche zweien Gleichungen zugleich genügt; und wenn man hierauf diese Function y in II einsetzt, so gibt sich die für z gesuchte Function von x. Man erkennt aber, dass hier die Gränzen a und α, welche sie auch immer sein mögen, keinen Einfluss auf die für y und z gesuchten Functionen haben; und desshalb kann es der Fall sein, dass diese Functionen nicht allein das zwischen den Gränzen von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckte Integral U, sondern auch das zwischen vielen andern Gränzen, ja oft auch das zwischen allen beliebigen Gränzen erstreckte U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande machen.

§. 245. Untersuchung der zweiten (in VI aufgestellten) Form des δU. Man zerlege Gleichung VI zuerst in die Hauptgleichung

$$\text{VIII)}\quad \frac{d_y W}{dy} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_p W}{dp}\right) = 0$$

und in die Gränzengleichung

$$\left(\frac{d_p W}{dp}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{d_p W}{dp}\right)_a\cdot\delta y_a = 0$$

Durch Integration der Gleichung VIII ergibt sich für y eine Function von x mit zwei

willkürlichen Constanten, bei deren Bestimmung die grade hier aufgestellte Gränzengleichung mitbenützt werden muss.

Wenn man die für y gefundene Function entweder schon vor oder erst nach Bestimmung der beiden willkürlichen Constanten in Gleichung II einführt, so bekommt man auch für z die entsprechende Function von x.

Dass aber nur zwei Constanten vorkommen, ist ein beachtenswerther Umstand; denn wäre die Bedingungsgleichung II nicht vorhanden, d. h. wäre nur Gleichung I gegeben; so könnten sogar vier willkürliche Constanten vorkommen, wie dieses in den Aufgaben 175 und 181 der Fall ist.

Wegen Gleichung VIII reducirt sich Gleichung VII auf

$$\text{IX)}\quad \delta^2 U = \left(\frac{d_p W}{dp}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(\frac{d_p W}{dp}\right)_a \cdot \delta^2 y_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left(\frac{d_y^2 W}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_p W}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2 W}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx$$

Man beachte aber, dass die hier gesuchten und von den Gränzen a und α abhängigen Functionen y und z nur das von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckte U zu einem Maximumstande oder Minimum-stande machen, eben weil nur das zwischen den nemlichen Gränzen erstreckte δU zu Null wird.

Hat man diese Untersuchung ausgeführt, so schaue man auf Gleichung VI zurück, und sehe zu, ob man dem zu δy gehörigen Factor

$$\frac{d_y W}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p W}{dp}\right)$$

die Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ beilegen kann, etc. etc.

Zweite Auflösung.

§. 246. Man mutire zuerst, und eliminire hierauf die mittelbaren Mutationscoefficienten auf directem Wege. Aus II folgt

$$\text{X)}\quad \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_z F}{dz} \cdot \delta z = 0$$

$$\text{XI)}\quad \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_z F}{dz} \cdot \delta^2 z + \frac{d_y^2 F}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_z F}{dy.dz} \cdot \delta y \cdot \delta z + \frac{d_z^2 F}{dz^2} \cdot \delta z^2 = 0$$

etc. etc.

Man sondere δz und $\delta^2 z$ aus diesen beiden Gleichungen ab, so werden sich Ausdrücke von folgenden Formen ergeben:

$$\text{XII)}\quad \delta z = Q \cdot \delta y$$

$$\text{XIII)}\quad \delta^2 z = Q \cdot \delta^2 y + R \cdot \delta y^2$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\text{XIV)}\quad \frac{d\delta z}{dx} = \frac{1}{dx} \cdot d(Q \cdot \delta y)$$

$$\text{XV)}\quad \frac{d\delta^2 z}{dx} = \frac{1}{dx} \cdot d(Q \cdot \delta^2 y) + \frac{1}{dx} \cdot d(R \cdot \delta y^2)$$

Q und R werden als Functionen von x und y gedacht, dagegen δy und $\delta^2 y$ sind nur Functionen von x. Führt man nun die in den beiden letzten Gleichungen angezeigten Differentiationen aus, so gibt sich

$$\text{XVI)}\quad \frac{d\delta z}{dx} = \frac{dQ}{dx} \cdot \delta y + Q \cdot \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\text{XVII)}\quad \frac{d\delta^2 z}{dx} = \frac{dQ}{dx}\cdot\delta^2 y + Q\cdot\frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{dR}{dx}\cdot\delta y^2 + 2R\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx}$$

Mutirt man auch Gleichung I, so bekommt man

$$\text{XVIII)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_p V}{dp}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_z V}{dz}\cdot\delta z + \frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right)\cdot dx$$

$$\text{XIX)}\quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left[\frac{d_y V}{dy}\cdot\delta^2 y + \frac{d_p V}{dp}\cdot\frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{d_z V}{dz}\cdot\delta^2 z + \frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\cdot\frac{d\delta^2 z}{dx}\right.$$
$$\left. + \frac{d_y^2 V}{dy^2}\cdot\delta y^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d_\mathfrak{p}^2 V}{d\mathfrak{p}^2}\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right]\cdot dx$$

Will man den Gleichungen XVIII und XIX die Formen IV und V geben, so hat man die mittelbaren Elemente δz, $\frac{d\delta z}{dx}$, $\delta^2 z$, $\frac{d\delta^2 z}{dx}$ zu eliminiren, was mittelst der Gleichungen XII, XIII, XVI, XVII geschieht. Hierauf hat man den für δU hergestellten Ausdruck so zu zerlegen, wie schon (§. 244) auseinandergesetzt ist.

Will man den Gleichungen XVIII und XIX die Formen VI und VII geben, so kann man entweder zuerst die mittelbaren Mutationen eliminiren, und dann umformen, oder man kann zuerst umformen und dann die mittelbaren Mutationen eliminiren.

§. 247. Erstens. Man eliminire δz und $\frac{d\delta z}{dx}$ schon vor dem Umformen, was mittelst der Gleichungen XII und XIV geschieht. Dabei geht XVIII zunächst über in

$$\delta U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy}\cdot\delta y + \frac{d_p V}{dp}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_z V}{dz}\cdot Q\cdot\delta y + \frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\cdot\frac{1}{dx}\cdot d(Q\cdot\delta y)\right)\cdot dx$$

Durch die gewöhnliche Umformung folgt daraus

$$\text{XX)}\quad \delta U = \left(\frac{d_p V}{dp} + Q\cdot\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp} + Q\cdot\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)_a\cdot\delta y_a$$
$$+\int_a^\alpha \left[\frac{d_y V}{dy} + \frac{d_z V}{dz}\cdot Q - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right) - Q\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)\right]\cdot\delta y\cdot dx$$

Daraus folgt die Hauptgleichung

$$\frac{d_y V}{dy} + \frac{d_z V}{dz}\cdot Q - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right) - Q\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right) = 0$$

durch deren Integration zwei Constanten eingehen.

Ferner hat man die Gränzengleichung

$$\left(\frac{d_p V}{dp} + Q\cdot\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp} + Q\cdot\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)_a\cdot\delta y_a = 0$$

welche bei Bestimmung der zwei Constanten noch mitbenützt werden muss. Dass man aber hier nur zwei und nicht vier willkürliche Constanten hat, darauf ist schon (in §. 245) aufmerksam gemacht worden.

Um den Ausdruck für $\delta^2 U$ herzustellen, eliminire man zunächst $\delta^2 z$ und $\frac{d\delta^2 z}{dx}$ aus XIX, was mittelst Gleichung XIII und XV geschieht. Dann forme man um, und beachte die Hauptgleichung; so bekommt man

$$\text{XXI)}\quad \delta^2 U = \left(\frac{d_p V}{dp} + Q\cdot\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)_\alpha\cdot\delta^2 y_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp} + Q\cdot\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)_a\cdot\delta^2 y_a +$$

$$+\int_a^\alpha \left[R \cdot \frac{d_z V}{dz} \cdot \delta y^2 + \frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d(R \cdot \delta y^2) \right.$$

$$\left. + \frac{d_y^2 V}{dy^2} \cdot \delta y^2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{d_\mathfrak{p}^2 V}{d\mathfrak{p}^2} \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 \right] \cdot dx$$

Aus dieser Gleichung hat man noch die unter dem Integralzeichen stehenden Elemente δz und $\frac{d\delta z}{dx}$ zu eliminiren, was mittelst der Gleichungen XII und XVI geschieht.

Hat man diese Untersuchung ausgeführt, so schaue man auf Gleichung XX zurück, und sehe zu, ob man dem zu δy gehörigen Factor

$$\frac{d_y V}{dy} + \frac{d_z V}{dz} \cdot Q - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right) - Q \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)$$

die Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ beilegen kann, etc.

§. 248. Zweitens. Man forme die Gleichungen XVIII und XIX zuerst um, und eliminire dann die mittelbaren Mutationen. Aus XVIII folgt

$$\text{XXII)}\quad \delta U = \left(\frac{d_p V}{dp} \cdot \delta y + \frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} \cdot \delta z\right)_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp} \cdot \delta y + \frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} \cdot \delta z\right)_a$$

$$+\int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_y V}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right)\right) \cdot \delta y + \left(\frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dx$$

Aus XIX aber folgt

$$\text{XXIII)}\quad \delta^2 U = \left(\frac{d_p V}{dp} \cdot \delta^2 y + \frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} \cdot \delta^2 z\right)_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp} \cdot \delta^2 y + \frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} \cdot \delta^2 z\right)_a$$

$$+\int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_y V}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right)\right) \cdot \delta^2 y + \left(\frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)\right) \cdot \delta^2 z\right.$$

$$\left. + \frac{d_y^2 V}{dy^2} \cdot \delta y^2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{d_\mathfrak{p}^2 V}{d\mathfrak{p}^2} \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

Eliminirt man δz aus XXII, so gibt sich

$$\text{XXIV)}\quad \delta U = \left(\frac{d_p V}{dp} + Q \cdot \frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp} + Q \cdot \frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)_a \cdot \delta y_a$$

$$+\int_a^\alpha \left[\frac{d_y V}{dy} + Q \cdot \frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right) - Q \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)\right] \cdot \delta y \cdot dx$$

Dieses ist aber genau wieder Gleichung XX, und wird auf dieselbe Weise zerlegt. Eliminirt man jetzt vorläufig $\delta^2 z$ aus XXIII, und beachtet man die Hauptgleichung; so bekommt man

$$\text{XXV)}\quad \delta^2 U = \left(\frac{d_p V}{dp} + Q \cdot \frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha + \left(R \cdot \frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha^2$$

$$- \left(\frac{d_p V}{dp} + Q \cdot \frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)_a \cdot \delta^2 y_a - \left(R \cdot \frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)_a \cdot \delta y_a^2$$

$$+\int_a^\alpha \left[R \cdot \frac{d_z V}{dz} \cdot \delta y^2 - R \cdot \delta y^2 \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{d_y^2 V}{dy^2} \cdot \delta y^2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{d_\mathfrak{p}^2 V}{d\mathfrak{p}^2} \cdot \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

Vergleicht man nun den hier stehenden Ausdruck mit IX und mit XXI, so sieht man, dass in diesen beiden ausserhalb des Integralzeichens das mit den zweiten Potenzen δy_α^2 und δy_a^2 versehene Aggregat

$$\text{XXVI)}\quad \left(R \cdot \frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha^2 - \left(R \cdot \frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)_a \cdot \delta y_a^2$$

fehlt; und es fragt sich, ob in IX und in XXI oder ob in XXV die richtige Form stehe. Diese Frage beantwortet sich aber auf folgende Weise: Bei der ersten Auflösung hatte man den zu mutirenden Ausdruck so eingerichtet, dass er keine mittelbar mutablen Elemente mehr enthielt; man hatte also auch nach ausgeführten Mutationen keine mittelbaren Mutationscoefficienten mehr zu eliminiren. Sonach war die erste Auflösung die einfachste und die directe, d. h. führte ganz evident zu den richtigen Formen. Desshalb hat auch Gleichung IX die richtige Form, welche dem $\delta^2 U$ zukommen muss. Man kann aber das in Gleichung XXV stehende Aggregat XXVI auf folgende Weise unter das Integralzeichen zurückbringen: Es ist

$$\left(R \cdot \frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha^2 - \left(R \cdot \frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)_a \cdot \delta y_a^2 = \int_a^\alpha \left(\frac{1}{dx} \cdot d\left(R \cdot \frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} \cdot \delta y^2\right)\right) \cdot dx$$

$$= \int_a^\alpha \left(R \cdot \delta y^2 \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right) + \frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} \cdot \frac{1}{dx} \cdot d(R \cdot \delta y^2)\right) \cdot dx$$

Indem man nun diesen letzteren Ausdruck statt des Aggregats XXVI in XXV substituirt, bekommt man wieder die Form XXI, welche mit der in IX stehenden Form des $\delta^2 U$ ganz gleichbedeutend ist (man sehe Aufgabe 186).

Hat man nun diese Untersuchung ausgeführt, so schaue man wieder auf Gleichung XXIV zurück, und sehe zu, ob man dem zu δy gehörigen Factor

$$\frac{d_y V}{dy} + Q \cdot \frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right) - Q \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)$$

die Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ beilegen kann, etc. etc.

Dritte Auflösung.

§. 249. Diese besteht darin, dass man zwar wieder zuerst mutirt, aber hierauf einen Multiplicator anwendet, um die mittelbaren Mutationen zu eliminiren.

Will man den für δU und $\delta^2 U$ herzustellenden Ausdrücken die Formen IV und V geben, so verfahre man auf folgende Weise: Aus II folgt zunächst

$$\text{XXVII)}\quad \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_z F}{dz} \cdot \delta z = 0$$

Diese Gleichung ist eine identische; also ist auch die davon abgeleitete Differentialgleichung erster Ordnung

$$\text{XXVIII)}\quad \frac{d\left(\frac{d_y F}{dy}\right)}{dx} \cdot \delta y + \frac{d\left(\frac{d_z F}{dz}\right)}{dx} \cdot \delta z + \frac{d_y F}{dy} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_z F}{dz} \cdot \frac{d\delta z}{dx} = 0$$

eine identische Gleichung. Man multiplicire XXVII mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{M}$ von x; so ist auch das sich ergebende Product noch eine identische Gleichung. Man multiplicire ebenso XXVIII mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{N}$ von x, so ist auch dieses Product noch eine identische Gleichung. Diese beiden Producte kann man also zu Gleichung XVIII unterhalb des Integralzeichens addiren, ohne dass δU sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$\text{XXIX)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_y V}{dy} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_y F}{dy} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d\left(\frac{d_y F}{dy}\right)}{dx}\right) \cdot \delta y + \left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_y F}{dy}\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{d_z V}{dz} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_z F}{dz} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d\left(\frac{d_z F}{dz}\right)}{dx}\right) \cdot \delta z + \left(\frac{d\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_z F}{dz}\right) \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right] \cdot dx$$

Um diesen Ausdruck von den mittelbaren Elementen δz und $\frac{d\delta z}{dx}$ zu befreien, denke man sich unter $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ solche Functionen von x, dass die zwei identischen Gleichungen

$$\text{XXX)}\quad \frac{d_z V}{dz} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_z F}{dz} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d\left(\frac{d_z F}{dz}\right)}{dx} = 0$$

und

$$\text{XXXI)}\quad \frac{d\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_z F}{dz} = 0$$

stattfinden. Dabei reducirt sich Gleichung XXIX auf

$$\text{XXXII)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_y V}{dy} + \mathfrak{M} \cdot \frac{d_y F}{dy} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d\left(\frac{d_y F}{dy}\right)}{dx}\right) \cdot \delta y \right.$$

$$\left. + \left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_y F}{dy}\right) \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right] \cdot dx$$

Daraus eliminire man $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, was mittelst der Gleichungen XXX und XXXI geschieht. Dann bekommt Gleichung XXXII die Form von IV, und man kann sie auf dieselbe Weise zerlegen, wie schon (in §. 244) auseinandergesetzt ist. Hat man nun die für y und z gesuchten Functionen gefunden, so führe man sie in XXX und XXXI ein, und es gibt sich, was $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ für Functionen von x sind.

Wie man nun zu verfahren hat, um für $\delta^2 U$ den entsprechenden Ausdruck herzustellen, dazu braucht es jetzt keiner Anleitung mehr.

§. 250. Will man dem für δU herzustellenden Ausdrucke die Form VI geben; so ist von den Gleichungen XXVII und XXVIII nur eine einzige nöthig. Man kann also auf zweierlei Weise zu Werke gehen.

Erstens. Man multiplicire Gleichung XXVII mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{L}$ von x; so ist auch dieses Product noch eine identische Gleichung, und man kann es zu XVIII unterhalb des Integralzeichens addiren, ohne dass δU sich im Geringsten ändert. Addirt man wirklich, und formt dann um; so bekommt man

$$\delta U = \left(\frac{d_p V}{dp} \cdot \delta y + \frac{d\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} \cdot \delta z\right)_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp} \cdot \delta y + \frac{d\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} \cdot \delta z\right)_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_y V}{dy} + \mathfrak{L} \cdot \frac{d_y F}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right)\right) \cdot \delta y\right.$$

$$\left. + \left(\frac{d_z V}{dz} + \mathfrak{L} \cdot \frac{d_z F}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dx$$

Nun soll das unter dem Integralzeichen befindliche Aggregat von dem mittelbaren δz ganz frei sein. Man denke sich daher unter $\mathfrak{L}$ eine solche Function von x, dass identisch stattfindet

$$\text{XXXIII)}\quad \frac{d_z V}{dz} + \mathfrak{L} \cdot \frac{d_z F}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right) = 0$$

Der obige für δU hergestellte Ausdruck reducirt sich also auf

$$\text{XXXIV)}\quad \delta U = \left(\frac{d_p V}{dp}\cdot\delta y + \frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}}\cdot\delta z\right)_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp}\cdot\delta y + \frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}}\cdot\delta z\right)_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy} + \mathfrak{L}\cdot\frac{d_y F}{dy} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right)\right)\cdot\delta y\cdot dx$$

Man hat jetzt die Hauptgleichung

$$\frac{d_y V}{dy} + \mathfrak{L}\cdot\frac{d_y F}{dy} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right) = 0$$

welche, wenn man das $\mathfrak{L}$ mittelst XXXIII eliminirt, übergeht in

$$\text{XXXV)}\quad \left(\frac{d_y V}{dy} - \frac{1}{dx}\cdot\left(\frac{d_p V}{dp}\right)\right)\cdot\frac{d_z F}{dz} - \left(\frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}}\right)\right)\cdot\frac{d_y F}{dy} = 0$$

und genau wieder die aus Gleichung XX entnommene Hauptgleichung ist, indem man nur dort für Q seinen wahren Ausdruck $\left(-\frac{d_y F}{dy} : \frac{d_z F}{dz}\right)$ zu setzen hat. Durch Integration dieser Gleichung XXXV gehen zwei willkürliche Constanten ein.

Als Gränzengleichung hat man zunächst

$$\left(\frac{d_p V}{dp}\cdot\delta y + \frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}}\cdot\delta z\right)_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp}\cdot\delta y + \frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}}\cdot\delta z\right)_a = 0$$

Diese geht, wenn man δz_α und δz_a mittelst X eliminirt, über in

$$\text{XXXVI)}\quad \left(\left(\frac{d_p V}{dp}\times\frac{d_z F}{dz} - \frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}}\times\frac{d_y F}{dy}\right) : \frac{d_z F}{dz}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha$$

$$- \left(\left(\frac{d_p V}{dp}\times\frac{d_z F}{dz} - \frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}}\times\frac{d_y F}{dy}\right) : \frac{d_z F}{dz}\right)_a\cdot\delta y_a = 0$$

welche bei Bestimmung der beiden durch die Integration eingegangenen Constanten benützt werden muss.

Dass man aber hier nur zwei und nicht vier willkürliche Constanten hat, ist ein Umstand, auf welchen schon in der ersten Auflösung (§. 245) und in der zweiten Auflösung (§ 247) aufmerksam gemacht worden ist.

Man multiplicire jetzt Gleichung XI mit der bereits angewendeten Function $\mathfrak{L}$ von x; so ist auch dieses Product noch eine identische Gleichung, und man kann es bei XIX unterhalb des Integralzeichens addiren, ohne dass $\delta^2 U$ sich im Geringsten ändert. Man addire wirklich, forme um, uud beachte die Hauptgleichung; so bleibt nur

$$\delta^2 U = \left(\frac{d_p V}{dp}\cdot\delta^2 y + \frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}}\cdot\delta^2 z\right)_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp}\cdot\delta^2 y + \frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}}\cdot\delta^2 z\right)_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\mathfrak{L}\cdot\frac{d_y^2 F}{dy^2}\cdot\delta y^2 + 2\mathfrak{L}\cdot\frac{d_y d_z F}{dy.dz}\cdot\delta y\cdot\delta z + \mathfrak{L}\cdot\frac{d_z^2 F}{dz^2}\cdot\delta z^2\right.$$

$$\left. + \frac{d_y^2 F}{dy^2}\cdot\delta y^2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{d_{\mathfrak{p}}^2 V}{d\mathfrak{p}^2}\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right]\cdot dx$$

Man hat jetzt noch δz, $\delta^2 z$ und $\frac{d\delta z}{dx}$ zu eliminiren; was mittelst der Gleichungen XII, XIII und XVI geschieht. Dann wird wieder das Aggregat XXVI ausserhalb des Integralzeichens erscheinen; und man kann es unter das Integralzeichen zurückführen, wie bereits in der zweiten Auflösung geschehen ist.

Hat man nun diese Untersuchung ausgeführt, so schaue man auf Gleichung XXXIV zurück, und sehe zu, ob man dem zu δy gehörigen Factor

$$\frac{d_y V}{dy} + \mathfrak{L} \cdot \frac{d_y F}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right)$$

die Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ beilegen kann. Hier muss man aber vor Allem den Multiplicator $\mathfrak{L}$ eliminiren. Erst dann kann man beurtheilen, wie es mit der hiesigen Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ steht etc. etc.

§. 251. Zweitens. Man multiplicire Gleichung XXVIII mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{K}$ von x, so ist auch dieses Product noch eine identische Gleichung, und man kann es zu XVIII unterhalb des Integralzeichens addiren, ohne dass δU sich im Geringsten ändert. Addirt man wirklich, und formt dann um; so bekommt man

$$\begin{aligned}\delta U = &\left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{K} \cdot \frac{d_y F}{dy}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{K} \cdot \frac{d_z F}{dz}\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha \\ &- \left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{K} \cdot \frac{d_y F}{dy}\right)_a \cdot \delta y_a - \left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{K} \cdot \frac{d_z F}{dz}\right)_a \cdot \delta z_a \\ &+ \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_y V}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right) - \frac{d\mathfrak{K}}{dx} \cdot \frac{d_y F}{dy}\right) \cdot \delta y \right. \\ &\left. + \left(\frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right) - \frac{d\mathfrak{K}}{dx} \cdot \frac{d_z F}{dz}\right) \cdot \delta z\right] \cdot dx\end{aligned}$$

Nun soll das unter dem Integralzeichen stehende Aggregat von dem mittelbaren δz ganz frei sein; man denke sich daher unter $\mathfrak{K}$ eine solche Function von x, dass identisch stattfindet

$$\text{XXXVII)}\quad \frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right) - \frac{d\mathfrak{K}}{dx} \cdot \frac{d_z F}{dz} = 0$$

Der zuletzt hergestellte Ausdruck reducirt sich also auf

$$\begin{aligned}\text{XXXVIII)}\quad \delta U = &\left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{K} \cdot \frac{d_y F}{dy}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{K} \cdot \frac{d_z F}{dz}\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha \\ &- \left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{K} \cdot \frac{d_y F}{dy}\right)_a \cdot \delta y_a - \left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{K} \cdot \frac{d_z F}{dz}\right)_a \cdot \delta z_a \\ &+ \int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right) - \frac{d\mathfrak{K}}{dx} \cdot \frac{d_y F}{dy}\right) \cdot \delta y \cdot dx\end{aligned}$$

Man bekommt somit die Hauptgleichung

$$\text{XXXIX)}\quad \frac{d_y V}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right) - \frac{d\mathfrak{K}}{dx} \cdot \frac{d_y F}{dy} = 0$$

und Gleichung XXXVIII reducirt sich auf

$$\begin{aligned}\text{XL)}\quad \delta U = &\left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{K} \cdot \frac{d_y F}{dy}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{K} \cdot \frac{d_z F}{dz}\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha \\ &- \left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{K} \cdot \frac{d_y F}{dy}\right)_a \cdot \delta y_a - \left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{K} \cdot \frac{d_z F}{dz}\right)_a \cdot \delta z_a\end{aligned}$$

Gleichung XXXVII ist eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung, und liefert eine Urgleichung

$$\text{XLI)}\quad \mathfrak{F}'(x, y, z, \mathfrak{K}, B, C) = 0$$

mit zwei willkürlichen Constanten B und C. Gleichung XXXIX ist abermals eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung, und liefert abermals eine Urgleichung

$$\text{XLII)}\quad \mathfrak{F}''(x, y, z, \mathfrak{K}, H, K) = 0$$

mit zwei willkürlichen Constanten H und K. Diese zwei Urgleichungen, verbunden mit Gleichung II, liefern

$$\text{XLIII)}\quad \mathfrak{K} = f(x, B, C, H, K)$$

$$\text{XLIV)}\quad y = f'(x, B, C, H, K)$$

$$\text{XLV)}\quad z = f''(x, B, C, H, K)$$

Hier kommen in den für y und z gefundenen Functionen vier willkürliche Constanten vor, während (nach allen bisherigen Auflösungen) nur zwei vorkommen sollten. Man bestimme also zwei dieser Constanten so, dass in XL die mit δz_α und δz_a behafteten Theilsätze wegfallen, und somit jede Spur der von z herrührenden Mutationen verschwindet. Man lasse also folgende zwei Gleichungen

$$\text{XLVI)}\quad \left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{K}\cdot\frac{d_z F}{dz}\right)_\alpha = 0,\ \text{und}\ \text{XLVII)}\quad \left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{K}\cdot\frac{d_z F}{dz}\right)_a = 0$$

stattfinden. Gleichung XL reducirt sich dabei auf

$$\delta U = \left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{K}\cdot\frac{d_y F}{dy}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{K}\cdot\frac{d_y F}{dy}\right)_a\cdot\delta y_a$$

Man hat daher folgende Gränzengleichung

$$\text{XLVIII)}\quad \left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{K}\cdot\frac{d_y F}{dy}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{K}\cdot\frac{d_y F}{dy}\right)_a\cdot\delta y_a = 0$$

Aus XLVI und XLVII folgt bezüglich $\mathfrak{K}_\alpha = \left(-\frac{d_p V}{dp} : \frac{d_z F}{dz}\right)_\alpha$ und $\mathfrak{K}_a = \left(-\frac{d_p V}{dp} : \frac{d_z F}{dz}\right)_a$; und wenn man $\mathfrak{K}_\alpha$ und $\mathfrak{K}_a$ aus XLVIII eliminirt, so bekommt man genau wieder die Gleichung XXXVI, welche bei Bestimmung der zwei noch nicht bestimmten willkürlichen Constanten mitbenützt werden muss. Es ist also Alles, wie bisher.

Die Integration der Gleichungen XXXVII und XXXIX wird oft bedeutende Weitläufigkeiten verursachen; und desshalb muss man suchen, sich sein Geschäft bequem zu machen. Man eliminire daher aus diesen beiden Gleichungen den Quotienten $\frac{d\mathfrak{K}}{dx}$, so gibt sich

$$\text{XLIX)}\quad \left(\frac{d_z V}{dz} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right)\right)\cdot\frac{d_y F}{dy} - \left(\frac{d_y V}{dy} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right)\right)\cdot\frac{d_z F}{dz} = 0$$

Dieses ist genau wieder Gleichung XXXV. Durch ihre Integration bekommt man eine mit zwei willkürlichen Constanten versehene Urgleichung, welche, mit Gleichung II verbunden, hinreicht, um die für y und z gesuchten Functionen zu bestimmen. Man hat also jetzt die Function $\mathfrak{K}$ gar nicht kennen gelernt, und von den vier willkürlichen Constanten B, C, H, K zwei ganz umgangen. Man muss aber dennoch in der Idee die beiden umgangenen Constanten als durch die Gleichungen XLVI und XLVII bestimmbar sich denken, und diese beiden Gleichungen benützen, um $\mathfrak{K}_\alpha$ und $\mathfrak{K}_a$ aus XLVIII zu eliminiren (man vergleiche noch den Schluss des §. 254)

Man mutire Gleichung XXVIII noch einmal, und multiplicire die sich ergebende Mutationsgleichung, welche bekanntlich eine identische Gleichung ist, mit dem bereits angewendeten Multiplicator $\mathfrak{K}$. Dieses Product ist dann auch noch eine identische Gleichung, und kann bei XIX unterhalb des Integralzeichens addirt werden, ohne dass $\delta^2 U$ sich im geringsten ändert. Nach geschehener Addition forme man um, und berücksichtige die Gleichungen XXXVII, XXXIX, XLVI, XLVII; dann bleibt nur

$$\text{L)}\quad \delta^2 U = \left(\frac{d_{\mathfrak{p}}V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{K}\cdot\frac{d_y F}{dy}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(\frac{d_{\mathfrak{p}}V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{K}\cdot\frac{d_y F}{dy}\right)_a \cdot \delta^2 y_a$$

$$+\int_a^\alpha \left[\mathfrak{K}\cdot\frac{d\left(\frac{d_y^2 F}{dy^2}\right)}{dx}\cdot\delta y^2 + \ldots\ldots + 2\mathfrak{K}\cdot\frac{d_z^2 F}{dz^2}\cdot\delta z\cdot\frac{d\delta z}{dx}\right.$$

$$\left. + \frac{d_y^2 V}{dy^2}\cdot\delta y^2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{d_{\mathfrak{p}}^2 V}{d\mathfrak{p}^2}\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right]\cdot dx$$

was genau wieder die Form ist, wie in Gleichung IX und XXI.

Hat man diese Untersuchung ausgeführt, so schaue man auf Gleichung XXXVIII zurück, und sehe zu, ob man dem zu δy gehörigen Factor

$$\frac{d_y V}{dy} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_{\mathfrak{p}}V}{d\mathfrak{p}}\right)_* - \frac{d\mathfrak{K}}{dx}\cdot\frac{d_y F}{dy}$$

die Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ beilegen kann. Hier muss man aber vor Allem den Quotient $\frac{d\mathfrak{K}}{dx}$ eliminiren. Erst dann kann man beurtheilen, wie es mit der hiesigen Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ steht, etc. etc.

Anmerkung. Vergleicht man die in den zwei letzten §§. angewendeten Methoden miteinander, so erkennt man:

1) Die Gleichung XXXV in §. 250 ist die nemliche, wie Gleichung XLIX in §. 251. Man gelangt also in beiden §§. auf ganz gleiche Weise zu den für y und z gesuchten Functionen. Dagegen hat

2) der §. 251 den Vorzug, dass er ganz direct zu der richtigen Form des $\delta^2 U$ führt; denn man hat aus Gleichung L nur $\mathfrak{K}_\alpha$ und $\mathfrak{K}_a$ zu eliminiren, was mittelst XLVI und XLVII geschieht. Diesen Vorzug hat der §. 250 nicht, sondern der daselbst für $\delta^2 U$ hergestellte Ausdruck wird, wenn man alle mittelbaren Mutationen eliminirt, ausserhalb des Integralzeichens das Aggregat XXVI enthalten, welches, eben um dem $\delta^2 U$ seine richtige Form zu geben, noch unter das Integralzeichen geschafft werden muss, wie in §. 248 geschehen ist.

Untersuchung 60.

Es sei V ein reeller mit den Elementen x, y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ gebildeter Ausdruck, und man sucht für y und z solche reelle Functionen des nichtmutablen Veränderlichen x, dass dabei das zwischen den Gränzen von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckte Integral

$$\text{I)}\quad U = \int_a^\alpha V\cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während eben diese für y und z gesuchten Functionen solche zusammengehörige sein müssen, dass dabei noch einer Differentialgleichung

$$\text{II)}\quad F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = 0$$

identisch genügt wird.

§. 252. Man integrire Gleichung II, so ergibt sich eine Urgleichung

$$\text{III)}\quad \mathfrak{F}(x, y, z, A) = 0$$

zwischen x, y, z und dem willkürlichen Constanten A. Man sondere das mittelbar mutable Element z ab, so bekommt man

$$\text{IV)} \quad z = \chi(x, y, A)$$

Aus dieser Gleichung folgt ferner $\frac{dz}{dx} = \frac{d_x\chi}{dx} + \frac{d_y\chi}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$; und indem man z und $\frac{dz}{dx}$ aus I eliminirt, wird V ein nur aus den Elementen x, y, $\frac{dy}{dx}$, A zusammengesetzter Ausdruck, der mit W bezeichnet sein mag. Gleichung I geht also über in

$$\text{V)} \quad U = \int_a^\alpha W \cdot dx$$

Daraus folgt

$$\text{VI)} \quad \delta U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y W}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_p W}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx$$

$$\text{VII)} \quad \delta^2 U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y W}{dy} \cdot \delta^2 y + \frac{d_p W}{dp} \cdot \frac{d\delta^2 y}{dx}\right.$$

$$\left. + \frac{d_y^2 W}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_p W}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2 W}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx$$

Wenn man umformt, so bekommt man

$$\text{VIII)} \quad \delta U = \left(\frac{d_p W}{dp}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{d_p W}{dp}\right)_a \cdot \delta y_a + \int_a^\alpha \left(\frac{d_y W}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p W}{dp}\right)\right) \cdot \delta y \cdot dx$$

$$\text{IX)} \quad \delta^2 U = \left(\frac{d_p W}{dp}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(\frac{d_p W}{dp}\right)_a \cdot \delta^2 y_a + \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_y W}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p W}{dp}\right)\right) \cdot \delta^2 y\right.$$

$$\left. + \frac{d_y^2 W}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_p W}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2 W}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right] \cdot dx$$

An den Gleichungen VI—IX erkennt man, dass die hiesige Untersuchung jetzt sowohl auf die zweiundfünfzigste als auch auf die vorige zurückgeführt ist.

§. 253. Untersuchung der ersten (in VI aufgestellten) Form des δU. Hier hat man nach §. 230 oder nach §. 244 zu verfahren; und die einzige Eigenthümlichkeit, welche sich jetzt darbietet, ist die, dass man noch einen Constanten hat, der in den eben besagten zwei Untersuchungen nicht vorkam. Die Gränzen a und α haben keinen Einfluss auf die für y und z gesuchten Functionen; und desshalb kann es der Fall sein, dass diese Functionen nicht allein das zwischen den Gränzen von x = a bis x = α erstreckte Integral U, sondern auch das zwischen vielen andern Gränzen, ja oft auch das zwischen allen beliebigen Gränzen erstreckte U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande machen.

Untersuchung der zweiten (in VIII aufgestellten) Form des δU. Man zerlege Gleichung VIII zuerst in die Hauptgleichung

$$\text{X)} \quad \frac{d_y W}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p W}{dp}\right) = 0$$

und in die Gränzengleichung

$$\text{XI)} \quad \left(\frac{d_p W}{dp}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{d_p W}{dp}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Durch Integration der Gleichung X ergibt sich für y eine Function von x, in welche noch weiter zwei willkürliche Constanten B und C eingehen, so dass man jetzt im Ganzen drei willkürliche Constanten A, B, C hat, von denen sich zwei durch die Gränzengleichung XI bestimmen lassen, während zur Bestimmung des dritten noch irgend eine Bedingung gestellt werden kann.

Man beachte also, dass man in dieser Untersuchung einen willkürlichen Constanten mehr hat, als in der vorigen (s. §. 245).

Wegen Gleichung X reducirt sich IX auf

$$\text{XII)}\quad \delta^2 U = \left(\frac{d_p W}{dp}\right)_\alpha \cdot \delta^2 y_\alpha - \left(\frac{d_p W}{dp}\right)_a \cdot \delta^2 y_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left(\frac{d_y^2 W}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_p W}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2 W}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx$$

Man beachte aber, dass die hier gesuchten und von den Gränzen a und α abhängigen Functionen y und z nur das von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckte Integral U zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande machen, eben weil nur das zwischen den nemlichen Gränzen erstreckte δU zu Null wird.

Hat man die Gleichung X untersucht, so schaue man auf Gleichung VIII zurück, und sehe zu, ob man dem zu δy gehörigen Factor

$$\frac{d_y W}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p W}{dp}\right)$$

die Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ beilegen kann, etc. etc.

§. 254. Wenn es aber nur darauf ankommt, die zweite (in VIII aufgestellte) Form des δU zu untersuchen; so kann man auch (nach §. 251) auf folgende Weise verfahren:

Man setze zur Abkürzung p und $\mathfrak{p}$ bezüglich statt $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$, und mutire Gleichung II; so bekommt man

$$\text{XIII)}\quad \frac{d_y F}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_z F}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_p F}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_{\mathfrak{p}} F}{d\mathfrak{p}} \cdot \frac{d\delta z}{dx} = 0$$

Man mutire auch Gleichung I, so bekommt man

$$\text{XIV)}\quad \delta U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_z V}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_p V}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}} \cdot \frac{d\delta z}{dx}\right) \cdot dx$$

Nun ist Gleichung XIII eine nach x identische; und wenn man sie mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{N}$ von x multiplicirt, so ist auch dieses Product eine identische Gleichung. Dieses kann man zu Gleichung XIV unter dem Integralzeichen addiren, ohne dass δU sich im Geringsten ändert. Vollzieht man die Addition, und formt dann um; so bekommt man

$$\delta U = \left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_p F}{dp}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(\frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_{\mathfrak{p}} F}{d\mathfrak{p}}\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha$$

$$- \left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_p F}{dp}\right)_a \cdot \delta y_a - \left(\frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_{\mathfrak{p}} F}{d\mathfrak{p}}\right)_a \cdot \delta z_a$$

$$+ \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_y V}{dy} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_y F}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_p F}{dp}\right)\right) \cdot \delta y\right.$$

$$\left.+ \left(\frac{d_z V}{dz} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_z F}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_{\mathfrak{p}} F}{d\mathfrak{p}}\right)\right) \cdot \delta z\right] \cdot dx$$

Nun soll das unter dem Integralzeichen noch stehende Aggregat von dem mittelbaren δz ganz frei sein; man denke sich also unter $\mathfrak{N}$ eine solche Function, dass identisch stattfindet:

$$\text{XV)}\quad \frac{d_z V}{dz} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_z F}{dz} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_{\mathfrak{p}} F}{d\mathfrak{p}}\right) = 0$$

Man bekommt daher die Hauptgleichung

$$\text{XVI)}\quad \frac{d_y V}{dy} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_y F}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_p F}{dp}\right) = 0$$

und die Gränzengleichung

$$\text{XVII)}\quad \left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_p F}{dp}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_\mathfrak{p} F}{d\mathfrak{p}}\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha$$

$$- \left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_p F}{dp}\right)_a \cdot \delta y_a - \left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_\mathfrak{p} F}{d\mathfrak{p}}\right)_a \cdot \delta z_a = 0$$

Gleichung II ist eine Differentialgleichung der ersten Ordnung, und liefert eine Urgleichung

$$\text{XVIII)}\quad \mathfrak{F}(x, y, z, A) = 0$$

mit einem willkürlichen Constanten A. Gleichung XVI ist eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung, und liefert eine Urgleichung

$$\text{XIX)}\quad \mathfrak{F}'(x, y, z, \mathfrak{N}, B, C) = 0$$

mit zwei willkürlichen Constanten B und C. Gleichung XV ist abermals eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung, und liefert eine Urgleichung

$$\text{XX)}\quad \mathfrak{F}''(x, y, z, \mathfrak{N}, H, K) = 0$$

mit zwei willkürlichen Constanten H und K. Aus diesen drei Urgleichungen kann man y, z und $\mathfrak{N}$ entwickeln, und man bekommt

$$\text{XXI)}\quad \mathfrak{N} = f(x, A, B, C, H, K)$$

$$\text{XXII)}\quad y = f'(x, A, B, C, H, K)$$

$$\text{XXIII)}\quad z = f''(x, A, B, C, H, K)$$

Hier enthalten aber die für y und z gefundenen Functionen fünf willkürliche Constanten, während sie (nach der im vorigen §. gegebenen Auflösung) nur drei enthalten sollten. Es fragt sich also, ob diese oder die vorige Auflösung die richtige sei. Diese Frage findet ihre vollständige Beantwortung schon in §. 251; denn auch dort kommen zwei willkürliche Constanten zuviel vor. Sie kann aber auch auf folgende Weise beantwortet werden: Bei der ersten (im vorigen §. gegebenen) Auflösung hatte man den zu mutirenden Ausdruck schon vor dem Mutiren so eingerichtet, dass er keine mittelbar mutablen Elemente mehr enthielt. Sonach war die erste Auflösung die einfachste und die directe, und führte ganz evident zu den richtigen Formen. Desshalb dürfen auch die für y und z gesuchten Functionen nicht mehr als drei willkürliche Constanten enthalten. Man bestimme nun zwei derselben, etwa H und K, in der Weise, dass in Gleichung XVII die zu δz_α und δz_a gehörigen Coefficienten zu Null werden, d. h. dass die Gleichungen

$$\text{XXIV)}\quad \left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)_\alpha + \mathfrak{N}_\alpha \cdot \left(\frac{d_\mathfrak{p} F}{d\mathfrak{p}}\right)_\alpha = 0$$

und

$$\text{XXV)}\quad \left(\frac{d_\mathfrak{p} V}{d\mathfrak{p}}\right)_a + \mathfrak{N}_a \cdot \left(\frac{d_\mathfrak{p} F}{d\mathfrak{p}}\right)_a = 0$$

stattfinden. Dann sind nur noch die drei willkürlichen Constanten A, B, C vorhanden; und die Gränzengleichung XVII zieht sich (wie in §. 251) zurück auf

$$\text{XXVI)}\quad \left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_p F}{dp}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{N} \cdot \frac{d_p F}{dp}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Aus dieser eliminire man $\mathfrak{N}_\alpha$ und $\mathfrak{N}_a$, was mittelst der Gleichungen XXIV und XXV geschieht. Dann hat XXVI die Form von XI, und kann dazu benützt werden, zwei

der drei Constanten A, B, C zu bestimmen, während zur Bestimmung des dritten noch irgend eine Bedingung gestellt werden kann.

Um das Prüfungsmittel herzustellen, mutire man Gleichung XIV noch einmal; dann gibt sich ein Ausdruck für $\delta^2 U$. Hierauf mutire man Gleichung XIII noch einmal, so ist die sich ergebende Mutationsgleichung eine identische Gleichung; und wenn man diese mit dem bereits angewendeten Multiplicator $\mathfrak{N}$ multiplicirt, so ist auch das sich ergebende Product eine identische Gleichung. Man kann also dieses Product bei dem für $\delta^2 U$ hergestellten Ausdrucke unter dem Integralzeichen addiren, ohne dass $\delta^2 U$ sich im geringsten ändert. Nach geschehener Addition forme man um, und berücksichtige die vier Gleichungen XV, XVI, XXIV und XXV etc. etc.

Die Integration der Gleichungen XV und XVI wird oft bedeutende Weitläufigkeiten verursachen; und desshalb muss man suchen, sich sein Geschäft leicht zu machen. Man bestrebe sich daher, die für y und z gesuchten Functionen gradezu so herzustellen, dass in ihnen nur drei willkürliche Constanten vorkommen, dass man also die Function $\mathfrak{N}$ gar nicht kennen lernt, und von den fünf willkürlichen Constanten zwei ganz umgeht. Man kann dann in der Idee diese zwei Constanten dennoch als durch die beiden Gleichungen XXIV und XXV bestimmbar sich denken, und diese beiden Gleichungen benützen, um $\mathfrak{N}_\alpha$ und $\mathfrak{N}_a$ aus XXVI zu eliminiren. Hinsichtlich mancher dabei anwendbarer Operationsvortheile mag man die Aufgaben 188, 189, 190 etc. vergleichen.

§. 255. Ein specieller Fall von dem im vorigen §. behandelten ist der, wo sowohl der in Gleichung I unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck V als auch die Bedingungsgleichung II nur mit den Elementen x, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ gebildet sind. Dabei bekommt man

$$\text{XXVII)}\quad \delta U = \left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{N}\cdot\frac{d_p F}{dp}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha + \left(\frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{N}\cdot\frac{d_{\mathfrak{p}} F}{d\mathfrak{p}}\right)_\alpha \cdot \delta z_\alpha$$

$$- \left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{N}\cdot\frac{d_p F}{dp}\right)_a \cdot \delta y_a - \left(\frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{N}\cdot\frac{d_{\mathfrak{p}} F}{d\mathfrak{p}}\right)_a \cdot \delta z_a$$

$$- \int_a^\alpha \left[\left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{N}\cdot\frac{d_p F}{dp}\right)\right)\cdot\delta y + \left(\frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{N}\cdot\frac{d_{\mathfrak{p}} F}{d\mathfrak{p}}\right)\right)\cdot\delta z\right]\cdot dx$$

Nun soll das unter dem Integralzeichen noch stehende Aggregat von dem mittelbaren δz ganz frei sein; man denke sich also unter $\mathfrak{N}$ eine solche Function, dass identisch stattfindet

$$\text{XXVIII)}\quad \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{N}\cdot\frac{d_{\mathfrak{p}} F}{d\mathfrak{p}}\right) = 0$$

Man bekommt daher die Hauptgleichung

$$\text{XXIX)}\quad \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{N}\cdot\frac{d_p F}{dp}\right) = 0$$

Wenn man die beiden letzteren Gleichungen integrirt, so bekommt man bezüglich

$$\text{XXX)}\quad \frac{d_{\mathfrak{p}} V}{d\mathfrak{p}} + \mathfrak{N}\cdot\frac{d_{\mathfrak{p}} F}{d\mathfrak{p}} = H$$

und

$$\text{XXXI)}\quad \frac{d_p V}{dp} + \mathfrak{N}\cdot\frac{d_p F}{dp} = B$$

Wegen der Gleichungen XXVIII bis XXXI reducirt sich nun Gleichung XXVII auf

$$\text{XXXII)}\quad \delta U = B\cdot(\delta y_\alpha - \delta y_a) + H\cdot(\delta z_\alpha - \delta z_a)$$

Damit aber auch die mit δz_α und δz_a behafteten Theilsätze wegfallen, setze man $H = 0$; und letztere Gleichung reducirt sich auf

$$\delta U = B \cdot (\delta y_{\alpha} - \delta y_a)$$

so dass man die Gränzengleichung

$$\text{XXXIII)} \quad B \cdot (\delta y_{\alpha} - \delta y_a) = 0$$

hat, welche bei Bestimmung der Constanten mitbenützt werden muss. Wegen $H = 0$ folgt aus XXX, dass $\mathfrak{N} = \left(-\frac{d_{\mathfrak{p}}V}{d\mathfrak{p}} : \frac{d_{\mathfrak{p}}F}{d\mathfrak{p}}\right)$; und somit geht XXXI über in

$$\text{XXXIV)} \quad \frac{d_pV}{dp} \times \frac{d_{\mathfrak{p}}F}{d\mathfrak{p}} - \frac{d_{\mathfrak{p}}V}{d\mathfrak{p}} \times \frac{d_pF}{dp} = B \times \frac{d_{\mathfrak{p}}F}{d\mathfrak{p}}$$

welche Gleichung in Verbindung mit II, die aber jetzt folgende Form

$$\text{XXXV)} \quad F\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = 0$$

annimmt, hinreichen, zu bestimmen, was y und z für Functionen von x sind.

Die zwei letzten Gleichungen sind Differentialgleichungen der ersten Ordnung; und daher gehen bei ihrer Integration zwei weitere Constanten A und C ein, so dass man im Ganzen drei willkürliche Constanten A, B, C hat, wie schon im vorigen §. der Fall war.

Untersuchung 61.

Es sei V ein reeller mit den Elementen $x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^3z}{dx^3} \ldots$ gebildeter Ausdruck, und man sucht für y und z solche Functionen des nichtmutablen Veränderlichen x, dass dabei das zwischen den Gränzen von $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckte Integral

$$\text{I)} \quad U = \int_a^{\alpha} V \cdot dx$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während eben diese für y und z gesuchten Functionen solche zusammengehörige sein müssen, dass dabei noch einer Gleichung

$$\text{II)} \quad F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^3z}{dx^3}, \ldots\ldots\right) = 0$$

identisch genügt wird.

§. 256. Wenn Gleichung II nicht schon eine Urgleichung ist, so integrire man sie. Dadurch bekommt man

$$\text{III)} \quad \mathfrak{F}(x, y, z, A', A'', A''', \ldots\ldots) = 0$$

wo $A', A'', A''', \ldots\ldots$ die durch die Integration eingegangenen willkürlichen Constanten sind. Man behandle von den beiden Elementen y und z dasjenige als mittelbar mutabel, welches die meisten Bequemlichkeiten bietet. Man nehme an, z sei dieses Element.

A) Die einfachste und directe Durchführung der Untersuchung wird darin bestehen, dass man zuerst z absondert, so dass man

$$\text{IV)} \quad z = \chi(x, y, A', A'', A''', \ldots\ldots)$$

bekommt. Nun eliminire man $z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots\ldots$ aus I, so wird V ein nur aus den Elementen $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots$ gebildeter Ausdruck, und die hiesige Untersuchung ist auf frühere zurückgebracht.

B) Man eliminire die mittelbaren Mutationen auf indirectem Wege mittelst der Multiplicatorenmethode, indem man sich soviele Gleichungen bildet, dass man für y und z dieselben Functionen bekommt, wie bei der vorigen directen Elimination (man vergleiche z. B. §. 249—251).

Wenn man namentlich nur diejenige Form des δU untersuchen will, bei welcher kein Differentialquotient einer Mutation, sondern nur noch δy und δz sich unter dem Integralzeichen befindet: so ist es gar nicht nöthig, die Gleichung III herzustellen, sondern man hat nur folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

AA) Es komme in Gleichung II kein so hoher Differentialquotient des mittelbar mutablen z vor, wie in Gleichung I. Hier muss man Gleichung II vorerst noch so lange differentiiren, bis sich eine Differentialgleichung ergibt, wo ein eben so hoher Differentialquotient des z vorkommt, wie in Gleichung I. Hierauf wird man die so hergestellte Differentialgleichung mutiren, und die sich ergebende Mutationsgleichung mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{N}$ von x multipliciren, etc. etc. Nur dadurch, dass man besagte Differentiation zuerst an Gleichung II ausführt, ist es möglich, zu einer Gränzengleichung zu gelangen, in welcher alle mit δz_a, δz_α, $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha$, etc. behafteten Theilsätze den Multiplicator $\mathfrak{N}$ oder einen davon abgeleiteten Differentialquotient enthalten. In dieser Gränzengleichung kann man dann, damit jede Spur der von z herrührenden Mutation verschwindet, die bei δz_a, δz_α, $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha$, etc. befindlichen Coefficienten zu Null werden lassen, wobei alle willkürlichen Constanten, welche zuviel sind, eine Bestimmung erhalten, und wobei das Mittel geboten ist, auch die Ausdrücke $\mathfrak{N}_a$, $\mathfrak{N}_\alpha$, $\left(\frac{d\mathfrak{N}}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{d\mathfrak{N}}{dx}\right)_\alpha$, etc. zu bestimmen, und aus den bei δy_a, δy_α, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$, etc. befindlichen Coefficienten zu eliminiren. Dann erst ist es möglich, die Gränzengleichung weiter zu zerlegen.

BB) Es komme in Gleichung II ein eben so hoher oder noch höherer Differentialquotient des mittelbar mutablen z vor, wie in Gleichung I. Hier kann man gradezu die Gleichung II mutiren, und die sich ergebende Mutationsgleichung mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{N}$ von x multipliciren, etc. etc. Dann gelangt man zu einer Gränzengleichung, in welcher alle mit δz_a, δz_α, $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha$, etc. behafteten Theilsätze den Multiplicator $\mathfrak{N}$ oder einen davon abgeleiteten Differentialquotient enthalten, etc. etc.

Die erste (bei AA gegebene) Vorschrift „die Gleichung II zuerst gehörig zu differentiiren, und dann erst zu mutiren" ist aber sehr wichtig; denn vernachlässigt man sie, so wird man gewöhnlich eine Gränzengleichung bekommen, welche sich nur sehr schwer oder gar nicht behandeln lässt, man wird gewöhnlich in ein Gedränge gerathen, aus welchem man sich nicht helfen kann. Ich hebe diese Vorschrift desshalb noch einmal besonders hervor, weil ich glaube, dass sie noch von Niemand ausgesprochen worden ist, und weil ich bezwecke, dass man ihre Wichtigkeit nicht übersehe.

Zu allem Ferneren ist der Weg hinlänglich angebahnt; namentlich ist es nicht mehr nöthig, hinsichtlich der Behandlung der Gränzengleichung irgend etwas vorzubringen. Daher mag es genügen, auf die Aufgaben 191, 192, 193, etc. zu verweisen.

Bis jetzt war der Ausdruck, welcher ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden soll, gradezu in gesonderter Form gegeben. Nun sollen Fälle folgen, wo dieser Ausdruck in ungesonderter Form mittelst einer Gleichung gegeben ist.

Untersuchung 62.

Es sei eine aus den Elementen x, y, U, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dU}{dx}$ gebildete Gleichung

$$\text{I)}\quad F\left(x,\ y,\ U,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dU}{dx}\right) = 0$$

gegeben; und man sucht für y eine solche reelle Function von x, dass, während U_a einen bestimmt vorgeschriebenen Werth hat, U_α ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

§. 257. Die Gleichung I ist eine identische, d. h. gilt bei jedem Werthe des x. Multiplicirt man dieselbe mit einer (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{R}$ von x, so ist auch das Product $\mathfrak{R}\cdot F\left(x,\ y,\ U,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dU}{dx}\right)$ noch eine identische Gleichung. Desshalb ist auch noch

$$\text{II)}\quad \int_a^\alpha \mathfrak{R}\cdot F\left(x,\ y,\ U,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dU}{dx}\right) = 0$$

Man setze zur Abkürzung p statt $\frac{dy}{dx}$, und r statt $\frac{dU}{dx}$, und mutire dann; so bekommt man

$$\text{III)}\quad \int_a^\alpha \left(\mathfrak{R}\cdot\frac{d_yF}{dy}\cdot\delta y + \mathfrak{R}\cdot\frac{d_UF}{dU}\cdot\delta U + \mathfrak{R}\cdot\frac{d_pF}{dp}\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \mathfrak{R}\cdot\frac{d_rF}{dr}\cdot\frac{d\delta U}{dx}\right)\cdot dx = 0$$

und wenn man umformt, so bekommt man

$$\text{IV)}\quad \left(\mathfrak{R}\cdot\frac{d_pF}{dp}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\mathfrak{R}\cdot\frac{d_pF}{dp}\right)_a\cdot\delta y_a + \left(\mathfrak{R}\cdot\frac{d_rF}{dr}\right)_\alpha\cdot\delta U_\alpha - \left(\mathfrak{R}\cdot\frac{d_rF}{dr}\right)_a\cdot\delta U_a$$

$$+\int_a^\alpha\Bigg[\left(\mathfrak{R}\cdot\frac{d_yF}{dy} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\mathfrak{R}\cdot\frac{d_pF}{dp}\right)\right)\cdot\delta y$$

$$+\left(\mathfrak{R}\cdot\frac{d_UF}{dU} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\mathfrak{R}\cdot\frac{d_rF}{dr}\right)\right)\cdot\delta U\Bigg]\cdot dx = 0$$

Diese Gleichung soll nun von dem mittelbaren Elemente δU ganz frei sein. Man denke sich also unter $\mathfrak{R}$ eine solche Function von x, dass die identische Gleichung

$$\text{V)}\quad \mathfrak{R}\cdot\frac{d_UF}{dU} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\mathfrak{R}\cdot\frac{d_rF}{dr}\right) = 0$$

stattfindet. Da ferner der Werth des U_a ein bestimmt vorgeschriebener ist, so ist $\delta U_a = 0$, $\delta^2 U_a = 0$, etc.; und Gleichung IV reducirt sich auf

$$\text{VI)}\quad \left(\mathfrak{R}\cdot\frac{d_pF}{dp}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\mathfrak{R}\cdot\frac{d_pF}{dp}\right)_a\cdot\delta y_a + \left(\mathfrak{R}\cdot\frac{d_rF}{dr}\right)_\alpha\cdot\delta U_\alpha$$

$$+\int_a^\alpha\left(\mathfrak{R}\cdot\frac{d_yF}{dy} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\mathfrak{R}\cdot\frac{d_pF}{dp}\right)\right)\cdot\delta y\cdot dx = 0$$

Daraus folgt

$$\text{VII)}\quad \delta U_\alpha = -\frac{1}{\left(\mathfrak{N}\cdot\frac{d_rF}{dr}\right)_\alpha}\cdot\Bigg[\left(\mathfrak{N}\cdot\frac{d_pF}{dp}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\mathfrak{N}\cdot\frac{d_pF}{dp}\right)_a\cdot\delta y_a$$

$$+\int_a^\alpha\left(\mathfrak{N}\cdot\frac{d_yF}{dy} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\mathfrak{N}\cdot\frac{d_pF}{dp}\right)\right)\cdot\delta y\cdot dx\Bigg]$$

Diese Gleichung zerlegt sich nun in die Hauptgleichung

$$\text{VIII)}\quad \mathfrak{N}\cdot\frac{d_yF}{dy} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\mathfrak{N}\cdot\frac{d_pF}{dp}\right) = 0$$

und in die Gränzengleichung

$$\text{IX)}\quad \left(\mathfrak{N}\cdot\frac{d_pF}{dp}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\mathfrak{N}\cdot\frac{d_pF}{dp}\right)_a\cdot\delta y_a = 0$$

Zur Herstellung des Prüfungsmittels mutire man Gleichung III noch einmal, forme dann um, und beachte die Gleichungen V und VIII, sowie auch, dass $\delta U_a = 0$, $\delta^2 U_a = 0$, etc. ist. Alles Weitere bedarf keiner Auseinandersetzung mehr.

Untersuchung 63.

Es sei eine aus den Elementen x, y, z, U, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dU}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2U}{dx^2}$, ... gebildete Gleichung

$$\text{I)}\quad F = 0$$

gegeben; und man sucht für y und z solche reelle Functionen von x, dass, während U_a einen bestimmt vorgeschriebenen Werth hat, U_α ein Maximum-stand oder Minimumstand wird.

§. 258. Die Gleichung I ist eine identische, d. h. gilt bei jedem Werthe des x. Multiplicirt man dieselbe mit einer (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{N}$ von x, so ist auch das Product $\mathfrak{N}\cdot F = 0$ eine identische Gleichung. Desshalb ist auch noch

$$\text{II)}\quad \int_a^\alpha \mathfrak{N}\cdot F\cdot dx = 0$$

Man mutire diese Gleichung, und forme um; so bekommt man

$$\text{III)}\quad (\mathfrak{A})_\alpha\cdot\delta y_\alpha + (\mathfrak{A}')_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha + (\mathfrak{A}'')_\alpha\cdot\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_\alpha + \cdots\cdots$$

$$-(\mathfrak{A})_a\cdot\delta y_a - (\mathfrak{A}')_a\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a - (\mathfrak{A}'')_a\cdot\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)_a - \cdots\cdots$$

$$+(\mathfrak{B})_\alpha\cdot\delta z_\alpha + (\mathfrak{B}')_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha + (\mathfrak{B}'')_\alpha\cdot\left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right)_\alpha + \cdots\cdots$$

$$-(\mathfrak{B})_a\cdot\delta z_a - (\mathfrak{B}')_a\cdot\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_a - (\mathfrak{B}'')_a\cdot\left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right)_a - \cdots\cdots$$

$$+(\mathfrak{C})_\alpha\cdot\delta U_\alpha + (\mathfrak{C}')_\alpha\cdot\left(\frac{d\delta U}{dx}\right)_\alpha + (\mathfrak{C}'')_\alpha\cdot\left(\frac{d^2\delta U}{dx^2}\right)_\alpha + \cdots\cdots$$

$$-(\mathfrak{C})_a\cdot\delta U_a - (\mathfrak{C}')_a\cdot\left(\frac{d\delta U}{dx}\right)_a - (\mathfrak{C}'')_a\cdot\left(\frac{d^2\delta U}{dx^2}\right)_a - \cdots\cdots$$

$$+\int_a^\alpha\left(Q\cdot\delta y + R\cdot\delta z + S\cdot\delta U\right)\cdot dx = 0$$

Diese Gleichung soll von dem mittelbaren δU ganz frei sein. Man denke sich also unter $\mathfrak{N}$ eine solche Function von x, dass die identische Gleichung

$$\text{IV)} \quad S = 0$$

stattfindet. Es finden aber auch ausserdem noch folgende identische Gleichungen statt:

$$\text{V)} \quad Q = 0, \quad \text{und VI)} \quad R = 0$$

Die vier Gleichungen I, IV, V, VI müssen nun integrirt werden, und dann gibt sich, was y, z, U und $\mathfrak{N}$ für Functionen von x sind, in welchen noch eine gewisse Anzahl willkürlicher Constanter vorkommt.

Da der Werth von U_a bestimmt vorgeschrieben ist, so ist $\delta U_a = 0$, $\delta^2 U_a = 0$, $\delta^3 U_a = 0$ etc.; aber hinsichtlich der Behandlung der Elemente $\left(\frac{d\delta U}{dx}\right)_\alpha$, $\left(\frac{d\delta U}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{d^2\delta U}{dx^2}\right)_\alpha$, $\left(\frac{d^2\delta U}{dx^2}\right)_a$, etc. müssen einzelne Fälle unterschieden werden.

Erster Fall. Wenn hinsichtlich der Werthe der Elemente $\left(\frac{dU}{dx}\right)_\alpha$, $\left(\frac{dU}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_\alpha$, $\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_a$, etc. nichts vorgeschrieben ist; so muss man soviele der durch Integration eingegangenen Censtanten in der Weise bestimmen, dass die Gleichungen

$$(\mathfrak{G}')_\alpha = 0, \quad (\mathfrak{G}')_a = 0, \quad (\mathfrak{G}'')_\alpha = 0, \quad (\mathfrak{G}'')_a = 0, \text{ etc.}$$

stattfinden, und dann kommen in der Gränzengleichung nur noch die Elemente δy_α, δy_a, δz_α, δz_a, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)_\alpha$, etc. vor; sie kann also behandelt werden, wie bekannt ist.

Zweiter Fall. Wenn die Werthe $\left(\frac{dU}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{dU}{dx}\right)_\alpha$, $\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_a$, $\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_\alpha$ etc. vorgeschrieben sind, so fallen ihre Mutationen schon von selbst weg, und die Gränzengleichung nimmt eine Form an, wie im vorigen Falle.

Und dergleichen Fälle mehr.

Es sollen nun Untersuchungen folgen, wobei gemischte Mutationen angewendet werden.

Untersuchung 64.

Es sei V ein reeller mit den Elementen x, y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, ... gebildeter Ausdruck, und man sucht nicht nur für y und z solche reelle Functionen, sondern auch noch für a und α solche reelle Werthe, dass dabei der Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx$$

ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimumstandes wird.

§. 259. Weil jetzt a und α Werthänderungen erleiden, so muss das U einer gemischten Mutation unterworfen werden, und man bekommt

$$\text{II)} \quad {}_{(\delta)}U = V_\alpha \cdot \vartheta\alpha - V_a \cdot \vartheta a + \int_a^\alpha \delta V \cdot dx$$

$$\text{III)}\quad {}_{(}\delta_{)}^{2}U = V_{\alpha} \cdot \vartheta^{2}\alpha - V_{a} \cdot \vartheta^{2}a + \left(\frac{dV}{dx}\right)_{\alpha} \cdot \vartheta\alpha^{2} - \left(\frac{dV}{dx}\right)_{a} \cdot \vartheta a^{2}$$

$$+ 2 \cdot (\delta V)_{\alpha} \cdot \vartheta\alpha - 2 \cdot (\delta V)_{a} \cdot \vartheta a + \int_{a}^{\alpha} \delta^{2}V \cdot dx$$

Hier ist bekanntlich

$$\text{IV)}\quad \delta V = \frac{d_{y}V}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_{z}V}{dz} \cdot \delta z + \frac{d_{p}V}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_{\mathfrak{p}}V}{d\mathfrak{p}} \cdot \frac{d\delta z}{dx} + \ldots\ldots$$

$$\text{V)}\quad \delta^{2}V = \frac{d_{y}V}{dy} \cdot \delta^{2}y + \frac{d_{z}V}{dz} \cdot \delta^{2}z + \frac{d_{p}V}{dp} \cdot \frac{d\delta^{2}y}{dx} + \frac{d_{\mathfrak{p}}V}{d\mathfrak{p}} \cdot \frac{d\delta^{2}z}{dx} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{d_{y}^{2}V}{dy^{2}} \cdot \delta y^{2} + 2 \cdot \frac{d_{y}d_{p}V}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \ldots\ldots$$

Um aber in das Verfahren einzuleiten, wird es zweckmässiger sein, einen einfachen Fall vollständig durchzuführen.

§. 260. Man nehme also an, V sei ein mit den Elementen x, y und $\frac{dy}{dx}$ gebildeter Ausdruck, so bekommt man zunächst

$$\text{VI)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = V_{\alpha} \cdot \vartheta\alpha - V_{a} \cdot \vartheta a + \int_{a}^{\alpha} \left(\frac{d_{y}V}{dy} + \frac{d_{p}V}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot dx$$

und

$$\text{VII)}\quad {}_{(}\delta_{)}^{2}U = V_{\alpha} \cdot \vartheta^{2}\alpha - V_{a} \cdot \vartheta^{2}a + \left(\frac{dV}{dx}\right)_{\alpha} \cdot \vartheta\alpha^{2} - \left(\frac{dV}{dx}\right)_{a} \cdot \vartheta a^{2}$$

$$+ 2 \cdot \left(\frac{d_{y}V}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_{p}V}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)_{\alpha} \cdot \vartheta\alpha - 2 \cdot \left(\frac{d_{y}V}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_{p}V}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)_{a} \cdot \vartheta a$$

$$+ \int_{a}^{\alpha} \left(\frac{d_{y}V}{dy} \cdot \delta^{2}y + \frac{d_{p}V}{dp} \cdot \frac{d\delta^{2}y}{dx} + \frac{d_{y}^{2}V}{dy^{2}} \cdot \delta y^{2}\right.$$

$$\left. + 2 \cdot \frac{d_{y}d_{p}V}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_{p}^{2}V}{dp^{2}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^{2}\right) \cdot dx$$

Formt man diese Ausdrücke um, so bekommt man

$$\text{VIII)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = V_{\alpha} \cdot \vartheta\alpha - V_{a} \cdot \vartheta a + \left(\frac{d_{p}V}{dp}\right)_{\alpha} \cdot \delta y_{\alpha} - \left(\frac{d_{p}V}{dp}\right)_{a} \cdot \delta y_{a}$$

$$+ \int_{a}^{\alpha} \left(\frac{d_{y}V}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_{p}V}{dp}\right)\right) \cdot \delta y \cdot dx$$

und

$$\text{IX)}\quad {}_{(}\delta_{)}^{2}U = V_{\alpha} \cdot \vartheta^{2}\alpha - V_{a} \cdot \vartheta^{2}a + \left(\frac{dV}{dx}\right)_{\alpha} \cdot \vartheta\alpha^{2} - \left(\frac{dV}{dx}\right)_{a} \cdot \vartheta a^{2}$$

$$+ 2 \cdot \left(\frac{d_{y}V}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_{p}V}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)_{\alpha} \cdot \vartheta\alpha + \left(\frac{d_{p}V}{dp}\right)_{\alpha} \cdot \delta^{2}y_{\alpha}$$

$$- 2 \cdot \left(\frac{d_{y}V}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_{p}V}{dp} \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right)_{a} \cdot \vartheta a - \left(\frac{d_{p}V}{dp}\right)_{a} \cdot \delta^{2}y_{a}$$

$$+ \int_{a}^{\alpha} \left[\left(\frac{d_{y}V}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot \left(\frac{d_{p}V}{dp}\right)\right) \cdot \delta^{2}y + \frac{d_{y}^{2}V}{dy^{2}} \cdot \delta y^{2}\right.$$

$$\left. + 2 \cdot \frac{d_{y}d_{p}V}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_{p}^{2}V}{dp^{2}} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^{2}\right] \cdot dx$$

Man hat jetzt dafür zu sorgen, dass die für $(\Delta)U$ herzustellende Reihe kein solches erstes Glied hat, welches die erste Potenz $\varkappa$ als gemeinschaftlichen Factor enthält. Man ist aber, eben weil man dem $(\delta)U$ zwei verschiedene Formen geben kann, auch gezwungen, beide Formen besonders zu untersuchen.

Erste Abtheilung.

§. 261. Untersuchung der ersten (in VI aufgestellten) Form des $(\delta)U$. Wenn die zwei Elemente ϑa und $\vartheta \alpha$ unabhängig untereinander sind, so hat man folgende zwei Puncte zu berücksichtigen:

1) Dasjenige System zweier Gleichungen, das man durch die Ausdrücke $\frac{d_y V}{dy}$ und $\frac{d_p V}{dp}$ bekommt, wird bestimmen, was y für eine Function von x ist. Daran erkennt man, dass sich für y ganz dieselbe Function ergibt, wie wenn a und α unveränderlich wären; und die Gränzen a und α haben nicht den geringsten Einfluss auf die gesuchte Function y von x.

2) Die Gleichung welche man aus V_α bekommt, dient zur Bestimmung des Werthes von α; und die Gleichung, welche man aus V_a bekommt, dient zur Bestimmung des Werthes von a.

Alles Weitere bedarf keiner Auseinandersetzung mehr, namentlich wie zu verfahren wäre, wenn zwischen ϑa und $\vartheta \alpha$ irgend eine Abhängigkeit stattfände.

Zweite Abtheilung.

§. 262. Untersuchung der zweiten (in VIII aufgestellten) Form des $(\delta)U$. Man sehe zuerst zu, ob die identische Gleichung

$$\text{X)}\quad \frac{d_y V}{dy} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right) = 0$$

möglich ist. Daraus ergibt sich für y die gesuchte Function von x; und man erkennt abermals, dass man dieselbe Function y von x bekommt, wie wenn a und α unveränderlich wären. Als Gränzengleichung hat man

$$\text{XI)}\quad V_\alpha\cdot\vartheta\alpha - V_a\cdot\vartheta a + \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_a\cdot\delta y_a = 0$$

Aber jetzt haben die Gränzen a und α Einfluss auf die gesuchte Function y von x.

Was die Zerlegung der Gränzengleichung betrifft, so sollen unter allen möglichen Fällen nur folgende sieben besonders behandelt werden, und zwar unter dnr Voraussetzung, dass die Hauptgleichung eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung sei.

Erster Fall. Es bestehe zwischen ϑa, $\vartheta\alpha$, δy_a, δy_α durchaus keine Abhängigkeit. Hier finden also folgende vier Gleichungen

$$V_\alpha = 0,\ V_a = 0,\ \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_\alpha = 0,\ \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_a = 0$$

statt, welche hinreichen, die beiden durch die Integration eingegangenen Constanten und die Werthe von a und α zu bestimmen. Gleichung IX reducirt sich dabei auf

$$(\delta^2 U = \left(\frac{dV}{dx}\right)_\alpha\cdot\vartheta\alpha^2 - \left(\frac{dV}{dx}\right)_a\cdot\vartheta a^2 + 2\cdot\left(\frac{d_y V}{dy}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha\cdot\vartheta\alpha - 2\cdot\left(\frac{d_y V}{dy}\right)_a\cdot\delta y_a\cdot\vartheta a$$
$$+\int_a^\alpha\left(\frac{d_y^2 V}{dy^2}\cdot\delta y^2 + 2\cdot\frac{d_y d_p V}{dy.dp}\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2 V}{dp^2}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)\cdot dx$$

Man setze zur Abkürzung $\left(\frac{dV}{dx}\right)_\alpha = \mathfrak{A}$, $\left(\frac{d_y V}{dy}\right)_\alpha = \mathfrak{A}'$, $\left(\frac{dV}{dx}\right)_a = \mathfrak{B}$, $\left(\frac{d_y V}{dy}\right)_a = \mathfrak{B}'$, und forme den unter dem Integralzeichen stehenden Theilsatz (nach §. 230) um; so bekommt man

$$_{(}\delta_{,}^{2}U = \mathfrak{A} \cdot \vartheta\alpha^2 + 2 \cdot \mathfrak{A}' \cdot \delta y_\alpha \cdot \vartheta\alpha - \mathfrak{B} \cdot \vartheta a^2 - 2 \cdot \mathfrak{B}' \cdot \delta y_a \cdot \vartheta a$$

$$+ \eta_\alpha \cdot \delta y_\alpha^2 - \eta_a \cdot \delta y_a^2 + \int_a^\alpha \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(g \cdot \delta y + \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

wo η und g die Bedeutung haben, welche bereits (aus §. 230) bekannt ist. Dieser Ausdruck lässt sich abermals umformen in

$$_{(}\delta_{,}^{2}U = \mathfrak{A} \cdot \left(\vartheta\alpha + \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}} \cdot \delta y_\alpha\right)^2 - \mathfrak{B} \cdot \left(\vartheta a + \frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{B}} \cdot \delta y_a\right)^2$$

$$+ \left(\eta_\alpha - \frac{\mathfrak{A}'^2}{\mathfrak{A}}\right) \cdot \delta y_\alpha^2 - \left(\eta_a - \frac{\mathfrak{B}'^2}{\mathfrak{B}}\right) \cdot \delta y_a^2 + \int_a^\alpha \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(g \cdot \delta y + \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx$$

Nun ist η eine Function von x mit einem willkürlichen Constanten, dem man jeden beliebigen Werth beilegen kann, ohne dass der wahre Werth von $_{(}\delta_{,}^{2}U$ sich auch nur im Geringsten ändere; denn die Function g von x enthält den nemlichen willkürlichen Constanten, und der durch Werthänderung desselben sich ergebenden Aenderung des η entspricht jedesmal eine solche Aenderung des g, dass der wahre Werth des $_{(}\delta_{,}^{2}U$ ungeändert bleibt.

Nun fragt sich: unter welchen Umständen bleibt $_{(}\delta_{,}^{2}U$ immer positiv oder negativ? Diese Frage beantwortet sich auf folgende Weise: Wäre in letzterer Gleichung der Ausdruck

$$\text{XII)} \quad \left(\eta_\alpha - \frac{\mathfrak{A}'^2}{\mathfrak{A}}\right) \cdot \delta y_\alpha^2 - \left(\eta_a - \frac{\mathfrak{B}'^2}{\mathfrak{B}}\right) \cdot \delta y_a^2$$

nicht vorhanden, so wäre $_{(}\delta_{,}^{2}U$ unter allen Umständen positiv, wenn $\mathfrak{A}$ und $(-\mathfrak{B})$, d. h. wenn $\left(\frac{dV}{dx}\right)_\alpha$ und $\left(-\left(\frac{dV}{dx}\right)_a\right)$ positiv sind, und wenn der Quotient $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ bei allen von a bis α liegenden Werthen des x positiv bleibt; dagegen wäre $_{(}\delta_{,}^{2}U$ unter allen Umständen negativ, wenn $\mathfrak{A}$ und $(-\mathfrak{B})$, d. h. wenn $\left(\frac{dV}{dx}\right)_\alpha$ und $\left(-\left(\frac{dV}{dx}\right)_a\right)$ negativ sind, und wenn der Quotient $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ bei jedem von a bis α liegenden Werthe des x negativ bleibt.

Man richte also den in η enthaltenen willkürlichen Constanten nach der bald so bald so genommenen Function δy jedesmal so ein, dass entweder der Ausdruck XII zu Null wird, oder mit $\left(\frac{dV}{dx}\right)_\alpha$ und $\left(-\left(\frac{dV}{dx}\right)_a\right)$ dasselbe Vorzeichen gemeinschaftlich hat.

Man erkennt also, dass das Zeichen von $_{(}\delta_{,}^{2}U$ bloss von den drei Ausdrücken $\left(\frac{dV}{dx}\right)_\alpha$, $\left(-\left(\frac{dV}{dx}\right)_a\right)$ und $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ abhängig ist.

Zweiter Fall. Es sei zwischen a und α die Gleichung $\chi(a, \alpha) = 0$ gegeben. Daraus folgt

$$\frac{d_\alpha \chi}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha + \frac{d_a \chi}{da} \cdot \vartheta a = 0$$

$$\frac{d_\alpha \chi}{d\alpha} \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{d_a \chi}{da} \cdot \vartheta^2 a + \frac{d_\alpha^2 \chi}{d\alpha^2} \cdot \vartheta\alpha^2 + 2 \cdot \frac{d_\alpha d_a \chi}{d\alpha . da} \cdot \vartheta\alpha \cdot \vartheta a + \frac{d_a^2 \chi}{da^2} \cdot \vartheta a^2 = 0$$

Nimmt man $\vartheta\alpha$, $\vartheta^2\alpha$ etc. als abhängig, so ergeben sich aus diesen Gleichungen Ausdrücke von folgender Form

$$\vartheta\alpha = Q \cdot \vartheta a$$

$$\vartheta^2\alpha = Q \cdot \vartheta^2 a + R \cdot \vartheta a^2$$

Eliminirt man jetzt $\vartheta\alpha$ aus XI, so bekommt man

$$(Q \cdot V_\alpha - V_a) \cdot \vartheta a + \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_\alpha \cdot \delta y_\alpha - \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_a \cdot \delta y_a = 0$$

Diese Gleichung zerlegt sich in folgende drei

$$Q \cdot V_\alpha - V_a = 0,\ \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_\alpha = 0,\ \left(\frac{d_p V}{dp}\right)_a = 0$$

welche in Verbindung mit $\chi(a, \alpha)$ hinreichen zur Bestimmung der beiden durch Integration eingegangenen Constanten und der Werthe des a und des α. Eliminirt man ϑa und $\vartheta^2 \alpha$ aus IX, und berücksichtigt man die drei letzten Gleichungen sowie auch Gleichung X. so bekommt man für ${}_{(}\delta_{)}^2 U$ einen Ausdruck von folgender Form

$$
\begin{aligned}
{}_{(}\delta_{)}^2 U = \mathfrak{G} \cdot \vartheta a^2 + 2 \cdot \mathfrak{D} \cdot \delta y_\alpha \cdot \vartheta a - 2\mathfrak{E} \cdot \delta y_a \cdot \vartheta a \\
+ \int_a^\alpha \left(\frac{d_y^2 V}{dy^2} \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_p V}{dy.dp} \cdot \delta y \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \right) \cdot dx
\end{aligned}
$$

und wenn man den unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruck (nach §. 230) umformt, so bekommt man

$$
\begin{aligned}
{}_{(}\delta_{)}^2 U = \mathfrak{G} \cdot \left(\vartheta a + \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{G}} \cdot \delta y_\alpha - \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{G}} \cdot \delta y_a\right)^2 \\
- \frac{1}{\mathfrak{G}} \cdot (\mathfrak{D} \cdot \delta y_\alpha - \mathfrak{E} \cdot \delta y_a)^2 + \eta_\alpha \cdot \delta y_\alpha^2 - \eta_a \cdot \delta y_a^2 \\
+ \int_a^\alpha \frac{d_p^2 V}{dp^2} \cdot \left(g \cdot \delta y + \frac{d\delta y}{dx}\right)^2 \cdot dx
\end{aligned}
$$

Indem man nun mit dem Aggregate

$$\text{XIII)} \quad - \frac{1}{\mathfrak{G}} \cdot (\mathfrak{D} \cdot \delta y_\alpha - \mathfrak{E} \cdot \delta y_a)^2 + \eta_\alpha \cdot \delta y_\alpha^2 - \eta_a \cdot \delta y_a^2$$

ebenso verfahrt, wie man im ersten Falle mit dem Aggregate XII verfahren ist, gelangt man zu der Erkenntniss, dass ${}_{(}\delta_{)}^2 U$ positiv ist, wenn $\mathfrak{G}$ positiv ist, und der Quotient $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ bei allen von a bis α liegenden Werthen des x positiv bleibt; wenn aber $\mathfrak{G}$ negativ ist, und der Quotient $\frac{d_p^2 V}{dp^2}$ bei allen von a bis α liegenden Werthen des x negativ bleibt, so ist ${}_{(}\delta_{)}^2 U$ negativ.

Dritter Fall. Es sei zwischen y_a und y_α eine Gleichung $\chi(y_\alpha, y_a) = 0$ gegeben. Man setze zur Abkürzung m statt y_α, und n statt y_a, so bekommt man aus letzterer Gleichung

$$\text{XIV)} \quad \frac{d_m \chi}{dm} \cdot \delta y_\alpha + \frac{d_n \chi}{dn} \cdot \delta y_a + \frac{d_\alpha \chi}{d\alpha} \cdot \vartheta \alpha + \frac{d_a \chi}{da} \cdot \vartheta a = 0$$

und

$$
\begin{aligned}
\text{XV)} \quad \frac{d_m \chi}{dm} \cdot \delta^2 y_\alpha + \frac{d_n \chi}{dn} \cdot \delta^2 y_a + \frac{d_m^2 \chi}{dm^2} \cdot \delta y_\alpha^2 + 2 \cdot \frac{d_m d_n \chi}{dm.dn} \cdot \delta y_\alpha \cdot \delta y_a \\
+ \frac{d_n^2 \chi}{dn^2} \cdot \delta y_a^2 + 2 \cdot \left(\frac{d_\alpha\left(\frac{d_m \chi}{dm}\right)}{d\alpha} \cdot \delta y_\alpha + \frac{d_m \chi}{dm} \cdot \frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha} + \frac{d_\alpha\left(\frac{d_n \chi}{dn}\right)}{d\alpha} \cdot \delta y_a \right) \cdot \vartheta \alpha \\
+ 2 \cdot \left(\frac{d_a\left(\frac{d_m \chi}{dm}\right)}{da} \cdot \delta y_\alpha + \frac{d_a\left(\frac{d_n \chi}{dn}\right)}{da} \cdot \delta y_a + \frac{d_n \chi}{dn} \cdot \frac{d\delta y_a}{da} \right) \cdot \vartheta a + \frac{d_\alpha^2 \chi}{d\alpha^2} \cdot \vartheta \alpha^2 +
\end{aligned}
$$

$$+2\cdot\frac{d_\alpha d_a\chi}{d\alpha\, da}\cdot\vartheta\alpha\cdot\vartheta a+\frac{d_a^2\chi}{da^2}\cdot\vartheta a^2+\frac{d_\alpha\chi}{d\alpha}\cdot\vartheta^2\alpha+\frac{d_a\chi}{da}\cdot\vartheta^2 a=0$$

etc. etc.

Weil aber in $\chi(y_\alpha, y_a)=0$ die Elemente α und a nicht unmittelbar, sondern nur mittelbar durch y_α und y_a enthalten sind; so ist nur

$$\frac{d_\alpha\chi}{d\alpha}=\frac{d_m\chi}{dm}\cdot\frac{dy_\alpha}{d\alpha}$$

$$\frac{d_a\chi}{da}=\frac{d_n\chi}{dn}\cdot\frac{dy_a}{da}$$

$$\frac{d_\alpha^2\chi}{d\alpha^2}=\frac{d_m\chi}{dm}\cdot\frac{d^2y_\alpha}{d\alpha^2}+\frac{d_m^2\chi}{dm^2}\cdot\left(\frac{dy_\alpha}{d\alpha}\right)^2$$

etc. etc.

Man hat nun aus XI eines der Elemente δy_α, δy_a, $\vartheta\alpha$, ϑa zu eliminiren. was hier mittelst eines Multiplicators geschehen soll. Man multiplicire also Gleichung XIV mit einem (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) constanten Ausdrucke L, und addire dieses Product zu XI; so bekommt man

$$\left(V_\alpha+L\cdot\frac{d_\alpha\chi}{d\alpha}\right)\cdot\vartheta\alpha+\left(-V_a+L\cdot\frac{d_a\chi}{da}\right)\cdot\vartheta a$$

$$+\left(\left(\frac{d_pV}{dp}\right)_\alpha+L\cdot\frac{d_m\chi}{dm}\right)\cdot\delta y_\alpha+\left(-\left(\frac{d_pV}{dp}\right)_a+L\cdot\frac{d_n\chi}{dn}\right)\cdot\delta y_a=0$$

Diese Gleichung zerlegt sich in folgende vier einzelne

$$\text{XVI)}\quad V_\alpha+L\cdot\frac{d_\alpha\chi}{d\alpha}=0,\quad \text{XVII)}\quad -V_a+L\cdot\frac{d_a\chi}{da}=0$$

$$\text{XVIII)}\quad \left(\frac{d_pV}{dp}\right)_\alpha+L\cdot\frac{d_m\chi}{dm}=0,\quad \text{XIX)}\quad -\left(\frac{d_pV}{dp}\right)_a+L\cdot\frac{d_n\chi}{dn}=0$$

welche in Verbindung mit $\chi(y_\alpha, y_a)=0$ hinreichen, um a, α, L und die beiden durch die Integration eingegangenen willkürlichen Constanten zu bestimmen.

Nun multiplicire man Gleichung XV mit dem bereits angewendeten constanten Ausdrucke L, addire dieses Product zu IX, und berücksichtige die vier Gleichungen XVI bis XIX nebst der Hauptgleichung X; so bekommt man

$$\delta^2U=L\cdot\frac{d_m^2\chi}{dm^2}\cdot\delta y_\alpha^2+2L\cdot\frac{d_md_n\chi}{dm.dn}\cdot\delta y_\alpha\cdot\delta y_a+L\cdot\frac{d_n^2\chi}{dn^2}\cdot\delta y_a^2$$

$$+2\cdot\left(\left(\frac{d_yV}{dy}\right)_\alpha\cdot\delta y_\alpha+L\cdot\frac{d_\alpha\left(\frac{d_m\chi}{dm}\right)}{d\alpha}\cdot\delta y_\alpha+L\cdot\frac{d_\alpha\left(\frac{d_n\chi}{dn}\right)}{d\alpha}\cdot\delta y_a\right)\cdot\vartheta\alpha$$

$$+2\cdot\left(-\left(\frac{d_yV}{dy}\right)_a\cdot\delta y_a+L\cdot\frac{d_a\left(\frac{d_m\chi}{dm}\right)}{da}\cdot\delta y_\alpha+L\cdot\frac{d_a\left(\frac{d_n\chi}{dn}\right)}{da}\cdot\delta y_a\right)\cdot\vartheta a$$

$$+\left(\left(\frac{dV}{dx}\right)_\alpha+L\cdot\frac{d_\alpha^2\chi}{d\alpha^2}\right)\cdot\vartheta\alpha^2+2L\cdot\frac{d_\alpha d_a\chi}{d\alpha.da}\cdot\vartheta\alpha\cdot\vartheta a+\left(-\left(\frac{dV}{dx}\right)_a+L\cdot\frac{d_a^2\chi}{da^2}\right)\cdot\vartheta a^2$$

$$+\int_a^\alpha\left(\frac{d_y^2V}{dy^2}\cdot\delta y^2+2\cdot\frac{d_yd_pV}{dy.dp}\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx}+\frac{d_p^2V}{dp^2}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)\cdot dx$$

Aus diesem Ausdrucke hat man von den vier Elementen $\vartheta\alpha$, ϑa, δy_α, δy_a noch dasjenige zu eliminiren, welches als abhängig behandelt werden soll; und diese Elimination

geschieht dann mittelst Gleichung XIV. Das weitere Verfahren, um den Zeichenstand des $(\delta_?^2 U$ zu untersuchen, ist dann dem des vorigen Falles analog.

Vierter Fall. Es sei zwischen a, α, y_a, y_α eine Gleichung $\chi(a, \alpha, y_a, y_\alpha) = 0$ gegeben. Setzt man auch hier zur Abkürzung m statt y_α, und n statt y_a, so bekommt man auch hier

$$\text{XX)}\quad \frac{d_m \chi}{dm} \cdot \delta y_\alpha + \frac{d_n \chi}{dn} \cdot \delta y_a + \frac{d_\alpha \chi}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha + \frac{d_a \chi}{da} \cdot \vartheta a = 0$$

und so fort. Allein jetzt ist

$$\frac{d_\alpha \chi}{d\alpha} = \frac{d_m \chi}{dm} \cdot \frac{dy_\alpha}{d\alpha} + \frac{d_\alpha \chi}{d\alpha}$$

und

$$\frac{d_a \chi}{da} = \frac{d_n \chi}{dn} \cdot \frac{dy_a}{da} + \frac{d_a \chi}{da}$$

Fünfter Fall. Es seien zwei Gleichungen

$$\text{XXI)}\quad y_\alpha = \chi(\alpha), \quad \text{und XXII)}\quad y_a = \chi'(a)$$

gegeben. Setzt man an die Stelle des y die gesuchte Function $\varphi(x)$, so gehen diese Gleichungen über in

$$\varphi(\alpha) = \chi(\alpha), \quad \text{und} \quad \varphi(a) = \chi'(a)$$

Man erkennt, dass diese beiden Gleichungen keine identischen sind, sondern aus $\varphi(\alpha) = \chi(\alpha)$ wird sich nur eine bestimmte Anzahl von Werthen des α, und aus $\varphi(a) = \chi'(a)$ wird sich nur eine bestimmte Anzahl von Werthen des a ergeben. Will man daher dem α einen andern Werth $(\alpha + D\alpha)$ beilegen, welcher der Gleichung $\varphi(\alpha) = \chi(\alpha)$ nicht entspricht; so muss man an die Stelle des $y = \varphi(x)$ auch eine andere Function $y + \Delta y = \varphi(x) + \Delta y$ setzen. Gleichung XXI geht dabei über in

$$\text{XXIII)}\quad \varphi(\alpha + D\alpha) + \Delta y_{\alpha + D\alpha} = \chi(\alpha + D\alpha)$$

Hier sollen aber nur diejenigen Werthe $(\alpha + D\alpha)$ gebraucht werden, welche dem α nächstanliegen, d. h. dem α nächstvorangehen oder nächstnachfolgen. Desshalb wird man $D\alpha$ zerlegen in

$$\varkappa \cdot \vartheta\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3\alpha + \ldots\ldots$$

wo das $\varkappa$ bald als positiv bald als negativ im Momente des Verschwindens befindlich gedacht wird; und Δy besteht aus der gleichbedeutenden Reihe

$$\varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots$$

wo δy, $\delta^2 y$ etc. Functionen von x sind, die aber bezüglich durch $\delta\varphi(x)$, $\delta^2\varphi(x)$ etc. dargestellt werden mögen. Gleichung XXIII geht also über in

$$\begin{aligned}
\text{XXIV)}\quad & \varphi\left(\alpha + \varkappa \cdot \vartheta\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3\alpha + \ldots\ldots\right) \\
& + \varkappa \cdot \delta\varphi\left(\alpha + \varkappa \cdot \vartheta\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3\alpha + \ldots\ldots\right) \\
& + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi\left(\alpha + \varkappa \cdot \vartheta\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3\alpha + \ldots\ldots\right) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& = \chi\left(\alpha + \varkappa \cdot \vartheta\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3\alpha + \ldots\ldots\right)
\end{aligned}$$

Da aber, wie gesagt, das $\varkappa$ im Momente des Verschwindens befindlich ist, so zerlegt sich letztere Gleichung in folgende einzelne:

$$\text{XXV)}\quad \varphi(\alpha) = \chi(\alpha)$$

$$\text{XXVI)}\quad \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha + \delta\varphi(\alpha) = \frac{d\chi(\alpha)}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha$$

$$\text{XXVII)}\quad \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\cdot\vartheta^2\alpha + \frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2}\cdot\vartheta\alpha^2 + \delta^2\varphi(\alpha) + 2\cdot\frac{d\delta\varphi(\alpha)}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha$$

$$= \frac{d\chi(\alpha)}{d\alpha}\cdot\vartheta^2\alpha + \frac{d^2\chi(\alpha)}{d\alpha^2}\cdot\vartheta\alpha^2$$

etc. etc.

Setzt man noch δy, $\delta^2 y$ etc. bezüglich statt $\delta\varphi(x)$, $\delta^2\varphi(x)$ etc.; so bekommt man

$$\text{XXVIII)}\quad \delta y_\alpha = \left(\frac{d\chi(\alpha)}{d\alpha} - \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right)\cdot\vartheta\alpha$$

$$\text{XXIX)}\quad \delta^2 y_\alpha = \left(\frac{d\chi(\alpha)}{d\alpha} - \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right)\cdot\vartheta^2\alpha + \left(\frac{d^2\chi(\alpha)}{d\alpha^2} - \frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2}\right)\cdot\vartheta\alpha^2 - 2\cdot\frac{d\delta y_\alpha}{d\alpha}\cdot\vartheta\alpha$$

Durch diese Gleichungen ist bestimmt, wie δy_α von $\vartheta\alpha$ abhängt, etc. etc. Verfahrt man auf dieselbe Weise mit Gleichung XXII, so bekommt man

$$\text{XXX)}\quad \delta y_a = \left(\frac{d\chi'(a)}{da} - \frac{d\varphi(a)}{da}\right)\cdot\vartheta a$$

$$\text{XXXI)}\quad \delta^2 y_a = \left(\frac{d\chi'(a)}{da} - \frac{d\varphi(a)}{da}\right)\cdot\vartheta^2 a + \left(\frac{d^2\chi'(a)}{da^2} - \frac{d^2\varphi(a)}{da^2}\right)\cdot\vartheta a^2 - 2\cdot\frac{d\delta y_a}{da}\cdot\vartheta a$$

Eliminirt man δy_α und δy_a aus XI, so bekommt man

$$\left[V_\alpha + \left(\frac{d\chi(\alpha)}{d\alpha} - \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right)\cdot\left(\frac{d_pV}{dp}\right)_\alpha\right]\cdot\vartheta\alpha$$

$$-\left[V_a + \left(\frac{d\chi'(a)}{da} - \frac{d\varphi(a)}{da}\right)\cdot\left(\frac{d_pV}{dp}\right)_a\right]\cdot\vartheta a = 0$$

Da aber ϑa und $\vartheta\alpha$ unabhängig von einander sind, so zerlegt sich diese Gleichung in folgende zwei

$$\text{XXXII)}\quad V_\alpha + \left(\frac{d\chi(\alpha)}{d\alpha} - \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right)\cdot\left(\frac{d_pV}{dp}\right)_\alpha = 0$$

$$\text{XXXIII)}\quad V_a + \left(\frac{d\chi'(a)}{da} - \frac{d\varphi(a)}{da}\right)\cdot\left(\frac{d_pV}{dp}\right)_a = 0$$

Diese zwei Gleichungen, verbunden mit XXI und XXII, reichen hin, um die zwei durch Integration eingegangenen Constanten und die Werthe von a und α zu bestimmen.

Man eliminire nun δy_α, δy_a, $\delta^2 y_\alpha$, $\delta^2 y_a$ aus IX, und berücksichtige die Gleichungen XI, XXXII, XXXIII; so bekommt man

$$\delta^2 U = \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)_\alpha + 2\cdot\left(\frac{d_yV}{dy}\right)_\alpha\cdot\left(\frac{d\chi(\alpha)}{d\alpha} - \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right) + \left(\frac{d_pV}{dp}\right)_\alpha\cdot\left(\frac{d^2\chi(\alpha)}{d\alpha^2} - \frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2}\right)\right]\cdot\vartheta\alpha^2$$

$$-\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)_a + 2\cdot\left(\frac{d_yV}{dy}\right)_a\cdot\left(\frac{d\chi'(a)}{da} - \frac{d\varphi(a)}{da}\right) + \left(\frac{d_pV}{dp}\right)_a\cdot\left(\frac{d^2\chi'(a)}{da^2} - \frac{d^2\varphi(a)}{da^2}\right)\right]\cdot\vartheta a^2$$

$$+\int_a^\alpha\left(\frac{d_y^2V}{dy^2}\cdot\delta y^2 + 2\cdot\frac{d_yd_pV}{dy.dp}\cdot\delta y\cdot\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_p^2V}{dp^2}\cdot\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right)\cdot dx$$

Statt der gesonderten Gleichungen $y_\alpha = \chi(\alpha)$ und $y_a = \chi'(a)$ könnten auch ungesonderte $F(\alpha, y_\alpha) = 0$ und $F'(a, y_a) = 0$ gegeben sein; das Verfahren würde dadurch keine Aenderung erleiden. Setzt man zur Abkürzung m statt y_α, und n statt y_a; so bekommt man

$$\frac{d_m F}{dm} \cdot \delta y_\alpha + \frac{d_\alpha F}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha = 0$$

$$\frac{d_n F'}{dn} \cdot \delta y_a + \frac{d_a F'}{da} \cdot \vartheta a = 0$$

und so fort.

Hier ist $\frac{d_\alpha F}{d\alpha} = \frac{d_m F}{dm} \cdot \frac{dy_\alpha}{d\alpha} + \frac{d_\alpha F}{d\alpha}$; und weil $y = \varphi(x)$ ist, so bekommt man $\frac{d_\alpha F}{d\alpha} = \frac{d_m F}{dm} \cdot \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} + \frac{d_\alpha F}{da}$. Auf dieselbe Weise bekommt man $\frac{d_a F'}{da} = \frac{d_n F'}{dn} \cdot \frac{d\varphi(a)}{da} + \frac{d_a F'}{da}$

Sechster Fall. Es seien zwei Gleichungen $\chi(a, \alpha, y_a, y_\alpha) = 0$ und $\chi'(a, \alpha, y_a, y_\alpha) = 0$ gegeben. Dieser Fall ist von dem vorigen nicht verschieden, denn man kann auch hier die Elemente δy_α, δy_a, $\delta^2 y_\alpha$, $\delta^2 y_a$ etc. als abhängig behandeln, und eliminiren.

Siebenter Fall. Es seien drei Gleichungen gegeben, z. B. folgende drei:

$$\chi(a, \alpha, y_a, y_\alpha) = 0, \quad \chi'(a, \alpha, y_a, y_\alpha) = 0, \quad \chi''(a, \alpha) = 0$$

oder folgende drei:

$$\chi(a, \alpha, y_a, y_\alpha) = 0, \quad \chi'(a, \alpha) = 0, \quad \chi''(a, \alpha) = 0$$

oder folgende drei:

$$\chi(y_a, y_\alpha) = 0, \quad \chi'(y_a, y_\alpha) = 0, \quad \chi''(a, \alpha, y_a, y_\alpha) = 0$$

oder folgende drei:

$$\chi(a, \alpha, y_a, y_\alpha) = 0, \quad \chi'(a, \alpha, y_a, y_\alpha) = 0, \quad \chi''(a, \alpha, y_a, y_\alpha) = 0$$

und so fort. Alles dieses bedarf jetzt keiner Auseinandersetzung mehr.

§. 263. Hat man nun die Gleichung X untersucht, so schaue man wieder auf Gleichung VIII zurück, und sehe zu, ob man dem bei δy befindlichen Factor

$$\frac{d_y V}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_p V}{dp}\right)$$

die Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ beilegen kann.

Es ist klar, dass die Zahl der Untersuchungen, wo die Gränzen eine Werthänderung erleiden, eine ungeheuer grosse, dass es aber in Folge alles Vorhergehenden nicht mehr nöthig ist, sich in das Einzelne einzulassen. Es genügt, auf die Aufgaben 156, 160, 161, 176—180, 187, 195, 197, 213 und 216 zu verweisen. Wegen seiner Eigenthümlichkeiten soll jedoch folgender Fall, wo die Gränzelemente a und α schon ursprünglich in dem für V gegebenen Ausdrucke vorkommen, noch besonders untersucht werden.

Untersuchung 65.

Es sei V ein reeller mit den Elementen a, α, x, y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, ... gebildeter Ausdruck; und man sucht nicht nur für y und z solche reelle Functionen, sondern auch noch für a und α solche reelle Werthe, dass dabei der Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx$$

ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes wird.

§. 264. Da die Elemente a und α schon in V enthalten sind, so hat man jetzt

$$\text{II)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = V_\alpha \cdot \vartheta\alpha + \int_a^\alpha \frac{d_\alpha V}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha \cdot dx - V_a \cdot \vartheta a + \int_a^\alpha \frac{d_a V}{da} \cdot \vartheta a \cdot dx + \int_a^\alpha \delta V \cdot dx$$

wo δV die bekannte (schon in Gleichung IV des §. 259 auseinandergesetzte) Bedeutung hat. Da man aber nur nach x integriren soll, also die Integration von $\vartheta\alpha$ und ϑa unabhängig ist; so ist

$$\int_a^\alpha \frac{d_\alpha V}{d\alpha} \cdot \vartheta\alpha \cdot dx = \left(\int_a^\alpha \frac{d_\alpha V}{d\alpha} \cdot dx\right) \cdot \vartheta\alpha$$

und

$$\int_a^\alpha \frac{d_a V}{da} \cdot \vartheta a \cdot dx = \left(\int_a^\alpha \frac{d_a V}{da} \cdot dx\right) \cdot \vartheta a$$

Gleichung II geht also über in

$$\text{III)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = \left(V_\alpha + \int_a^\alpha \frac{d_\alpha V}{d\alpha} \cdot dx\right) \cdot \vartheta\alpha + \left(-V_a + \int_a^\alpha \frac{d_a V}{da} \cdot dx\right) \cdot \vartheta a + \int_a^\alpha \delta V \cdot dx$$

Hieran erkennt man, dass sich zur Bestimmung der für y und z gesuchten Functionen ganz dieselben Gleichungen ergeben, wie bei der vorigen Untersuchung; und nur die Gränzengleichung ist verschieden.

Es ist in Folge alles Vorhergehenden überflüssig, den für ${}_{(}\delta_{)}^2U$ sich ergebenden Ausdruck herzustellen, und genügt, auf die Aufgaben 157, 195 etc. zu verweisen.

Nun mögen Untersuchungen folgen, wo man auch willkürlichen Constanten, welche keine Gränzelemente sind, Werthänderungen beilegen muss. Die folgenden Untersuchungen sind also ebenfalls solche, wo gemischte Mutationen angewendet werden.

Untersuchung 66.

Es seien $\mathfrak{F}(x, y)$ und V zwei mit den Elementen x und y gebildete Ausdrücke. Man sucht aus allen jenen Functionen y von x, bei welchen das zwischen den bestimmten Gränzen $x = a$ bis $x = \alpha$ erstreckte Integral

$$\text{I)}\quad \int_a^\alpha \mathfrak{F}(x, y) \cdot dx$$

einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt, diejenige heraus, von welcher das zwischen den nemlichen Gränzen erstreckte Integral

$$\text{II)}\quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx$$

zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande gemacht wird.

(Man vergleiche den ersten theoretischen Nachtrag am Ende des zweiten Bandes.)

§. 265. Man nehme für y irgend eine Function $\varphi(x, m)$, in welcher ein willkürlicher Constanter m vorkommt, der in dem Falle, wo das Integral I einen bestimmt vorgeschriebenen Werth g bekommen soll, so eingerichtet werden kann, dass dieser Vorschrift genügt wird; und wenn man die Function $\varphi(x, m)$ in Gleichung II einsetzt, so bekommt man für U einen aus a und α gebildeten Ausdruck, welcher dargestellt sein mag durch

$$\text{III)}\quad U' = \psi(\alpha) - \psi(a)$$

Man nehme noch irgend eine andere Function $F(x, m + Dm)$, wo der willkürliche Constante $(m + Dm)$ vorkommt, und wo die Differenz Dm so eingerichtet werden kann, dass durch $F(x, m + Dm)$ das Integral I denselben Werth bekommt, wie durch $\varphi(x, m)$. Man verwandle $F(x, m + Dm)$ mit Hilfe des mutirenden Elementes $\varkappa$ zunächst in folgende Reihe

$$\text{IV)}\quad F(x, m + Dm) = \varphi(x, m + Dm) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x, m + Dm)$$
$$+ \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x, m + Dm) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x, m + Dm) + \ldots\ldots$$

und wenn man die Differenz Dm in die Reihe

$$\varkappa \cdot \vartheta m + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 m + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 m + \ldots\ldots$$

zerlegt, so geht die Reihe IV über in

$$\text{V)}\quad F(x, m + Dm) = \varphi(x, m) + \varkappa \cdot \left(\delta\varphi(x, m) + \frac{d_m\varphi(x, m)}{dm} \cdot \vartheta m\right)$$
$$+ \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\delta^2\varphi(x, m) + \frac{d_m\varphi(x, m)}{dm} \cdot \vartheta^2 m + 2 \cdot \frac{d_m\delta\varphi(x, m)}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_m^2\varphi(x, m)}{dm^2} \cdot \vartheta m^2\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Diese Reihe kann man auch auf folgende Weise schreiben

$$\text{VI)}\quad y + {}_{(}\Delta_{)}y = y + \varkappa \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right) + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\delta^2 y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta^2 m\right.$$
$$\left. + 2 \cdot \frac{d_m\delta y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_m^2 y}{dm^2} \cdot \vartheta m^2\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder noch kürzer auf folgende Weise

$$\text{VII)}\quad y + {}_{(}\Delta_{)}y = y + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \ldots\ldots$$

Die Bedeutung von ${}_{(}\delta_{)}y$, ${}_{(}\delta_{)}^2y$, erkennt man, wenn man die Reihen VI und VII miteinander vergleicht.

Wenn nun das Integral I in den beiden Fällen, man mag $\varphi(x, m)$ oder $F(x, m + Dm)$ an die Stelle des y einsetzen, den nemlichen Werth bekommen soll; so muss folgende Gleichung bestehen

$$\text{VIII)}\quad \int_a^\alpha \mathfrak{F}(x, \varphi(x, m)) \cdot dx = \int_a^\alpha \mathfrak{F}(x, F(x, m + Dm)) \cdot dx$$

Wenn man statt $F(x, m + Dm)$ die gleichbedeutende Reihe VI einsetzt; so geht Gleichung VIII über in

$$\int_a^\alpha \mathfrak{F}(x, \varphi(x, m)) \cdot dx = \int_a^\alpha \mathfrak{F}(x, \varphi(x, m)) \cdot dx + \varkappa \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}}{dy} \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dx$$
$$+ \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \int_a^\alpha \left[\frac{d_y\mathfrak{F}}{dy} \cdot \left(\delta^2 y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta^2 m + 2 \cdot \frac{d_m\delta y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_m^2 y}{dm^2} \cdot \vartheta m^2\right)\right.$$
$$\left. + \frac{d_y^2\mathfrak{F}}{dy^2} \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right)^2\right] \cdot dx$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Da aber, eben weil bei Untersuchungen über das Grösste und Kleinste der Werth der Function F(x, m + Dm) dem Werthe der Function $\varphi(x, m)$ nächstanliegen muss, das $\varkappa$ entweder als positiv oder als negativ im Momente des Verschwindens befindlich ist; so kann letztere Gleichung nur wahr sein, wenn einzeln stattfindet:

$$\text{IX)} \quad \int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}}{dy} \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dx = 0$$

$$\text{X)} \quad \int_a^\alpha \left[\frac{d_y\mathfrak{F}}{dy} \cdot \left(\delta^2 y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta^2 m + 2 \cdot \frac{d_m \delta y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_m^2 y}{dm^2} \cdot \vartheta m^2\right) + \frac{d_y^2\mathfrak{F}}{dy^2} \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right)^2\right] \cdot dx = 0$$

etc. etc.

1) Weil die Integration ganz unabhängig ist von ϑm, so kann Gleichung IX auch auf folgende Weise dargestellt werden

$$\text{XI)} \quad \int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}}{dy} \cdot \delta y \cdot dx + \left(\int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}}{dy} \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot dx\right) \cdot \vartheta m = 0$$

und wenn man für δy eine ganz beliebige Function von x und m nimmt, so gibt sich aus dieser Gleichung (welche mit IX ganz gleichbedeutend ist) der dem jedesmaligen δy entsprechende Werth des ϑm.

2) Man kann auch in Gleichung X die Elemente ϑm und $\vartheta^2 m$ ausserhalb des Integralzeichens setzen, weil auch hier die Integration von diesen beiden Elementen unabhängig ist. Nun muss man jene beliebige Function von x und m, welche man an die Stelle des δy in Gleichung IX oder XI bereits eingesetzt hat, auch in Gleichung X einsetzen; und wenn man hierauf auch für $\delta^2 y$ eine ganz beliebige Function von x und m in X einsetzt, so ergibt sich der entsprechende Werth von $\vartheta^2 m$, da ja ϑm schon aus Gleichung IX oder XI bestimmt ist.

Und so fort.

Substituirt man die Reihe VI in Gleichung II an die Stelle des y, so bekommt man nach und nach

$$\text{XII)} \quad {}_{(}\delta_{)}U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_y V}{dy} \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right) \cdot dx$$

$$\text{XIII)} \quad {}_{(}\delta_{)}^2 U = \int_a^\alpha \left[\frac{d_y V}{dy} \cdot \left(\delta^2 y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta^2 m + 2 \cdot \frac{d_m \delta y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_m^2 y}{dm^2} \cdot \vartheta m^2\right) + \frac{d_y^2 V}{dy^2} \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right)^2\right] \cdot dx$$

etc. etc.

Es kommt nun darauf an, dass man die (dem Werthe nach) abhängigen Elemente ϑm und $\vartheta^2 m$ aus den Gleichungen XII und XIII eliminire; und zu diesem Ende gebe man der Gleichung XII folgende Form

$$\text{XIV)} \quad {}_{(}\delta_{)}U = \int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y \cdot dx + \left(\int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot dx\right) \cdot \vartheta m$$

Aus XI folgt

$$\text{XV)} \quad \vartheta m = -\frac{1}{\int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}}{dy} \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot dx} \times \int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}}{dy} \cdot \delta y \cdot dx$$

und wenn man diesen Ausdruck an die Stelle des ϑm in XIV substituirt, so bekommt man

$$\text{XVI)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = \int_a^\alpha \frac{d_yV}{dy}\cdot\delta y\cdot dx - \frac{\int_a^\alpha \frac{d_yV}{dy}\cdot\frac{d_my}{dm}\cdot dx}{\int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}}{dy}\cdot\frac{d_my}{dm}\cdot dx} \times \int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}}{dy}\cdot\delta y\cdot dx$$

Wenn man nun die für y gewählte Function $\varphi(x, m)$ in dem Quotienten $\dfrac{\int_a^\alpha \frac{d_yV}{dy}\cdot\frac{d_my}{dm}\cdot dx}{\int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}}{dy}\cdot\frac{d_my}{dm}\cdot dx}$ substituirt, so bekommt er einen nach x constanten Werth, welcher mit — L bezeichnet sein mag. Dabei geht Gleichung XVI über in

$${}_{(}\delta_{)}U = \int_a^\alpha \frac{d_yV}{dy}\cdot\delta y\cdot dx + L\cdot\int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}}{dy}\cdot\delta y\cdot dx$$

Weil aber der Ausdruck L nach x constant ist, so kann man ihn auch unterhalb des Integralzeichens setzen; und so nimmt letztere Gleichung folgende Form an:

$$\text{XVII)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_yV}{dy} + L\cdot\frac{d_y\mathfrak{F}}{dy}\right)\cdot\delta y\cdot dx$$

Soll nun ${}_{(}\delta_{)}U = 0$ werden, so findet folgende identische Gleichung statt

$$\text{XVIII)}\quad \frac{d_yV}{dy} + L\cdot\frac{d_y\mathfrak{F}}{dy} = 0$$

Daraus folgt durch algebraische Absonderung

$$\text{XIX)}\quad y = f(x, L)$$

und man kann jetzt m statt L oder statt eines aus L gebildeten Ausdruckes setzen, so dass man dann

$$\text{XX)}\quad y = \varphi(x, m)$$

bekommt.

Zu dem ganz gleichen Resultate kann man auch auf folgendem etwas kürzeren Wege gelangen.

Man multiplicire Gleichung IX mit einem (vorerst unbekannten, aber jedenfalls) nach x constanten Ausdrucke L; so ist auch noch

$$L\cdot\int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}}{dy}\cdot\left(\delta y + \frac{d_my}{dm}\cdot\vartheta m\right)\cdot dx = 0$$

Dieses Product kann man zu XII addiren, ohne dass ${}_{(}\delta_{)}U$ sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$${}_{(}\delta_{)}U = \int_a^\alpha \frac{d_yV}{dy}\cdot\left(\delta y + \frac{d_my}{dm}\cdot\vartheta m\right)\cdot dx + L\cdot\int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}}{dy}\cdot\left(\delta y + \frac{d_my}{dm}\cdot\vartheta m\right)\cdot dx$$

Aber eben weil L nach x constant ist, so kann man dieses L auch unter das Integralzeichen setzen; und man bekommt

$$\text{XXI)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_yV}{dy} + L\cdot\frac{d_y\mathfrak{F}}{dy}\right)\cdot\delta y + \left(\frac{d_yV}{dy} + L\cdot\frac{d_y\mathfrak{F}}{dy}\right)\cdot\frac{d_my}{dm}\cdot\vartheta m\right]\cdot dx$$

Das dem Werthe nach abhängige ϑm fällt weg, wenn eine von folgenden zwei identischen Gleichungen stattfindet, d. h. wenn entweder

$$\text{XXII)}\quad \frac{d_my}{dm} = 0$$

oder wenn

$$\text{XXIII)}\quad \frac{d_y V}{dy} + L \cdot \frac{d_y \mathfrak{F}}{dy} = 0$$

ist; und in beiden Fällen zieht sich Gleichung XXI zurück auf

$$\text{XXIV)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy} + L \cdot \frac{d_y \mathfrak{F}}{dy}\right) \cdot \delta y \cdot dx$$

1) Aus der Partialdifferentialgleichung $\frac{d_m y}{dm} = 0$ folgt $y = \chi(x)$, d. h. eine ganz willkürliche Function von x, worin aber das Element m nicht vorkommt, eben weil $\frac{d_m y}{dm} = 0$ ist. Da nun die ganze Untersuchung darauf gegründet ist, dass in der für y gesuchten Function der Constante m enthalten sei; so darf nicht $\frac{d_m y}{dm} = 0$ gesetzt werden.

2) Es bleibt also nichts anderes übrig, als Gleichung XXIII bestehen zu lassen. Dabei fällt auch gleichzeitig der zu δy gehörige Factor hinweg, und ${}_{(}\delta_{)}U$ wird zu Null. Gleichung XXIII ist aber die nemliche, wie XVIII, d. h. man bekommt wieder $y = f(x, L)$ oder $y = \varphi(x, m)$.

Wenn nun das Integral I den bestimmt vorgeschriebenen Werth g haben soll, so lässt sich der Constante m aus der Gleichung

$$\text{XXV)}\quad \int_a^\alpha \mathfrak{F}(x, \varphi(x, m)) \cdot dx = g$$

bestimmen. Ist aber der Werth dieses Integrals nicht vorgeschrieben, so muss irgend eine andere Bedingung vorgeschrieben sein; widrigenfalls ist und bleibt der Constante m willkürlich.

Man multiplicire nun Gleichung X mit dem bereits angewendeten Ausdrucke L, so ist auch noch

$$L \cdot \int_a^\alpha \left[\frac{d_y \mathfrak{F}}{dy}\left(\delta^2 y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta^2 m + 2 \cdot \frac{d_m \delta y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_m^2 y}{dm^2} \cdot \vartheta m^2\right) + \frac{d_y^2 \mathfrak{F}}{dy^2} \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right)^2\right] \cdot dx = 0$$

Dieses Product kann man zu Gleichung XIII addiren, ohne dass ${}_{(}\delta^2_{)}U$ sich im Geringsten ändert. Man vollziehe die Addition, bringe den (nach x constanten) Ausdruck L unter das Integralzeichen, und beachte Gleichung XXIII; so bleibt nur

$$\text{XXVI)}\quad {}_{(}\delta^2_{)}U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y^2 V}{dy^2} + L \cdot \frac{d_y^2 \mathfrak{F}}{dy^2}\right) \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right)^2 \cdot dx$$

Man hat nun noch das abhängige Element ϑm zu eliminiren, was mittelst Gleichung XV geschieht. Man erkennt aber gradezu, dass diese Elimination nicht mehr nöthig ist, sondern dass es nur von dem Factor $\frac{d_y^2 V}{dy^2} + L \cdot \frac{d_y^2 \mathfrak{F}}{dy^2}$ abhangt, ob ein Maximumstand oder Minimum-stand stattfindet. Eine solche Elimination findet man am Ende der Aufgaben 221 und 233 ausgeführt.

Untersuchung 67.

Es seien $\mathfrak{F}'(x, y)$, $\mathfrak{F}''(x, y)$ und V drei mit den Elementen x und y gebildete Ausdrücke. Man sucht aus allen jenen Functionen y von x, bei welchen nicht nur das bestimmte Integral

$$\text{I)} \int_a^\alpha \mathfrak{F}'(x, y) \cdot dx$$

einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth, sondern bei welchen allen auch noch das bestimmte Integral

$$\text{II)} \int_a^\alpha \mathfrak{F}''(x, y) \cdot dx$$

einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt, diejenige heraus, von welcher das zwischen denselben Gränzen erstreckte Integral

$$\text{III)} \quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx$$

zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande gemacht wird.

(Man vergleiche den ersten theoretischen Nachtrag am Ende des zweiten Bandes).

§. 266. Man nehme für y irgend eine Function $\varphi(x, m, n)$, in welcher zwei willkürliche Constanten m und n vorkommen, die in dem Falle, wo die beiden Integrale I und II bezüglich die bestimmt vorgeschriebenen Werthe g und h bekommen sollen, so eingerichtet werden können, dass dieser Vorschrift genügt wird; und wenn man die Function $\varphi(x, m, n)$ in Gleichung III einsetzt, so bekommt man für U einen aus a und α gebildeten Ausdruck, welcher dargestellt sein mag durch

$$\text{IV)} \quad U' = \psi(\alpha) - \psi(a)$$

Man nehme noch irgend eine andere Function $F(x, m + Dm, n + Dn)$, wo die willkürlichen Constanten $(m + Dm)$ und $(n + Dn)$ vorkommen, und wo die Differenzen Dm und Dn so eingerichtet werden können, dass durch die Function $F(x, m + Dm, n + Dn)$ die beiden Integrale I und II bezüglich dieselben Werthe bekommen, wie durch die Function $\varphi(x, m, n)$. Man verwandle $F(x, m + Dm, n + Dn)$ mit Hilfe des mutirenden Elementes $\varkappa$ zunächst in folgende Reihe

$$\text{V)} \quad F(x, m + Dm, n + Dn) = \varphi(x, m + Dm, n + Dn) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x, m + Dm, n + Dn)$$
$$+ \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2\varphi(x, m + Dm, n + Dn) + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3\varphi(x, m + Dm, n + Dn)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

und wenn man die Differenzen Dm und Dn bezüglich in die Reihen

$$\varkappa \cdot \vartheta m + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 m + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 m + \ldots\ldots$$

und

$$\varkappa \cdot \vartheta n + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 n + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 n + \ldots\ldots$$

zerlegt, so geht die Reihe V über in

$$\text{VI)} \quad F(x, m + Dm, n + Dn) = \varphi(x, m, n)$$
$$+ \varkappa \cdot \left(\delta\varphi(x, m, n) + \frac{d_m\varphi(x, m, n)}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n\varphi(x, m, n)}{dn} \cdot \vartheta n\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Diese Reihe kann man auch auf folgende Weise schreiben

$$\text{VII)} \quad y + {}_{(}\Delta_{)}y = y + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 y + \ldots\ldots$$

wo aber

$$\text{VIII)}\quad {}_{(}\delta_{)}y = \delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n$$

$$\text{IX)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2 y = \delta^2 y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta^2 m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta^2 n + 2 \cdot \frac{d_m \delta y}{dm} \cdot \vartheta m + 2 \cdot \frac{d_n \delta y}{dn} \cdot \vartheta n$$

$$+ \frac{d_m^2 y}{dm^2} \cdot \vartheta m^2 + 2 \cdot \frac{d_m d_n y}{dm.dn} \cdot \vartheta m \cdot \vartheta n + \frac{d_n^2 y}{dn^2} \cdot \vartheta n^2$$

etc. etc.

ist. Wenn nun das Integral I in beiden Fällen, man mag die Function $\varphi(x, m, n)$ oder $F(x, m + Dm, n + Dn)$ an die Stelle des y einsetzen, den nemlichen Werth bekommen soll; so muss folgende Gleichung bestehen

$$\text{X)}\quad \int_a^\alpha \mathfrak{F}'(x, \varphi(x, m, n)) \cdot dx = \int_a^\alpha \mathfrak{F}'(x, F(x, m + Dm, n + Dn)) \cdot dx$$

Wenn ferner das Integral II in den beiden Fällen, man mag die Function $\varphi(x, m, n)$ oder $F(x, m + Dm, n + Dn)$ an die Stelle des y einsetzen, den nemlichen Werth bekommen soll; so muss auch noch folgende Gleichung bestehen

$$\text{XI)}\quad \int_a^\alpha \mathfrak{F}''(x, \varphi(x, m, n)) \cdot dx = \int_a^\alpha \mathfrak{F}''(x, F(x, m + Dm, n + Dn)) \cdot dx$$

Wenn man nun an die Stelle von $F(x, m + Dm, n + Dn)$ die ganz gleichbedeutende Reihe VII einsetzt; so gehen die Gleichungen X und XI bezüglich über in

$$\text{XII)}\quad \int_a^\alpha \mathfrak{F}'(x, \varphi(x, m, n)) \cdot dx = \int_a^\alpha \mathfrak{F}'(x, \varphi(x, m, n)) \cdot dx + \varkappa \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y \mathfrak{F}'}{dy} \cdot {}_{(}\delta_{)}y \cdot dx$$

$$+ \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d_y \mathfrak{F}'}{dy} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{d_y^2 \mathfrak{F}}{dy^2} \cdot {}_{(}\delta_{)}y^2 \right) \cdot dx + \ldots\ldots$$

und

$$\text{XIII)}\quad \int_a^\alpha \mathfrak{F}''(x, \varphi(x, m, n)) \cdot dx = \int_a^\alpha \mathfrak{F}''(x, \varphi(x, m, n)) \cdot dx$$

$$+ \varkappa \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y \mathfrak{F}''}{dy} \cdot {}_{(}\delta_{)}y \cdot dx + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d_y \mathfrak{F}''}{dy} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{d_y^2 \mathfrak{F}}{dy^2} \cdot {}_{(}\delta_{)}y^2 \right) \cdot dx + \ldots\ldots$$

Da aber, eben weil bei Untersuchungen über das Grösste und Kleinste der Werth der Function $F(x, m + Dm, n + Dn)$ dem Werthe der Function $\varphi(x, m, n)$ nächstanliegen muss, das $\varkappa$ entweder als positiv oder als negativ im Momente des Verschwindens befindlich ist; so können die beiden letzteren Gleichungen nur wahr sein, wenn einzeln stattfindet:

$$\text{XIV)}\quad \int_a^\alpha \frac{d_y \mathfrak{F}'}{dy} \cdot {}_{(}\delta_{)}y \cdot dx = 0$$

$$\text{XV)}\quad \int_a^\alpha \frac{d_y \mathfrak{F}''}{dy} \cdot {}_{(}\delta_{)}y \cdot dx = 0$$

$$\text{XVI)}\quad \int_a^\alpha \left(\frac{d_y \mathfrak{F}'}{dy} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{d_y^2 \mathfrak{F}'}{dy^2} \cdot {}_{(}\delta_{)}y^2 \right) \cdot dx = 0$$

$$\text{XVII)}\quad \int_a^\alpha \left(\frac{d_y \mathfrak{F}''}{dy} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{d_y^2 \mathfrak{F}''}{dy^2} \cdot {}_{(}\delta_{)}y^2 \right) \cdot dx = 0$$

etc. etc.

Führt man in Gleichung XIV und XV für ${}_{(\delta)}y$ seinen (in VIII aufgesellten) Ausdruck ein, so bekommt man bezüglich

$$\text{XVIII)} \quad \int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}'}{dy} \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n\right) \cdot dx = 0$$

$$\text{XIX)} \quad \int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}''}{dy} \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n\right) \cdot dx = 0$$

Man bringe die beiden Elemente ϑm und ϑn, weil die Integration von ihnen unabhängig ist, ausserhalb des Integralzeichens; so gehen die beiden letzteren Gleichungen bezüglich über in

$$\text{XX)} \quad \int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}'}{dy} \cdot \delta y \cdot dx + \left(\int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}'}{dy} \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot dx\right) \cdot \vartheta m$$
$$+ \left(\int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}'}{dy} \cdot \frac{d_n y}{dn} \cdot dx\right) \cdot \vartheta n = 0$$

$$\text{XXI)} \quad \int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}''}{dy} \cdot \delta y \cdot dx + \left(\int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}''}{dy} \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot dx\right) \cdot \vartheta m$$
$$+ \left(\int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}''}{dy} \cdot \frac{d_n y}{dn} \cdot dx\right) \cdot \vartheta n = 0$$

1) Wenn man für δy eine ganz beliebige Function von x, m, n nimmt, so ergeben sich aus beiden letzteren Gleichungen die dem jedesmaligen δy entsprechenden Werthe des ϑm und des ϑn.

2) Man kann auch in den Gleichungen XVI und XVII die Elemente ϑm, ϑn, $\vartheta^2 m$ und $\vartheta^2 n$ ausserhalb des Integralzeichens setzen, weil auch hier die Integration von diesen Elementen unabhängig ist. Nun muss man jene beliebige Function von x, m, n, welche man an die Stelle des δy in XX und XXI eingesetzt hat, auch in XVI und XVII einsetzen; und wenn man hierauf auch für $\delta^2 y$ eine ganz beliebige Function von x, m, n in XVI und XVII einsetzt, so ergeben sich die entsprechenden Werthe von $\vartheta^2 m$ und $\vartheta^2 n$, da ja die Werthe von ϑm und ϑn schon bestimmt sind.

Und so fort.

Substituirt man die Reihe VII in Gleichung III an die Stelle des y, so bekommt man nach und nach

$$\text{XXII)} \quad {}_{(\delta)}U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y + \frac{d_y V}{dy} \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_y V}{dy} \cdot \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n\right) \cdot dx$$

$$\text{XXIII)} \quad {}_{(\delta)}^2 U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy} \cdot {}_{(\delta)}^2 y + \frac{d_y^2 V}{dy^2} \cdot {}_{(\delta)}y^2\right) \cdot dx$$

etc. etc.

wo ${}_{(\delta)}y$ und ${}_{(\delta)}^2 y$ die in VIII und IX gegebene Bedeutung haben. Es kommt nun darauf an, dass man die (dem Werthe nach) abhängigen Elemente ϑm, ϑn, $\vartheta^2 m$, $\vartheta^2 n$ aus den Gleichungen XXII und XXIII eliminire; und zu diesem Ende gebe man der Gleichung XXII folgende Form:

$$\text{XXIV)} \quad {}_{(\delta)}U = \int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y \cdot dx + \left(\int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot dx\right) \cdot \vartheta m$$
$$+ \left(\int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \frac{d_n y}{dn} \cdot dx\right) \cdot \vartheta n$$

Wenn man nun die für y gewählte Function $\varphi(x, m, n)$ an die Stelle des y einsetzt,

so bekommen die sechs Integrale $\int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}'}{dy} \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot dx$, $\int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}'}{dy} \cdot \frac{d_n y}{dn} \cdot dx$, $\int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}''}{dy} \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot dx$, $\int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}''}{dy} \cdot \frac{d_n y}{dn} \cdot dx$, $\int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot dx$, $\int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \frac{d_n y}{dn} \cdot dx$ Werthe, welche nach x constant sind. Man bezeichne sie bezüglich mit A′, B′, A″, B″, A‴, B‴; und die Gleichungen XX, XXI, XXIV gehen bezüglich über in

$$\int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}'}{dy} \cdot \delta y \cdot dx + A' \cdot \vartheta m + B' \cdot \vartheta n = 0$$

$$\int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}''}{dy} \cdot \delta y \cdot dx + A'' \cdot \vartheta m + B'' \cdot \vartheta n = 0$$

$$(\delta)U = \int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y \cdot dx + A''' \cdot \vartheta m + B''' \cdot \vartheta n$$

Eliminirt man wirklich ϑm und ϑn aus dieser letzten Gleichung, so geht sie über in

$$(\delta)U = \int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y \cdot dx + \frac{A''' \cdot B' - A' \cdot B'''}{A' \cdot B'' - A'' \cdot B'} \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}''}{dy} \cdot \delta y \cdot dx$$
$$- \frac{A''' \cdot B'' - A'' \cdot B'''}{A' \cdot B'' - A'' \cdot B'} \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}'}{dy} \cdot \delta y \cdot dx$$

Setzt man aber zur Abkürzung K statt $-\frac{A''' \cdot B'' - A'' \cdot B'''}{A' \cdot B'' - A'' \cdot B'}$ und L statt $\frac{A''' \cdot B' - A' \cdot B'''}{A' \cdot B'' - A'' \cdot B'}$; so geht letztere Gleichung über in

$$(\delta)U = \int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \delta y \cdot dx + K \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}'}{dy} \cdot \delta y \cdot dx + L \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}''}{dy} \cdot \delta y \cdot dx$$

Weil aber die beiden Ausdrücke K und L nach x constant sind, so kann man sie auch unterhalb des Integralzeichens setzen; und so nimmt letztere Gleichung folgende Form an:

$$\text{XXV)} \quad (\delta)U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy} + K \cdot \frac{d_y\mathfrak{F}'}{dy} + L \cdot \frac{d_y\mathfrak{F}''}{dy}\right) \cdot \delta y \cdot dx$$

Soll nun $(\delta)U = 0$ werden, so findet folgende identische Gleichung statt

$$\text{XXVI)} \quad \frac{d_y V}{dy} + K \cdot \frac{d_y\mathfrak{F}'}{dy} + L \cdot \frac{d_y\mathfrak{F}''}{dy} = 0$$

Daraus folgt durch algebraische Absonderung

$$\text{XXVII)} \quad y = f(x, K, L)$$

Man kann jetzt n statt L oder statt irgend eines aus L gebildeten Ausdruckes setzen; ebenso kann man m statt K oder statt irgend eines aus K gebildeten Ausdruckes setzen. Man hat dann

$$\text{XXVIII)} \quad y = \varphi(x, m, n)$$

Zu ganz gleichen Resultaten kann man auf folgendem kürzerem Wege gelangen. Man multiplicire Gleichung XVIII mit einem (vorerst noch unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Ausdrucke K; so ist auch noch

$$K \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y\mathfrak{F}'}{dy}\left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n\right) \cdot dx = 0$$

Man multiplicire ebenso Gleichung XIX mit einem (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nach x constanten Ausdrucke L; so ist auch noch

$$L \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y \mathfrak{F}''}{dy} \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n\right) \cdot dx = 0$$

Diese beiden Producte kann man zu XXII addiren, ohne dass $_{(\delta)}U$ sich im Geringsten ändert, d. h. es ist noch vollkommen genau

$$_{(\delta)}U = \int_a^\alpha \frac{d_y V}{dy} \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n\right) \cdot dx$$
$$+ K \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y \mathfrak{F}'}{dy} \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n\right) \cdot dx$$
$$+ L \cdot \int_a^\alpha \frac{d_y \mathfrak{F}''}{dy} \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n\right) \cdot dx$$

Aber eben weil K und L nach x constant sind, so kann man diese Ausdrücke auch innerhalb des Integralzeichens bringen; und letztere Gleichung geht über in

$$\text{XXIX)} \quad _{(\delta)}U = \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_y V}{dy} + K \cdot \frac{d_y \mathfrak{F}'}{dy} + L \cdot \frac{d_y \mathfrak{F}''}{dy}\right) \cdot \delta y\right.$$
$$+ \left(\frac{d_y V}{dy} + K \cdot \frac{d_y \mathfrak{F}'}{dy} + L \cdot \frac{d_y \mathfrak{F}''}{dy}\right) \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m$$
$$\left. + \left(\frac{d_y V}{dy} + K \cdot \frac{d_y \mathfrak{F}'}{dy} + L \cdot \frac{d_y \mathfrak{F}''}{dy}\right) \cdot \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n\right] \cdot dx$$

Die dem Werthe nach abhängigen Elemente ϑm und ϑn können nun wegfallen, wenn entweder gleichzeitig folgende zwei identische Gleichungen stattfinden:

$$\text{XXX)} \quad \frac{d_m y}{dm} = 0, \text{ und XXXI)} \quad \frac{d_n y}{dn} = 0$$

oder wenn die einzige identische Gleichung stattfindet:

$$\text{XXXII)} \quad \frac{d_y V}{dy} + K \cdot \frac{d_y \mathfrak{F}'}{dy} + L \cdot \frac{d_y \mathfrak{F}''}{dy} = 0$$

und in beiden Fällen zieht sich Gleichung XXIX zurück auf

$$\text{XXXIII)} \quad _{(\delta)}U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y V}{dy} + K \cdot \frac{d_y \mathfrak{F}'}{dy} + L \cdot \frac{d_y \mathfrak{F}''}{dy}\right) \cdot \delta y \cdot dx$$

1) Man sehe zu, ob gleichzeitig die beiden Gleichungen $\frac{d_m y}{dm} = 0$ und $\frac{d_n y}{dn} = 0$ stattfinden. Aus der Partialdifferentialgleichung $\frac{d_m y}{dm} = 0$ folgt $y = \chi(x, n)$, d. h. eine ganz willkürliche Function von x und n; und daraus folgt $\frac{d_n y}{dn} = \frac{d_n \chi(x, n)}{dn}$. Weil aber auch Gleichung XXXI erfüllt werden muss, so muss $\frac{d_n \chi(x, n)}{dn} = 0$ sein. Es kann also nur $y = \chi(x)$, d. h. y kann nur eine willkürliche Function von x sein, und darf weder m noch n enthalten, wenn sie den beiden Gleichungen XXX und XXXI zugleich genügen soll. Da aber die ganze Untersuchung darauf begründet ist, dass in der für y gesuchten Function die beiden Constanten m und n gleichzeitig enthalten seien; so darf weder $\frac{d_m y}{dm} = 0$ noch $\frac{d_n y}{dn} = 0$ gesetzt werden.

2) Es bleibt also nur übrig, die Gleichung XXXII stattfinden zu lassen. Dabei fällt auch der zu δy gehörige Factor weg, und $_{(\delta)}U$ wird zu Null. Gleichung XXXII ist aber die nemliche, wie XXVI; und man bekommt wieder $y = f(x, K, L)$ oder $y = \varphi(x, m, n)$.

Wenn nun die Integrale I und II bezüglich die bestimmt vorgeschriebenen Werthe g und h haben sollen, so lassen sich die Constanten m und n aus den Gleichungen

$$\int_a^\alpha \mathfrak{F}'(x, \varphi(x, m, n)) \cdot dx = g$$

$$\int_a^\alpha \mathfrak{F}''(x, \varphi(x, m, n)) \cdot dx = h$$

bestimmen. Ist aber nur der Werth eines dieser Integrale vorgeschrieben, so muss noch irgend eine andere Bedingung gegeben sein; widrigenfalls bleibt einer der beiden Constanten m und n willkürlich. Ist aber der Werth von keinem dieser beiden Integrale vorgeschrieben, so müssen irgend zwei Bedingungen gegeben sein, wenn alle beiden Constanten m und n bestimmt werden sollen.

Man multiplicire nun die Gleichungen XVI und XVII bezüglich mit den bereits angewendeten (von x unabhängigen) Ausdrücken K und L, so ist auch noch

$$K \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d_y\mathfrak{F}'}{dy} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{d_y^2\mathfrak{F}'}{dy^2} \cdot {}_{(}\delta_{)} y^2\right) \cdot dx = 0$$

und

$$L \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d_y\mathfrak{F}''}{dy} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{d_y^2\mathfrak{F}''}{dy^2} \cdot {}_{(}\delta_{)} y^2\right) \cdot dx = 0$$

Diese beiden Producte kann man zu Gleichung XXIII addiren, ohne dass ${}_{(}\delta_{)}^2 U$ sich im Geringsten ändert. Man vollziehe die Addition, bringe die (nach x constanten) Ausdrücke K und L unter das Integralzeichen, und beachte Gleichung XXXII; so bekommt man

$${}_{(}\delta_{)}^2 U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_y^2 V}{dy^2} + K \cdot \frac{d_y^2\mathfrak{F}'}{dy^2} + L \cdot \frac{d_y^2\mathfrak{F}''}{dy^2}\right) \cdot \left(\delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n\right)^2 \cdot dx$$

Man hätte nun noch die abhängigen Elemente ϑm und ϑn zu eliminiren, was mittelst der Gleichungen XX und XXI geschieht; allein man erkennt gradezu, dass dieses nicht mehr nöthig ist, sondern dass es von dem Factor

$$\frac{d_y^2 V}{dy^2} + K \cdot \frac{d_y^2\mathfrak{F}'}{dy^2} + L \cdot \frac{d_y^2\mathfrak{F}''}{dy^2}$$

abhangt, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand oder keiner von diesen beiden Zuständen stattfinde.

Untersuchung 68.

Es seien $\mathfrak{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ und V zwei mit den Elementen x, y und $\frac{dy}{dx}$ gebildete Ausdrücke. Man sucht aus allen jenen Functionen y von x, bei welchen das zwischen den bestimmten Gränzen $x = a$ und $x = \alpha$ erstreckte Integral

$$\text{I)} \quad \int_a^\alpha \mathfrak{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \cdot dx$$

einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt, diejenige heraus, von welcher das zwischen den nemlichen Gränzen erstreckte Integral

$$\text{II)} \quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx$$

zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande gemacht wird.

(Man vergleiche den ersten theoretischen Nachtrag am Ende des zweiten Bandes.)

§. 267. Man nehme für y irgend eine Function $\varphi(x, m)$, in welcher ein willkürlicher Constanter m vorkommt, der in dem Falle, wo das Integral I einen bestimmt vorgeschriebenen Werth g bekommen soll, so eingerichtet werden kann, dass dieser Vorschrift genügt wird; und wenn man die Function $\varphi(x, m)$ an die Stelle des y, also $\frac{d\varphi(x, m)}{dx}$ an die Stelle des $\frac{dy}{dx}$ in Gleichung II einführt, so bekommt man für U einen aus a und α gebildeten Ausdruck, welcher dargestellt sein mag durch

$$\text{III)} \quad U' = \psi(\alpha) - \psi(a)$$

Man nehme noch irgend eine andere Function $F(x, m + Dm)$, wo der willkürliche Constante $(m + Dm)$ vorkommt, und wo die Differenz Dm so eingerichtet werden kann, dass durch $F(x, m + Dm)$ das Integrel I denselben Werth bekommt, wie durch $\varphi(x, m)$. Man verwandle $F(x, m + Dm)$ in die Reihe

$$\text{IV)} \quad F(x, m + Dm) = \varphi(x, m) + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 y + \ldots\ldots$$

Daraus folgt, wenn man nach allem x differentiirt,

$$\text{V)} \quad \frac{dF(x, m + Dm)}{dx} = \frac{d\varphi(x, m)}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d_{(}\delta_{)}^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d_{(}\delta_{)}^3 y}{dx} + \ldots$$

Hier ist bekanntlich

$$\text{VI)} \quad {}_{(}\delta_{)}y = \delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m$$

$$\text{VII)} \quad {}_{(}\delta_{)}^2 y = \delta^2 y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta^2 m + 2 \cdot \frac{d_m \delta y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_m^2 y}{dm^2} \cdot \vartheta m^2$$

etc. etc.

und weil m, ϑm, $\vartheta^2 m$ von x unabhängig sind, so folgt aus den beiden letzten Gleichungen

$$\text{VIII)} \quad \frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx} = \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx.dm} \cdot \vartheta m$$

$$\text{IX)} \quad \frac{d_{(}\delta_{)}^2 y}{dx} = \frac{d\delta^2 y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx.dm} \cdot \vartheta^2 m + 2 \cdot \frac{d_x d_m y}{dx.dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_x d_m^2 y}{dx.dm^2} \cdot \vartheta m^2$$

etc. etc.

Wenn nun das Integral I in den beiden Fällen, man mag $\varphi(x, m)$ oder $F(x, m + Dm)$ an die Stelle des y setzen, den nemlichen Werth bekommen soll; so muss folgende Gleichung bestehen

$$\text{X)} \quad \int_a^\alpha \mathfrak{F}\left(x, \varphi(x, m), \frac{d\varphi(x, m)}{dx}\right) \cdot dx = \int_a^\alpha \mathfrak{F}\left(x, F(x, m + Dm), \frac{dF(x, m + Dm)}{dx}\right) \cdot dx$$

Wenn man statt $F(x, m + Dm)$ und $\frac{dF(x, m + Dm)}{dx}$ bezüglich die gleichbedeutenden Reihen IV und V einsetzt, so geht Gleichung X über in

$$\text{XI)} \quad \int_a^\alpha \mathfrak{F}\left(x, \varphi(x, m), \frac{d\varphi(x, m)}{dx}\right) \cdot dx = \int_a^\alpha \mathfrak{F}\left(x, \varphi(x, m), \frac{d\varphi(x, m)}{dx}\right) \cdot dx$$

$$+ \varkappa \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d_y \mathfrak{F}}{dy} \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{d_p \mathfrak{F}}{dp} \cdot \frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx}\right) \cdot dx + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \int_\alpha^a \left(\frac{d_y \mathfrak{F}}{dy} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{d_p \mathfrak{F}}{dp} \cdot \frac{d_{(}\delta_{)}^2 y}{dx}\right.$$

$$\left. + \frac{d_y^2 \mathfrak{F}}{dy^2} \cdot {}_{(}\delta_{)}y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_p \mathfrak{F}}{dy.dp} \cdot {}_{(}\delta_{)}y \cdot \frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx} + \frac{d_p^2 \mathfrak{F}}{dp^2} \cdot \left(\frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hier hat man die (in den Gleichungen VI — IX aufgestellten) Ausdrücke für ${}_{(}\delta_{)}y$,

$\frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx}$, $_{(}\delta_{)}^2y$, $\frac{d_{(}\delta_{)}^2y}{dx}$ einzusetzen. Da aber, eben weil bei Untersuchungen über das Grösste und Kleinste der Werth der Function F(x, m + Dm) dem Werthe der Function φ(x, m) nächstanliegen muss, das $\varkappa$ entweder als positiv oder als negativ im Momente des Verschwindens befindlich ist; so kann letztere Gleichung nur wahr sein, wenn einzeln stattfindet

$$\text{XII)} \quad \int_a^\alpha \left(\frac{d_y\mathfrak{F}}{dy}\cdot{}_{(}\delta_{)}y + \frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\cdot\frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx}\right)\cdot dx = 0$$

$$\text{XIII)} \quad \int_a^\alpha \left(\frac{d_y\mathfrak{F}}{dy}\cdot{}_{(}\delta_{)}^2y + \frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\cdot\frac{d_{(}\delta_{)}^2y}{dx} + \frac{d_y^2\mathfrak{F}}{dy^2}\cdot{}_{(}\delta_{)}y^2 + 2\cdot\frac{d_yd_p\mathfrak{F}}{dy.dp}\cdot{}_{(}\delta_{)}y\cdot\frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx}\right.$$
$$\left. + \frac{d_p^2\mathfrak{F}}{dp^2}\cdot\left(\frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx}\right)^2\right)\cdot dx = 0$$

etc. etc.

Substituirt man die Reihen IV und V bezüglich an die Stelle des y und des $\frac{dy}{dx}$ in Gleichung II, so bekommt man nach und nach

$$\text{XIV)} \quad {}_{(}\delta_{)}U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_yV}{dy}\cdot{}_{(}\delta_{)}y + \frac{d_pV}{dp}\cdot\frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx}\right)\cdot dx$$

$$\text{XV)} \quad {}_{(}\delta_{)}^2U = \int_a^\alpha \left(\frac{d_yV}{dy}\cdot{}_{(}\delta_{)}^2y + \frac{d_pV}{dp}\cdot\frac{d_{(}\delta_{)}^2y}{dx} + \frac{d_y^2V}{dy^2}\cdot{}_{(}\delta_{)}y^2 + 2\cdot\frac{d_yd_pV}{dy.dp}\cdot{}_{(}\delta_{)}y\cdot\frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx}\right.$$
$$\left. + \frac{d_p^2V}{dp^2}\cdot\left(\frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx}\right)^2\right)\cdot dx$$

etc. etc.

Es kommt nun darauf an, dass man die dem Werthe nach abhängigen Elemente ϑm und ϑ^2m aus XIV und XV eliminire. Dazu soll aber für jetzt nur die Multiplicatorenmethode gewählt werden, weil sie, wie man in den zwei vorigen Untersuchungen zur Genüge ersehen hat, sehr bedeutende Bequemlichkeiten bietet. Man multiplicire also auch diesmal die Gleichung XII mit einem (vorerst unbekannten, aber jedenfalls) nach x constanten Ausdrucke K, so ist auch noch

$$K\cdot\int_a^\alpha \left(\frac{d_y\mathfrak{F}}{dy}\cdot{}_{(}\delta_{)}y + \frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\cdot\frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx}\right)\cdot dx = 0$$

Dieses Product kann man zu XIV addiren, ohne dass ${}_{(}\delta_{)}U$ sich im Geringsten ändert. Vollzieht man die Addition, und bringt man den nach x constanten Ausdruck K unter das Integralzeichen; so ist noch vollkommen genau

$$\text{XVI)} \quad {}_{(}\delta_{)}U = \int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_yV}{dy} + K\cdot\frac{d_y\mathfrak{F}}{dy}\right)\cdot{}_{(}\delta_{)}y + \left(\frac{d_pV}{dp} + K\cdot\frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\right)\cdot\frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx}\right]\cdot dx$$

Formt man jetzt um, so bekommt man zunächst

$$\text{XVII)} \quad {}_{(}\delta_{)}U = \left(\frac{d_pV}{dp} + K\cdot\frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\right)_\alpha\cdot{}_{(}\delta_{)}y_\alpha - \left(\frac{d_pV}{dp} + K\cdot\frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\right)_a\cdot{}_{(}\delta_{)}y_a$$
$$+ \int_a^\alpha \left(\frac{d_yV}{dy} + K\cdot\frac{d_y\mathfrak{F}}{dy} - \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{d_pV}{dp} + K\cdot\frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\right)\right)\cdot{}_{(}\delta_{)}y\cdot dx$$

Setzt man aber statt ${}_{(}\delta_{)}y$ seinen Ausdruck hier ein, so bekommt man

$$\text{XVIII)} \quad {}_{(}\delta_{)}U = \left(\frac{d_pV}{dp} + K\cdot\frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\right)_\alpha\cdot\left(\delta y_\alpha + \left(\frac{d_my}{dm}\right)_\alpha\cdot\vartheta m\right) -$$

$$-\left(\frac{d_pV}{dp} + K \cdot \frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\right)_a \cdot \left(\delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m\right)$$

$$+\int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_yV}{dy} + K \cdot \frac{d_y\mathfrak{F}}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_pV}{dp} + K \cdot \frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\right)\right) \cdot \delta y\right.$$

$$\left. + \left(\frac{d_yV}{dy} + K \cdot \frac{d_y\mathfrak{F}}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_pV}{dp} + K \cdot \frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\right)\right) \cdot \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m\right] \cdot dx$$

§. 268. Man lasse hier zunächst das unter dem Integralzeichen befindliche ϑm wegfallen. Dieses geschieht, wenn eine von folgenden zwei identischen Gleichungen stattfindet, d. h. wenn entweder

$$\text{XIX)} \quad \frac{d_m y}{dm} = 0$$

oder wenn

$$\text{XX)} \quad \frac{d_yV}{dy} + K \cdot \frac{d_y\mathfrak{F}}{dy} - \frac{1}{dx} \cdot d\left(\frac{d_pV}{dp} + K \cdot \frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\right) = 0$$

ist. Nun ist schon (aus §. 265) bekannt, dass $\frac{d_m y}{dm} = 0$ verworfen werden muss, und dass man nur Gleichung XX gelten lassen darf. Dabei fällt auch der zu δy gehörige Factor weg, und Gleichung XVIII reducirt sich auf

$$\text{XXI)} \quad {}_{(\delta)}U = \left(\frac{d_pV}{dp} + K \cdot \frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\right)_\alpha \cdot \left(\delta y_\alpha + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_\alpha \cdot \vartheta m\right)$$

$$-\left(\frac{d_pV}{dp} + K \cdot \frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\right)_a \cdot \left(\delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m\right)$$

Integrirt man Gleichung XX, so bekommt man für y eine Function von x, welche ausser K noch zwei andere willkürliche Constanten A und B enthält, d. h. man bekommt

$$\text{XXII)} \quad y = f(x, K, A, B)$$

und man kann jetzt m statt K oder statt eines aus K gebildeten Ausdruckes setzen, so dass man dann

$$\text{XXIII)} \quad y = \varphi(x, m, A, B)$$

bekommt. Damit aber ${}_{(\delta)}U$ vollkommen zu Null werde, muss noch die Gränzengleichung

$$\text{XXIV)} \quad \left(\frac{d_pV}{dp} + K \cdot \frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\right)_\alpha \cdot \left(\delta y_\alpha + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_\alpha \cdot \vartheta m\right)$$

$$-\left(\frac{d_pV}{dp} + K \cdot \frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\right)_a \cdot \left(\delta y_a + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_a \cdot \vartheta m\right) = 0$$

stattfinden, welche bei Bestimmung der Constanten mit benützt werden muss. Man multiplicire nun Gleichung XIII mit dem bereits angewendeten Ausdrucke K, so ist auch noch

$$K \cdot \int_a^\alpha \left(\frac{d_y\mathfrak{F}}{dy} \cdot {}_{(\delta)}^2 y + \frac{d_p\mathfrak{F}}{dp} \cdot \frac{d_{(\delta)}^2 y}{dx} + \frac{d_y^2\mathfrak{F}}{dy^2} \cdot {}_{(\delta)}y^2 + 2 \cdot \frac{d_y d_p\mathfrak{F}}{dy.dp} \cdot {}_{(\delta)}y \cdot \frac{d_{(\delta)}y}{dx}\right.$$

$$\left. + \frac{d_p^2\mathfrak{F}}{dp^2} \cdot \left(\frac{d_{(\delta)}y}{dx}\right)^2\right) \cdot dx = 0$$

Dieses Product kann man zu XV addiren, ohne dass ${}_{(\delta)}^2U$ sich im Geringsten ändert. Man vollziehe die Addition, bringe den (nach x constanten) Ausdruck K unter das Integralzeichen, ordne, forme um, und berücksichtige Gleichung XX; so bekommt man

$$\text{XXV)}\quad {}_{(}\delta_{)}^{2}U = \left(\frac{d_pV}{dp} + K\cdot\frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\right)_\alpha \cdot {}_{(}\delta_{)}^{2}y_\alpha - \left(\frac{d_pV}{dp} + K\cdot\frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\right)_a \cdot {}_{(}\delta_{)}^{2}y_a$$

$$+\int_a^\alpha \left[\left(\frac{d_y^2V}{dy^2} + K\cdot\frac{d_y^2\mathfrak{F}}{dy^2}\right)\cdot {}_{(}\delta_{)}^{2}y + 2\cdot\left(\frac{d_yd_pV}{dy.dp} + K\cdot\frac{d_yd_p\mathfrak{F}}{dy.dp}\right)\cdot {}_{(}\delta_{)}y\cdot\frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{d_p^2V}{dp^2} + K\cdot\frac{d_p^2\mathfrak{F}}{dp^2}\right)\cdot\left(\frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx}\right)^2\right]\cdot dx$$

Hier hat man noch statt ${}_{(}\delta_{)}y$, ${}_{(}\delta_{)}^{2}y$ und $\frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx}$ die Ausdrücke einzusetzen, welche sich in den Gleichungen VI, VII und VIII befinden etc. etc. Allein da man (nach §. 230) der Gleichung XXV ohneweiters folgende Form

$${}_{(}\delta_{)}^{2}U = \left(\frac{d_pV}{dp} + K\cdot\frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\right)_\alpha \cdot {}_{(}\delta_{)}^{2}y_\alpha + \eta_\alpha\cdot{}_{(}\delta_{)}y_\alpha^2 - \left(\frac{d_pV}{dp} + K\cdot\frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\right)_a \cdot {}_{(}\delta_{)}^{2}y_a - \eta_a\cdot{}_{(}\delta_{)}y_a^2$$

$$+\int_a^\alpha \left(\frac{d_p^2V}{dp^2} + K\cdot\frac{d_p^2\mathfrak{F}}{dp^2}\right)\cdot\left(\frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx} + g\cdot{}_{(}\delta_{)}y\right)^2\cdot dx$$

geben kann; so erkennt man, dass man weiter nichts zu thun hat, als den Factor

$$\frac{d_p^2V}{dp^2} + K\cdot\frac{d_p^2\mathfrak{F}}{dp^2}$$

zu untersuchen, um beurtheilen zu können, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet. Hinsichtlich der Gränzengleichung XXIV sollen folgende fünf Fälle unterschieden werden.

Erster Fall. Wenn zwischen y_a und y_α, also auch zwischen den dazugehörigen Mutationscoefficienten gar keine Abhängigkeit stattfindet; so sind ${}_{(}\delta_{)}y_a$ und ${}_{(}\delta_{)}y_\alpha$, wenn sie gleich einerlei Form haben, doch dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander. Dasselbe gilt zwischen ${}_{(}\delta_{)}^{2}y_a$ und ${}_{(}\delta_{)}^{2}y_\alpha$ etc. Die Gleichung XXIV zerfällt also in folgende zwei einzelne

$$\left(\frac{d_pV}{dp} + K\cdot\frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\right)_\alpha = 0 \text{ und } \left(\frac{d_pV}{dp} + K\cdot\frac{d_p\mathfrak{F}}{dp}\right)_a = 0$$

Mittelst dieser zwei Gleichungen kann man die beiden durch die Integration eingegangenen Constanten A und B bestimmen. Wenn ausserdem noch das Integral I den fest vorgeschriebenen Werth g haben soll, so dient die Gleichung $\int_a^\alpha \mathfrak{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\cdot dx = g$ zur Bestimmung des schon ursprünglich vorhandenen Constanten m; wenn aber das Integral I keinen fest vorgeschriebenen Werth haben soll, so muss irgend eine andere Bedingung gegeben sein, widrigenfalls bleibt der Constante m willkürlich.

Zweiter Fall. Wenn zwischen y_a und y_α eine Gleichung $\chi(y_a, y_\alpha) = 0$ gegeben ist, dann kann man aus der Gränzengleichung entweder ${}_{(}\delta_{)}y_a$ oder ${}_{(}\delta_{)}y_\alpha$ eliminiren. Eliminirt man z. B. ${}_{(}\delta_{)}y_a$, so reducirt sich die Gränzengleichung auf folgende Form

$$H\cdot{}_{(}\delta_{)}y_\alpha = 0$$

so dass $H = 0$ ist; und diese Gleichung, verbunden mit $\chi(y_a, y_\alpha) = 0$, reichen hin zur Bestimmung der beiden durch die Integration in $y = \varphi(x, m, A, B)$ eingegangenen Constanten A und B.

Dritter Fall. Ist vorgeschrieben, dass die gesuchte Function $y = \varphi(x, m, A, B)$ nur aus der Zahl derer herausgewählt werden darf, welche alle bei $x = \alpha$ einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth β bekommen; so besteht bei $x = \alpha$ zwischen der gesuchten und allen hier zu betrachtenden Functionen folgende Gleichung:

$$y_\alpha = y_\alpha + \varkappa\cdot{}_{(}\delta_{)}y_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot{}_{(}\delta_{)}^{2}y_\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot{}_{(}\delta_{)}^{3}y_\alpha + \ldots\ldots$$

Diese Gleichung soll bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ gelten, ist also nur möglich, wenn einzeln stattfindet $(\delta)y_\alpha = 0$, $(\delta)^2 y_\alpha = 0$ etc. Diese Gleichungen sind aber gleichbedeutend mit

$$\delta y_\alpha + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_\alpha \cdot \vartheta m = 0$$

$$\delta^2 y_\alpha + \left(\frac{d_m y}{dm}\right)_\alpha \cdot \vartheta^2 m + 2 \cdot \left(\frac{d_m \delta y}{dm}\right)_\alpha \cdot \vartheta m + \left(\frac{d_m^2 y}{dm^2}\right)_\alpha \cdot \vartheta m^2 = 0$$

etc. etc.

Die Gränzengleichung XXIV reducirt sich also jetzt auf

$$\left(\frac{d_p V}{dp} + K \cdot \frac{d_p \mathfrak{F}}{dp}\right)_a \cdot (\delta)y_a = 0$$

d. h. es ist $\left(\frac{d_p V}{dp} + K \cdot \frac{d_p \mathfrak{F}}{dp}\right)_a = 0$. Aus dieser Gleichung lässt sich einer der durch die Integration in $y = \varphi(x, m, A, B)$ eingegangenen Constanten A und B bestimmen; und wenn bei $x = \alpha$ die gesuchte Function den fest gegebenen Werth β haben soll, so hat man noch eine zweite Gleichung $\beta = \varphi(\alpha, m, A, B)$, wodurch sich abermals einer der Constanten A und B bestimmen lässt.

Vierter Fall. Ist vorgeschrieben, dass die gesuchte Function $y = \varphi(x, m, A, B)$ nur aus der Zahl derer herausgewählt werde, welche alle bei $x = a$ einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth b bekommen; so ist jetzt $(\delta)y_a = 0$, $(\delta)^2 y_a = 0$, etc., dagegen $(\delta)y_\alpha$, $(\delta)^2 y_\alpha$, etc. werden nicht zu Null. Der hiesige Fall wird also nach dem Vorgange des vorigen behandelt.

Fünfter Fall. Wenn zwischen y_a und y_α zwei Gleichungen gegeben sind, oder, was dasselbe ist, wenn die Werthe von y_a und y_α fest vorgeschrieben sind; dann bestehen bei $x = a$ und bei $x = \alpha$ zwischen der gesuchten und allen hier zu betrachtenden Functionen folgende zwei Gleichungen:

$$y_a = y_a + \varkappa \cdot (\delta)y_a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\delta)^2 y_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot (\delta)^3 y_a + \ldots\ldots$$

$$y_\alpha = y_\alpha + \varkappa \cdot (\delta)y_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\delta)^2 y_\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot (\delta)^3 y_\alpha + \ldots\ldots$$

Da diese Gleichungen bei dem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ gelten sollen, so sind sie nur möglich, wenn einzeln stattfindet $(\delta)y_a = 0$, $(\delta)y_\alpha = 0$, $(\delta)^2 y_a = 0$, $(\delta)^2 y_\alpha = 0$, etc. Die Gränzengleichung XXIV fällt also jetzt von selbst hinweg.

Untersuchung 69.

Es seien $\mathfrak{F}'\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$, $\mathfrak{F}''\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ und V drei mit den Elementen $x, y, \frac{dy}{dx}$ gebildete Ausdrücke. Man sucht aus allen jenen Functionen y von x, bei welchen nicht nur das bestimmte Integral

$$\text{I)} \int_a^\alpha \mathfrak{F}'\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \cdot dx$$

einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth, sondern bei welchen allen auch noch das bestimmte Integral

$$\text{II)} \int_a^\alpha \mathfrak{F}''\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \cdot dx$$

einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt, diejenige heraus, von welcher das zwischen denselben Gränzen erstreckte Integral

$$\text{III)}\quad U = \int_a^\alpha V \cdot dx$$

zu einem Maximum-stande oder Minimum-stande gemacht wird.

(Man vergleiche den ersten theoretischen Nachtrag am Ende des zweiten Bandes.)

§. 269. Man nehme für y irgend eine Function $\varphi(x, m, n)$, in welcher noch zwei willkürliche Constanten m und n vorkommen, die in dem Falle, wo die beiden Integrale I und II bezüglich die bestimmt vorgeschriebenen Werthe g und h bekommen sollen, so eingerichtet werden können, dass dieser Vorschrift genügt wird; und wenn man die Function $\varphi(x, m, n)$ in Gleichung III einsetzt, so bekommt man für U einen aus a und α gebildeten Ausdruck, welcher dargestellt sein mag durch

$$\text{IV)}\quad U' = \psi(\alpha) - \psi(a)$$

Man nehme noch irgend eine andere Function $F(x, m + Dm, n + Dn)$, wo die willkürlichen Constanten $(m + Dm)$ und $(n + Dn)$ vorkommen, und wo die Differenzen Dm und Dn so eingerichtet werden können, dass durch die Function $F(x, m + Dm, n + Dn)$ die beiden Integrale I und II bezüglich dieselben Werthe bekommen, wie durch die Function $\varphi(x, m, n)$.

Man verwandle $F(x, m + Dm, n + Dn)$ in die Reihe

$$\text{V)}\quad y + {}_{(}\Delta_{)}y = y + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 y + \ldots\ldots$$

Daraus folgt durch Differentiation

$$\text{VI)}\quad \frac{dy}{dx} + \frac{d_{(}\Delta_{)}y}{dx} = \frac{dy}{dx} + \varkappa \cdot \frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx} + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \frac{d_{(}\delta_{)}^2 y}{dx} + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \frac{d_{(}\delta_{)}^3 y}{dx} + \ldots\ldots$$

Hier ist

$${}_{(}\delta_{)}y = \delta y + \frac{d_m y}{dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_n y}{dn} \cdot \vartheta n$$

etc. etc.

Weil aber m und n von x unabhängig sind, so ist

$$\frac{d_{(}\delta_{)}y}{dx} = \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d_x d_m y}{dx.dm} \cdot \vartheta m + \frac{d_x d_n y}{dx.dn} \cdot \vartheta n$$

etc. etc.

Man erkennt nun schon, dass diese Untersuchung nicht weiter fortgeführt zu werden braucht, indem der Weg durch die drei vorigen Untersuchungen hinlänglich angebahnt ist (man sehe die Aufgaben 226, 227, 235, 241).

Zur Lösung solcher Probleme, welche sich auf die vier letzten Untersuchungen beziehen, hat zuerst Euler eine Methode aufgestellt. Sie leidet aber an zwei wesentlichen Gebrechen, wie im ersten theoretischen Nachtrage (am Ende des zweiten Bandes) von mir nachgewiesen ist.

Hierauf hat Lagrange eine andere Methode aufgestellt. Sie leidet gleichfalls an einem grossen Gebrechen, wie ich in demselben theoretischen Nachtrage nachgewiesen habe.

Diese Bemerkung über die Euler'sche und Lagrange'sche Methode musste hier gemacht werden, damit man nicht übersehe, wie wichtig meine Idee der gemischten Mutationen ist. In dieser Hinsicht weise ich auch noch auf §. 259 — 264 zurück, und empfehle namentlich die Aufgaben 178 und 179. Man wird ohneweiters erkennen, welche Vorzüge meine ganz durchgeführte Auflösung dieser Aufgaben vor jenen jedesmal nur theilweise ausgeführten Auflösungen hat, die man anderwärts findet.

Schluss.

Es ist leicht, einzusehen, wie sich dergleichen Untersuchungen, die auf einfache Integrale führen, vervielfältigen und durchführen lassen. Desshalb soll auch ihre Zahl nicht vermehrt werden.

Nun sollten eigentlich noch solche Untersuchungen folgen, welche auf

zweifache, dreifache, etc. Integrale

führen. Allein nachdem durch alles Vorhergehende der Weg auch hierzu hinlänglich angebahnt ist, und weil die betreffenden Aufgaben (248—283) vollständig werden ausgeführt werden; so genügt es, dahin zu verweisen.

Aufgaben

für die

Anwendung des sogenannten Variationscalculs

auf die

Lehre des Grössten und Kleinsten

und auf die andern damit zusammenhangenden Untersuchungen.

ERSTE ABTHEILUNG.

Aufgaben, welche auf Ausdrücke führen, die wirkliche Urfunctionen sind.

Aufgabe 1.

Welche unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven hat in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft, dass sie das Product der zu irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse gehörigen Ordinate und dieser um die Ordinate verminderten Abscisse grösser oder kleiner macht, als es bei der nemlichen Abscisse alle andern der gesuchten Curve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarcurven machen können?

Die hier gestellte Aufgabe, welche einen Maximum-stand oder Minimum-stand sucht, führt auf den allgemeinen Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = y \cdot (x - y)$$

wo x jede beliebige Abscisse und y die jedesmalige Ordinate der gesuchten Curve ist. Die Ordinaten aller der Curven, welche der gesuchten Curve in jedem Punkte nächstanliegen, werden (nach §. 60) dargestellt durch

$$\text{II)}\quad y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots$$

wo $\varkappa$ der Null nächstanliegend, y die gesuchte Function von x, und δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y$ etc. ganz willkürliche reelle Functionen von x sind. Aus I folgt nun

$$\text{III)}\quad \delta U = (x - 2y) \cdot \delta y$$

$$\text{IV)}\quad \delta^2 U = (x - 2y) \cdot \delta^2 y - 2 \cdot \delta y^2$$

Aus $\frac{d_y U}{dy} = 0$ folgt $x - 2y = 0$, d. h. es ist

$$\text{V)}\quad y = \frac{1}{2} \cdot x$$

Die gesuchte Curve ist also diejenige Grade, welche im Anfangspunkte der Coordinaten die Abscissenaxe unter einem Winkel schneidet, dessen goniometrische Tangente $= \frac{1}{2}$.

Da sich jetzt Gleichung IV auf $\delta^2 U = -2 \cdot \delta y^2$ zurückzieht, somit $\delta^2 U$ bei jeder

reellen Function von x, welche man für δy setzt, und bei jedem beliebigen Werthe des x negativ bleibt; so ist $U' = \frac{1}{4} \cdot x^2$ ein Maximum-stand.

Will man aber das Prüfungsmittel durch directe Reihenentwickelung herstellen, so setze man

$$\frac{1}{4} \cdot x^2 + \varDelta U \text{ an die Stelle des } U$$

und

$$\left(\frac{1}{2} \cdot x + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{1}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\right) \text{ oder kurzweg } \left(\frac{1}{2} \cdot x + \varkappa \cdot \mathfrak{P}\right) \text{ statt } y$$

in Gleichung I ein. Dann gibt sich

$$\frac{1}{4} \cdot x^2 + \varDelta U = \left(\frac{1}{2} \cdot x + \varkappa \cdot \mathfrak{P}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot x - \varkappa \cdot \mathfrak{P}\right)$$

Reducirt man soviel als möglich; so bleibt nur

$$\varDelta U = - \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2$$

oder

$$\varDelta U = - \varkappa^2 \cdot \left(\delta y + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\right)^2$$

Hier ist $\varDelta U$ abermals negativ, und somit abermals erwiesen, dass ein Maximum-stand stattfindet. Wenn man bei $\delta^2 U = - 2 \cdot \delta y^2$ den weggelassenen Factor $\frac{\varkappa^2}{1.2}$ wieder hinzusetzt, so bekommt man genau das erste Glied der zuletzt auf directem Wege hergestellten Reihe.

Aufgabe 2.

Welche unter allen auf das nemliche rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven hat in sich einen bestimmten Punkt, der so gelegen ist, dass das Product seiner Ordinate und seiner um die Ordinate verminderten Abscisse nebst dem Producte seiner Abscisse und einer um diese Abscisse verminderten constanten Linie grösser oder kleiner ist, als bei allen andern nächstgelegenen Nachbarpunkten, mögen sie sich nun in der gesuchten Curve oder in den ihr in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarcurven befinden, der Fall sein kann?

Diese Aufgabe, welche einen Maximumwerth eines Maximum-standes oder einen Minimumwerth eines Minimum-standes sucht, führt auf den allgemeinen Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = y \cdot (x - y) + x \cdot (a - x)$$

wo x jede beliebige Abscisse und y die jedesmalige Ordinate der gesuchten Curve ist. Die irgend einem beliebigen Punkte nächstgelegenen (sowohl in der gesuchten als in allen nächstanliegenden Nachbarcurven befindlichen) Nachbarpunkte haben die Abscisse $(x + Dx)$, welche man (nach §. 76 und 147) auch darstellen kann durch

$$\text{II)} \quad x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x + \ldots\ldots$$

und die Ordinate

$$\text{III)} \quad y + \varkappa \cdot (\delta) y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\delta)^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot (\delta)^3 y + \ldots\ldots$$

wo, wie (aus §. 77) bekannt

$$(\delta) y = \delta y + \frac{dy}{dx} \cdot \vartheta x$$

$$(\delta)^2 y = \delta^2 y + 2 \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + \frac{dy}{dx} \cdot \vartheta^2 x$$

etc. etc.

ist. Da aber die Werthänderung des x ganz unabhängig und willkürlich ist; so wäre es schon hinreichend, statt der Reihe II den einfacheren Ausdruck $x + \varkappa \cdot \vartheta x$ zu setzen, wobei also $\vartheta^2 x = 0$, $\vartheta^3 x = 0$ etc. etc. ist. Nimmt man aber dennoch die Reihe II, so bekommt man

$$\text{IV)} \quad (\delta)U = (x - 2y) \cdot \delta y + \left((x - 2y) \cdot \frac{dy}{dx} + y + a - 2x\right) \cdot \vartheta x$$

$$\text{V)} \quad (\delta)^2 U = (x - 2y) \cdot \delta^2 y + \left((x - 2y) \cdot \frac{dy}{dx} + y + a - 2x\right) \cdot \vartheta^2 x - 2 \cdot \delta y^2$$
$$+ 2\left(\left(1 - 2 \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \delta y + (x - 2y) \cdot \frac{d\delta y}{dx}\right) \cdot \vartheta x$$
$$+ \left((x - 2y) \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \cdot \frac{dy}{dx} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\right) \cdot \vartheta x^2$$

Setzt man $(\delta)U = 0$, d. h. sowohl $\frac{d_{,}U}{dy} = 0$ als auch $\frac{dU}{dx} = 0$; so bekommt man zunächst die identische Gleichung

$$\text{VI)} \quad x - 2y = 0$$

Daraus gibt sich

$$\text{VII)} \quad y = \frac{1}{2} \cdot x$$

Die gesuchte Curve ist also diejenige Grade, welche im Anfangspunkte der Coordinaten die Abscissenaxe unter einem Winkel schneidet, dessen goniometrische Tangente $= \frac{1}{2}$.

Man bekommt auch noch die nichtidentische Gleichung

$$(x - 2y) \cdot \frac{dy}{dx} + y + a - 2x = 0$$

welche sich aber in Folge der Gleichung VI zurückzieht auf

$$\text{VIII)} \quad y + a - 2x = 0$$

Führt man für y den Ausdruck ein, so bekommt man $a - \frac{3x}{2} = 0$, woraus $x = \frac{2a}{3}$ folgt, und es ist

$$\text{IX)} \quad U'' = \frac{a^2}{3}$$

Unter diesen Umständen reducirt sich Gleichung V auf

$$\text{X)} \quad (\delta)^2 U = -2 \cdot \delta y^2 - \frac{3}{2} \cdot \vartheta x^2$$

Dieser Ausdruck bleibt unter allen Umständen negativ; und somit findet ein Maximumwerth eines Maximum-standes statt. Will man das Prüfungsmittel durch directe Reihenentwickelung herstellen, so setze man

$$\left(\frac{a^2}{3} + (\Delta)U\right) \text{ an die Stelle des } U$$

$$\left(\frac{a}{3} + \varkappa \cdot (\delta)y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\delta)^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot (\delta)^3 y + \ldots\ldots\right) \text{ oder kurzweg } \left(\frac{a}{3} + \varkappa \cdot \Pi\right) \text{ statt } y$$

und

$\left(\frac{2a}{3} + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x + \ldots\ldots\right)$ oder kurzweg $\left(\frac{2a}{3} + \varkappa \cdot \mathfrak{P}\right)$ statt x in Gleichung I ein. Dann bekommt man

$$\text{XI)} \quad (\varDelta)U = -\varkappa^2 \cdot (\mathfrak{P}^2 - \Pi \cdot \mathfrak{P} + \Pi^2)$$

Weil aber $y = \frac{1}{2} \cdot x$, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, etc.; und es ist nur $(\delta)y = \delta y + \frac{1}{2} \cdot \vartheta x$, $(\delta)^2 y = \delta^2 y + 2 \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{1}{2} \cdot \vartheta^2 x$ etc. Gleichung XI geht also über in

$$\text{XII)} \quad (\varDelta)U = -\varkappa^2 \cdot \left(\delta y^2 + \frac{3}{4} \cdot \vartheta x^2\right) - \varkappa^3 \cdot (\ldots\ldots) - \ldots\ldots$$

wo man zugleich nach aufsteigenden Potenzen des $\varkappa$ geordnet hat. Wenn man in Gleichung X den weggelassenen Factor $\frac{\varkappa^2}{1.2}$ wieder hinzusetzt, so bekommt man genau das erste Glied der in XII hingestellten Reihe. Die directe Reihenentwickelung hat also dasselbe Prüfungsmittel geliefert, wie der gemischte Mutationscoefficient der zweiten Ordnung; denn das unendlichkleine $(\varDelta)U$ ist unter allen Umständen negativ, und somit ist $U'' = \frac{a^2}{3}$ ein Maximumwerth eines Maximum-standes, d. h. die Coordinaten des gefundenen Punktes geben dem U einen grösseren Werth, als die Coordinaten der nächstgelegenen (sowohl in der gesuchten Curve, als auch in allen nächstanliegenden Nachbarcurven befindlichen) Nachbarpunkte.

Aufgabe 3.

Welche unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven hat in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft, dass sie folgenden von den Coordinaten abhängigen Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = g \cdot x - h \cdot x^2 + 2y + 3 \cdot \sqrt[3]{a \cdot (x-y)^2}$$

bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse grösser oder kleiner macht, als ihn bei der nemlichen Abscisse alle andern der gesuchten Curven in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarcurven machen können?

Der hier vorgelegte Ausdruck ist wegen des allgemeinen Radicals $\sqrt[3]{a \cdot (x-y)^2}$ ein dreiförmiger. Um bequem calculiren zu können, setze man $(\sqrt[3]{1}) \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (x-y)^{\frac{2}{3}}$, und betrachte nur den Factor $(\sqrt[3]{1})$ als dreiförmig, alles Andere aber als einförmig und reell. Statt Gleichung I bekommt man also

$$\text{II)} \quad U = g \cdot x - h \cdot x^2 + 2y + 3 \cdot (\sqrt[3]{1}) \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (x-y)^{\frac{2}{3}}$$

Durch Mutiren bekommt man

$$\text{III)} \quad \delta U = 2 \cdot \left(1 - (\sqrt[3]{1}) \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (x-y)^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \delta y$$

$$\text{IV)} \quad \delta^2 U = 2 \cdot \left(1 - (\sqrt[3]{1}) \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (x-y)^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \delta^2 y - \frac{2}{3} \cdot (\sqrt[3]{1}) \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (x-y)^{-\frac{4}{3}} \cdot \delta y^2$$

Um nun die Aufgabe weiter durchführen zu können, bringe man sie in zwei Abtheilungen, wobei man dem $(\sqrt[3]{1})$ zuerst seine reelle und dann seine zwei imaginären Formen beilegt.

Wenn man dem $(\sqrt[3]{1})$ seine reelle Form beilegt, so gehen die Gleichungen II, III, IV über in

$$\text{V)}\quad U = gx - h \cdot x^2 + 2y + 3 \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (x - y)^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{VI)}\quad \delta U = 2 \cdot \left(1 - a^{\frac{1}{3}} \cdot (x - y)^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \delta y$$

$$\text{VII)}\quad \delta^2 U = 2 \cdot \left(1 - a^{\frac{1}{3}} \cdot (x - y)^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \delta^2 y - \frac{2}{3} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (x - y)^{-\frac{4}{3}} \cdot \delta y^2$$

Hier muss, wie gesagt, Alles als eindeutig und reell betrachtet werden.

Erstens. Aus $\frac{d_y U}{dy} = 0$ folgt $1 - a^{\frac{1}{3}} \cdot (x - y)^{-\frac{1}{3}} = 0$, und daraus gibt sich

$$\text{VIII)}\quad y = x - a$$

Die gesuchte Curve ist also eine grade Linie, welche bei $x = a$ die Abscissenaxe unter einem halben rechten Winkel schneidet.

Gleichung V geht nun über in $U' = a + (2 + g) \cdot x - h \cdot x^2$. Da kein Mutationscoefficient einen andern Factor als $(x - y)$ in den Nenner bekommen kann, und $y = x - a$ ist; so kann auch kein Mutationscoefficient die im Calcul unzulässige Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ annehmen, und die für $\varDelta U$ herzustellende Reihe läuft nur nach ganzen Potenzen des $\varkappa$ fort. Unter diesen Umständen reducirt sich Gleichung VII auf $\delta^2 U = -\frac{2}{3a} \cdot \delta y^2$. Das δy^2 ist bei jeder für δy zu nehmenden reellen Function von x positiv; ist nun auch a positiv, so ist $\delta^2 U$ negativ, und U' ein Maximum-stand; ist aber a negativ, so ist $\delta^2 U$ positiv, und U' ein Minimum-stand. (Dabei beachte man jedoch, dass in der Analysis jedesmal $p > q$ ist, sobald die Differenz $p - q$ positiv wird, d. h. unter negativen Ausdrücken ist derjenige der grösste, dessen Werth am nächsten bei Null liegt.)

Will man aber das Prüfungsmittel durch directe Reihenentwicklung herstellen, so setze man $(a + (2 + g) \cdot x - h \cdot x^2 + \varDelta U)$ statt U, und $((x - a) + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ statt y in Gleichung V ein. Dann gibt sich

$$\varDelta U = -2a \cdot \left[\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\varkappa \cdot \mathfrak{P}}{a}\right)^2 + \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 9} \cdot \left(\frac{\varkappa \cdot \mathfrak{P}}{a}\right)^3 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{6 \cdot 9 \cdot 12} \cdot \left(\frac{\varkappa \cdot \mathfrak{P}}{a}\right)^4 + \ldots\ldots\right]$$

oder vielmehr

$$\varDelta U = -\frac{1}{3a} \cdot \varkappa^2 \cdot \left(\delta y + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\right)^2$$

$$- \frac{4}{27a^2} \cdot \varkappa^3 \cdot \left(\delta y + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\right)^3$$

. .

Hier ist das unendlichkleine $\varDelta U$ negativ, wenn a positiv ist, und dabei findet ein Maximum-stand statt; dagegen ist das unendlichkleine $\varDelta U$ positiv, wenn a negativ ist, und dabei findet ein Minimum-stand statt. Wenn man bei $\delta^2 U = -\frac{2}{3a} \cdot \delta y^2$ den weggelassenen Faktor $\frac{\varkappa^2}{1.2}$ wieder hinzusetzt, so bekommt man genau das erste Glied der zuletzt auf directem Wege hergestellten Reihe.

Zweitens. Aus $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ folgt $x - y = 0$; und dabei ist

$$\text{IX)}\quad y = x$$

Man hat also jetzt eine grade Linie, welche im Anfangspunkte der Coordination die Abscissenaxe unter einem halben rechten Winkel schneidet.

Hier ist $U' = (2 + g) \cdot x - h \cdot x^2$; und um zu untersuchen, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand oder keiner von beiden stattfinde, setze man $((2 + g) \cdot x - h \cdot x^2 + \Delta U)$ statt U, und $(x + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ statt y in Gleichung V ein. Dann bekommt man den geschlossenen Ausdruck

$$\Delta U = 3a^{\frac{1}{3}} \cdot \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot \mathfrak{P}^{\frac{2}{3}} + 2 \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{P}$$

oder vielmehr

$$\Delta U = 3a^{\frac{1}{3}} \cdot \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\delta y + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$+ 2\varkappa \cdot \left(\delta y + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\right)$$

Das unendlichkleine ΔU hat nun mit a das nemliche Zeichen; und wenn a positiv ist, so ist U' ein Minimum-stand; wenn aber a negativ ist, so ist U' ein Maximum-stand. (Dabei beachte man wieder, dass in der Analysis jedesmal $p > q$, sobald die Differenz $p - q$ positiv wird, d. h. unter negativen Ausdrücken ist derjenige der grösste, dessen Werth am nächsten bei Null liegt.)

Zweite Abtheilung.

Man kehre wieder zu den Gleichungen II, III, IV zurück, und lege dem $\sqrt[3]{1}$ seine beiden imaginären Formen bei.

Erstens. Aus $\frac{d_r U}{dy} = 0$ würde folgen

$$\text{X)} \quad 1 - \left(\sqrt[3]{1}\right) \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (x - y)^{-\frac{1}{3}} = 0$$

Diese Gleichung geht geradezu über in $(x - y)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{1}\right)$, und wenn man beiderseits auf die dritte Potenz erhebt, so ist $x - y = a$, woraus $y = x - a$ folgt. Gleichung X geht also über in $1 - \left(\sqrt[3]{1}\right) \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} = 0$, oder $1 - \left(\sqrt[3]{1}\right) = 0$. Nun hat $\left(\sqrt[3]{1}\right)$ nur seine beiden imaginären Formen, somit enthält letztere Gleichung einen Widerspruch mit sich selbst; und desshalb kann dieser Fall nicht weiter beachtet werden.

Zweitens. Aus $\frac{d_r U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ folgt wieder die reelle Function IX, und dabei ist wieder $U' = (2 + g) \cdot x - h \cdot x^2$. Nun führe man $((2 + g) \cdot x - h \cdot x^2 + \Delta U)$ statt U, und $(x + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ statt y in Gleichung II ein; so bekommt man den geschlossenen Ausdruck

$$\Delta U = 3 \cdot \left(\sqrt[3]{1}\right) \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot \mathfrak{P}^{\frac{2}{3}} + 2 \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{P}$$

Aber eben, weil $\left(\sqrt[3]{1}\right)$ nur seine imaginären Formen repräsentirt, so ist ΔU unter allen Umständen imaginär; und der aus den imaginären Formen der Gleichung I hergestellte reelle Ausdruck $U' = (2 + g) \cdot x - h \cdot x^2$ ist ein Einzel-stand.

Aufgabe 4.

Welche unter allen auf das nemliche rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven hat in sich einen bestimmten Punkt, der so gelegen ist, dass folgender von den Coordinaten dieses Punktes abhängige Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = g \cdot x - h \cdot x^2 + 2y + 3 \cdot \sqrt[3]{a \cdot (x - y)^2}$$

grösser oder kleiner ist, als bei allen nächstgelegenen Nachbarpunkten, mögen sie sich nun in der gesuchten Curve oder in den ihr überall nächstanliegenden Nachbarcurven befinden, der Fall sein kann?

Der hier vorgelegte Ausdruck ist wegen des allgemeinen Radicals $\sqrt[3]{a \cdot (x - y)^2}$ ein dreiförmiger. Um bequem calculiren zu können, setze man $(\sqrt[3]{1}) \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (x - y)^{\frac{2}{3}}$, und betrachte nur den Factor $(\sqrt[3]{1})$ als dreiförmig, alles andere aber als einförmig und reell. Statt Gleichung I bekommt man also

$$\text{II)}\quad U = g \cdot x - h \cdot x^2 + 2y + 3 \cdot (\sqrt[3]{1}) \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (x - y)^{\frac{2}{3}}$$

Um nun die Aufgabe weiter durchführen zu können, bringe man sie in zwei Abtheilungen, wobei man dem $(\sqrt[3]{1})$ zuerst seine reelle und dann seine zwei imaginären Formen beilegt.

Erste Abtheilung.

Wenn man dem $(\sqrt[3]{1})$ seine reelle Bedeutnng beilegt, so geht Gleichung II über in

$$\text{III)}\quad U = g \cdot x - h \cdot x^2 + 2y + 3 \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (x - y)^{\frac{2}{3}}$$

wo man alles als einförmig und reell zu betrachten hat. Die irgend einem beliebigen Punkte nächstgelegenen (sowohl in der gesuchten als in allen nächstanliegenden Nachbarcurven befindlichen) Nachbarpunkte haben (wie in Aufgabe 2) die Abscisse

$$\text{IV)}\quad x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2\,3} \cdot \vartheta^3 x \,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

und die Ordinate

$$\text{V)}\quad y + \varkappa \cdot (\delta_{,}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\delta_{,}^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot (\delta_{,}^3 y + \,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

Durch gemischtes Mutiren bekommt man

$$\text{VI)}\quad (\delta_{,}U = 2 \cdot \left(1 - a^{\frac{1}{3}} \cdot (x - y)^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \delta y$$

$$+ \left[2\left(1 - a^{\frac{1}{3}} \cdot (x - y)^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \frac{dy}{dx} + g - 2hx + 2 \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (x - y)^{-\frac{1}{3}}\right] \cdot \vartheta x$$

Erstens. Setzt man $(\delta_{,}U = 0$, d. h. sowohl $\frac{d_{,y}U}{dy} = 0$ als auch $\frac{dU}{dx} = 0$; so hat man zunächst die identische Gleichung

$$\text{VII)}\quad 1 - a^{\frac{1}{3}} \cdot (x - y)^{-\frac{1}{3}} = 0$$

Daraus gibt sich

$$\text{VIII)}\quad y = x - a$$

Die gesuchte Curve ist also eine grade Linie, welche bei $x = a$ die Abscissenaxe unter einem halben rechten Winkel schneidet.

Man bekommt auch noch die nichtidentische Gleichung

$$2 \cdot \left(1 - a^{\frac{1}{3}} \cdot (x - y)^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \frac{dy}{dx} + g - 2hx + 2 \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (x - y)^{-\frac{1}{3}} = 0$$

welche sich aber in Folge der Gleichung VII zurückzieht auf

$$\text{IX)} \quad g - 2hx + 2 \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (x - y)^{-\frac{1}{3}} = 0$$

Indem man für y den Ausdruck einsetzt, bekommt man $g - 2hx + 2 = 0$, woraus $x = \frac{2 + g}{2h}$ folgt; und es ist $\frac{2 + g - 2ah}{2h}$ die Ordinate des gesuchten Punktes der gesuchten Curve. Ferner ist

$$\text{X)} \quad U'' = \frac{(2 + g)^2 + 4ah}{4h}$$

Unter diesen Umständen bekommt man für den gemischten Mutationscoefficienten der zweiten Ordnung nur

$$\text{XI)} \quad {}_{(}\delta_{)}^2 U = -\frac{2}{3a} \cdot \delta y^2 - 2h \cdot \vartheta x^2$$

und man unterscheide:

1) Wenn a und h zugleich positiv sind, so ist ${}_{(}\delta_{)}^2 U$ beständig negativ, und somit U'' ein Maximumwerth eines Maximum-standes, d. h. die Coordinaten des gefundenen Punktes geben dem U einen grösseren Werth, als die Coordinaten aller nächstgelegenen (sowohl in der gefundenen Curve als auch in den ihr nächstanliegenden Nachbarcurven befindlichen) Nachbarpunkte.

2) Wenn a und h zugleich negativ sind; so ist ${}_{(}\delta_{)}^2 U$ beständig positiv, und somit ist U'' ein Minimumwerth eines Minimum-standes, d. h. die Coordinaten des gefundenen Punktes geben dem U einen kleineren Werth, als die Coordinaten aller nächstgelegenen (sowohl in der gefundenen Curve als auch in den ihr nächstanliegenden Nachbarcurven befindlichen) Nachbarpunkte.

3) Wenn a positiv und h negativ ist, so kann von einem sicheren Zeichenstande des ${}_{(}\delta_{)}^2 U$ keine Rede sein, d. h. es gibt jetzt keine bestimmte Curve mit einem bestimmten Punkte, dessen Coordinaten das U zu einem Maximumwerthe eines Maximumstandes oder zu einem Minimumwerthe eines Minimum-standes machen; es findet aber ein Maximum-stand statt, welcher seinen kleinsten bestimmten Werth erlangt hat.

4) Wenn a negativ und h positiv ist, so kann wieder von einem sicheren Zeichenstande des ${}_{(}\delta_{)}^2 U$ keine Rede sein, etc. etc.; es findet aber ein Minimum-stand statt, welcher seinen grössten bestimmten Werth erlangt hat.

Will man das Prüfungsmittel durch directe Reihenentwickelung herstellen, so setze man

$$\left(\frac{(2 + g)^2 + 4ah}{4h} + {}_{(}\Delta_{)} U\right) \text{ statt } U$$

$$\left(\frac{2+g-2ah}{2h} + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)} y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \ldots\right) \text{ oder kurzweg } \left(\frac{2+g-2ah}{2h} + \varkappa \cdot \Pi\right) \text{ statt } y$$

und

$$\left(\frac{2 + g}{2h} + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \ldots\ldots\right) \text{ oder kurzweg } \left(\frac{2 + g}{2h} + \varkappa \cdot \mathfrak{P}\right) \text{ statt } x$$

in Gleichung III überall ein. Dadurch bekommt man

$$\text{XII)} \quad {}_{(}\Delta_{)} U = -h \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2 - 2a \cdot \left[\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\varkappa \cdot \Pi - \varkappa \cdot \mathfrak{P}}{a}\right)^2 + \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 9} \cdot \left(\frac{\varkappa \cdot \Pi - \varkappa \cdot \mathfrak{P}}{a}\right)^3 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{6 \cdot 9 \cdot 12} \cdot \left(\frac{\varkappa \cdot \Pi - \varkappa \cdot \mathfrak{P}}{a}\right)^4 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15} \cdot \left(\frac{\varkappa \cdot \Pi - \varkappa \cdot \mathfrak{P}}{a}\right)^5 + \ldots\ldots\right]$$

Weil aber $y = x - a$, so ist $\frac{dy}{dx} = 1$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, etc. Daher wird ${}_{(}\delta_{)} y = \delta y + \vartheta x$, ${}_{(}\delta_{)}^2 y = \delta^2 y + 2 \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \vartheta x + \vartheta^2 x$, etc.; es ist also

$$\text{XIII)}\quad \varkappa \cdot \mathfrak{P} - \varkappa \cdot \Pi = - \varkappa \cdot \delta y - \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\delta^2 y + 2 \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \vartheta x\right) - \ldots\ldots$$

Gleichung XII geht also über in

$$\text{XIV)}\quad (\Delta)U = \varkappa^2 \cdot \left(-\frac{1}{3a} \cdot \delta y^2 - h \cdot \vartheta x^2\right) \ldots\ldots$$

wo man nach aufsteigenden Potenzen des $\varkappa$ geordnet hat; und wenn man in Gleichung XI den weggelassenen Factor $\frac{\varkappa^2}{1.2}$ wieder hinzusetzt, so bekommt man genau das erste Glied der Reihe XIV. Man unterscheide auch jetzt die vier Fälle, wie nach Gleichung XI, nemlich:

1) Wenn a und h zugleich positiv sind, so ist das unendlichkleine $(\Delta)U$ unter allen Umständen negativ, etc.

2) Wenn a und h zugleich negativ sind, so ist das unendlichkleine $(\Delta)U$ unter allen Umständen positiv, etc.

3) Wenn a positiv und h negativ ist, so kann von einem sicheren Zeichenstande des unendlichkleinen $(\Delta)U$ keine Rede sein, etc.

4) Wenn a negativ und h positiv ist, so kann gleichfalls von einem sicheren Zeichenstande des unendlichkleinen $(\Delta)U$ keine Rede sein, etc.

Die directe Reihenentwicklung hat also dasselbe Prüfungsmittel geliefert, wie der gemischte Mutationscoefficient der zweiten Ordnung.

Zweitens. Man setze $\frac{d_r U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$, so hat man die identische Gleichung

$$\text{XV)}\quad x - y = 0$$

und daraus folgt

$$\text{XVI)}\quad y = x$$

Die gesuchte Curve ist also eine grade Linie, welche im Anfangspunkte der Coordinaten die Abscissenaxe unter einem halben rechten Winkel schneidet.

Aus $y = x$ folgt $\frac{dy}{dx} = 1$, und man bekommt

$$\frac{dU}{dx} = 2 \cdot \left(1 - a^{\frac{1}{3}} \cdot (x - y)^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \frac{dy}{dx} + g - 2hx + 2a^{\frac{1}{3}} \cdot (x - y)^{-\frac{1}{3}}$$

oder

$$\frac{dU}{dx} = 2 - 2 \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (x - y)^{-\frac{1}{3}} + g - 2hx + 2 \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (x - y)^{-\frac{1}{3}}$$

oder

$$\frac{dU}{dx} = 2 + g - 2hx.$$

Daher erkennt man, dass nur $\frac{dU}{dx} = 0$ gesetzt werden kann, so dass sich $x = \frac{2 + g}{2h}$, $y = \frac{2 + g}{2h}$ und $U'' = \frac{(2 + g)^2}{4h}$ ergibt. Zur Prüfung setze man

$$\left(\frac{(2 + g)^2}{4h} + (\Delta)U\right) \text{ statt } U$$

$$\left(\frac{2 + g}{2h} + \varkappa \cdot (\delta_r)y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\delta_r^2)y + \ldots\ldots\right) \text{ oder kurzweg } \left(\frac{2 + g}{2h} + \varkappa \cdot \Pi\right) \text{ statt } y$$

und

$\left(\frac{2+g}{2h} + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \ldots\ldots\right)$ oder kurzweg $\left(\frac{2+g}{2h} + \varkappa \cdot \mathfrak{P}\right)$ statt x in Gleichung III ein; so bekommt man den geschlossenen Ausdruck

$$(\Delta)U = -h \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2 - 2 \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P} - \varkappa \cdot \Pi) + 3 \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P} - \varkappa \cdot \Pi)^{\frac{2}{3}}$$

Ordnet man anders, so bekommt man

$$\text{XVII)} \quad (\Delta)U = 3 \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P} - \varkappa \cdot \Pi)^{\frac{2}{3}} - 2 \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P} - \varkappa \cdot \Pi) - h \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2$$

Weil aber $y = x$, so ist $\frac{dy}{dx} = 1$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, etc. Daher wird $(\delta)y = \delta y + \vartheta x$, $(\delta)^2 y = \delta^2 y + 2 \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \vartheta x + \vartheta^2 x$, etc. Es ist also

$$\varkappa \cdot \mathfrak{P} - \varkappa \cdot \Pi = -\varkappa \cdot \delta y - \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\delta^2 y + 2 \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \vartheta x\right) - \ldots\ldots$$

Man erkennt aber schon, dass in dieser letzteren Gleichung kein einziger Theilsatz vorkommen kann, wo irgend einer der Differenzcoefficienten ϑx, $\vartheta^2 x$, etc. für sich allein vorkäme, und nicht mit irgend einem der Mutationscoefficienten δy, $\delta^2 y$, etc. oder mit einem davon abgeleiteten Differentialquotienten als Factor verbunden wäre. Gleichung XVII geht nun über in

$$\text{XVIII} \quad (\Delta)U = 3 \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot \left(-\varkappa \cdot \delta y - \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\delta^2 y + 2 \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \vartheta x\right) - \ldots\ldots\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$- 2 \cdot \left(-\varkappa \cdot \delta y - \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \left(\delta^2 y + 2 \cdot \frac{d\delta y}{dx} \cdot \vartheta x\right) - \ldots\ldots\right)$$

$$- h \cdot \left(\varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \ldots\ldots\right)^2$$

Die hieraus noch weiter zu entwickelnde und nach aufsteigenden Potenzen des $\varkappa$ zu ordnende Reihe hat den Ausdruck $3 \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (\varkappa \cdot \delta y)^{\frac{2}{3}}$ als erstes Glied, wo kein Differenzcoefficient vorkommt; und somit ist durch dieses erste Glied auch nicht das Mittel geboten, den gemischten Zustand beurtheilen zu können. Man wird daher den primären Zustand und auch den secundären Zustand für sich untersuchen.

Wenn man den primären Zustand $U' = (2 + g) \cdot x - h \cdot x^2$ mit seinen nächstanliegenden primären Nachbarzuständen vergleicht, so bekommt man

$$\Delta U = 3 \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y \ldots\ldots\right)^{\frac{2}{3}} + 2\left(\varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \ldots\ldots\right)$$

und man erkennt, dass ein Minimum-stand stattfindet, wenn a positiv ist, und dass ein Maximum-stand stattfindet, wenn a negativ ist.

1) Wenn a positiv ist, so macht die gefundene Grade bei jeder Abscisse, also auch bei der Abscisse $\left(\frac{2+g}{2h} \pm Dx\right)$ das U kleiner, als es alle dieser Graden nächstanliegenden Nachbarcurven machen. Dabei geht U' über in

$$U'' + DU = \frac{(2+g)^2}{4h} - h \cdot Dx^2$$

oder in

$$U'' + DU = \frac{(2+g)^2}{4h} - h \cdot \left(\varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \ldots\ldots\right)^2$$

α) Ist nun h negativ, so erreicht dieser Minimum-stand seinen kleinsten Werth, wenn $Dx = 0 \cdot q\ p$, . wenn $\vartheta x = 0$, $\vartheta^2 x = 0$, etc. etc.; und man erkennt, dass die

Coordinaten des gefundenen Punktes dem U einen kleineren Werth geben, als die Coordinaten aller nächstgelegenen (sowohl in der gesuchten Curve als in den nächstanliegenden Nachbarcurven befindlichen) Nachbarpunkte. Wenn also a positiv und h negativ ist, so ist $U'' = \frac{(2+g)^2}{4h}$ ein Minimumwerth eines Minmum-standes.

β) Ist aber h positiv, so erreicht obiger Minimum-stand seinen grössten Werth, wenn $Dx = 0$, d. h. wenn $\vartheta x = 0$, $\vartheta^2 x = 0$, etc. ist; und jetzt ist $U'' = \frac{(2+g)^2}{4h}$ ein Maximumwerth eines Minimum-standes, welcher Zustand jedoch in hiesiger Aufgabe nicht gesucht wird.

2) Wenn a negativ ist, so macht die gefundene Grade bei jeder Abscisse, also auch bei der Abscisse $\left(\frac{2+g}{2h} \pm Dx\right)$ das U grösser, als es alle dieser Graden nächstanliegenden Nachbarcurven machen. Dabei geht wieder U′ über in

$$U'' + DU = \frac{(2+g)^2}{4h} - h \cdot Dx^2$$

oder in

$$U'' + DU = \frac{(x+g)^2}{4h} - h \cdot \left(\varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \ldots\ldots\right)^2$$

α) Ist nun h positiv, so erreicht dieser Maximum-stand seinen grössten Werth, wenn $Dx = 0$, d. h. wenn $\vartheta x = 0$, $\vartheta^2 x = 0$ etc. ist; und man erkennt, dass jetzt die Coordinaten des gefundenen Punktes dem U einen grössern Werth geben, als die Coordinaten aller nächstgelegenen (sowohl in der gesuchten Curve, als in den nächstanliegenden Nachbarcurven befindlichen) Nachbarpunkte. Wenn also a negativ und h positiv ist, so ist $U'' = \frac{(2+g)^2}{4h}$ ein Maximumwerth eines Maximum-standes.

β) Ist aber h negativ, so erreicht obiger Maximum-stand seinen kleinsten Werth, wenn $Dx = 0$, d. h. wenn $\vartheta x = 0$, $\vartheta^2 x = 0$ etc. ist; und jetzt ist U″ ein Minimumwerth eines Maximum-standes, welcher Zustand jedoch in der hier gestellten Aufgabe nicht gesucht wird.

Die nemlichen Resultate hätte man erhalten, wenn man in Gleichung XVIII zuerst $\vartheta x = 0$, $\vartheta^2 x = 0$ etc. gesetzt hätte; denn dabei geht Gleichung XVIII über in

$$\text{XIX)}\quad \Delta U = 3 \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \ldots\ldots\right)^{\frac{2}{3}} + 2 \cdot \left(\varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \ldots\ldots\right)$$

Wenn man hierauf die Mutationscoefficienten und alle davon abgeleiteten Differentialquotienten verschwinden, dagegen die Differenzcoefficienten bestehen lässt; so geht Gleichung XVIII über in

$$\text{XX)}\quad DU = -h \cdot \left(\varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \ldots\ldots\right)^2$$

und aus XIX und XX kann man entnehmen:

1) Wenn a positiv und h negativ ist, so ist $U'' = \frac{(2+g)^2}{4h}$ ein Minimumwerth eines Minimum-standes.

2) Wenn a negativ und h positiv ist, so ist $U'' = \frac{(2+g)^2}{4h}$ ein Maximumwerth eines Maximum-standes.

3) Wenn a und h zugleich positiv sind, so ist $U'' = \frac{(2+g)^2}{4h}$ ein Maximumwerth eines Minimum-standes.

4) Wenn a und h zugleich negativ sind, so ist $U'' = \frac{(2+g)^2}{4h}$ ein Minimumwerth eines Maximum-standes.

Zweite Abtheilung.

Man kehre wieder zu Gleichung II zurück, und lege dem $(\sqrt[3]{1})$ seine imaginären Formen bei. Durch gemischtes Mutiren bekommt man

$$\text{XXI)}\quad {}_{(\delta)}U = 2\cdot\left(1-(\sqrt[3]{1})\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot(x-y)^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\delta y$$

$$+\left[2\cdot\left(1-(\sqrt[3]{1})\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot(x-y)^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\frac{dy}{dx}+g-2hx+2(\sqrt[3]{1})\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot(x-y)^{-\frac{1}{3}}\right]\cdot\vartheta x$$

Erstens. Würde man ${}_{(\delta)}U = 0$, d. h. sowohl $\frac{d_y U}{dy} = 0$ als auch $\frac{dU}{dx} = 0$ setzen, so hätte man zunächst die identische Gleichung

$$\text{XXII)}\quad 1-(\sqrt[3]{1})\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot(x-y)^{-\frac{1}{3}} = 0$$

Daraus würde wieder, wie in der zweiten Abtheilung der vorigen Aufgabe, $y = x - a$ folgen, so dass man wieder auf den Widerspruch $1-(\sqrt[3]{1}) = 0$ käme. Dieser Widerspruch ist aber der Grund, dass man den hier vorliegenden Fall nicht weiter zu beachten braucht.

Zweitens. Man setze $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$, so hat man die identische Gleichung $x - y = 0$, woraus wieder die reelle Function XVI folgt. Dabei ist $\frac{dy}{dx} = 1$, und man bekommt aus Gleichung XXI jetzt

$$\frac{dU}{dx} = 2\cdot\left[1-(\sqrt[3]{1})\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot(x-y)^{-\frac{1}{3}}\right]+g-2hx+2\cdot(\sqrt[3]{1})\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot(x-y)^{-\frac{1}{3}}$$

oder

$$\frac{dU}{dx} = 2+g-2hx$$

Daran erkennt man, dass nur $\frac{dU}{dx} = 0$ gesetzt werden kann, und man bekommt $x = \frac{2+g}{2h}$, $y = \frac{2+g}{2h}$ und $U'' = \frac{(2+g)^2}{4h}$. Das Prüfungsmittel wird hergestellt, wie in der ersten Abtheilung dieser Aufgabe, und man bekommt

$$\text{XXIII)}\quad {}_{(\Delta)}U = 3\cdot(\sqrt[3]{1})\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot\left(-\varkappa\cdot\delta y-\frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\left(\delta^2 y+2\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot\vartheta x\right)-\ldots\ldots\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$-2\cdot\left(-\varkappa\cdot\delta y-\frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\left(\delta^2 y+2\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot\vartheta x\right)-\ldots\ldots\right)$$

$$-h\cdot\left(\varkappa\cdot\vartheta x+\frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\vartheta^2 x+\ldots\ldots\right)^2$$

Auch dieser Ausdruck hat die Eigenthümlichkeit, dass in der für ${}_{(\Delta)}U$ noch weiter zu entwickelnden und nach Potenzen des $\varkappa$ zu ordnenden Reihe das erste Glied $3\cdot(\sqrt[3]{1})\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot(\varkappa\cdot\delta y)^{\frac{2}{3}}$ keinen Differenzcoefficienten enthält. Verfährt man übrigens ganz wie bei der ersten Abtheilung, so kommt man zu der Erkenntniss, dass ein Einzelstand stattfindet; und wenn

1) h positiv ist, so ist $U'' = \frac{(2+g)^2}{4h}$ der grösste bestimmte Werth, den der hier stattfindende Einzelstand erreichen kann; wenn aber

2) h negativ ist, so ist $U'' = \frac{(2+g)^2}{4h}$ der kleinste bestimmte Werth, den der hier stattfindende Einzel-stand erreichen kann.

Aufgabe 5.

Welche Function y von x ist so beschaffen, dass durch sie bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x folgender Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = gx - \lg \operatorname{nat} hx + \frac{3}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{2x \cdot y - y^2}\right)^4$$

grösser oder kleiner wird, als er bei dem nemlichen Werthe des x von allen andern der gesuchten Function beständig nächstanliegenden Nachbarfunctionen gemacht werden kann?

Der hier vorgelegte Ausdruck ist wegen des allgemeinen Radicals $\left(\sqrt[3]{2xy - y^2}\right)^4$ ein dreiförmiger. Um bequem calculiren zu können, setze man $\left(\sqrt[3]{1}\right)^4 \cdot (2xy - y^2)^{\frac{4}{3}}$, und betrachte nur den Factor $\left(\sqrt[3]{1}\right)^4$ als dreiförmig, alles Andere aber als einförmig und reell. Statt Gleichung I bekommt man also

$$\text{II)}\quad U = gx - \lg \operatorname{nat} hx + \frac{3}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{1}\right)^4 \cdot (2xy - y^2)^{\frac{4}{3}}$$

Um nun die Aufgabe weiter durchzuführen, bringe man sie in zwei Abtheilungen, wobei man dem $\left(\sqrt[3]{1}\right)^4$ zuerst seine reelle und dann seine zwei imaginären Formen beilegt.

Erste Abtheilung.

Wenn man dem $\left(\sqrt[3]{1}\right)^4$ seine reelle Form beilegt, so geht II über in

$$\text{III)}\quad U = gx - \lg \operatorname{nat} hx + \frac{3}{2} \cdot (2xy - y^2)^{\frac{4}{3}}$$

Daraus folgt

$$\text{IV)}\quad \delta U = 4 \cdot (x - y) \cdot y^{\frac{1}{3}} \cdot (2x - y)^{\frac{1}{3}} \cdot \delta y$$

$$\text{V)}\quad \delta^2 U = 4 \cdot (x - y) \cdot y^{\frac{1}{3}} \cdot (2x - y)^{\frac{1}{3}} \cdot \delta^2 y$$
$$+ \frac{4}{3} \cdot (2x^2 - 10xy + 5y^2) \cdot y^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x - y)^{-\frac{2}{3}} \cdot \delta y^2$$

Hier muss, wie gesagt, Alles als eindeutig und reell betrachtet werden. Auch erkennt man an Gleichung IV, dass man nur $\frac{d_y U}{dy} = 0$ setzen kann; und daraus folgt entweder $y = x$, oder $y = 2x$, oder $y = 0$.

1) Bei $y = x$ ist $\delta^2 U = -4 \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot \delta y^2$. Da nun kein Mutationscoefficient den Factor $(x - y)$ in den Nenner bekommen kann, so kann auch bei der jetzt für y erlangten Function kein Mutationscoefficient die im Calcul unzulässige Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ bekommen. Die für ΔU herzustellende Reihe läuft also nur nach ganzen Potenzen des $\varkappa$ fort, und alle Glieder sind reell. Weil $\delta^2 U$ jedenfalls negativ ist, so ist $U' = gx + \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{8}{3}} - \lg \operatorname{nat} hx$ ein Maximum-stand.

2) Bei $y = 2x$ ist $U' = gx - \lg nat\, hx$. Da aber jetzt $\frac{d_y^2 U}{dy^2} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ wird, so muss man für $\varDelta U$ direct eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe herstellen. Man setze also $(gx - \lg nat\, hx + \varDelta U)$ statt U, und $(2x + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ statt y in Gleichung III überall ein; so bekommt man

$$\text{VI)} \quad \varDelta U = \frac{3}{2} \cdot (- \varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{4}{3}} \cdot (2x + \varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{4}{3}}$$

so dass für ein im Momente des Verschwindens gedachtes $\varkappa$ das $\varDelta U$ positiv ist, also ein Minimum-stand stattfindet.

3) Bei $y = 0$, d. h. wenn y eine identische Function von x ist, ist wieder $U' = gx - \lg nat\, hx$. Auch ist wieder $\frac{d_y^2 U}{dy^2} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$, und man hat desshalb wieder $\varDelta U$ dierect zu entwickeln, wobei sich ergibt

$$\text{VII)} \quad \varDelta U = \frac{3}{2} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{4}{3}} \cdot (2x - \varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{4}{3}}$$

so dass dieser dritte Fall dieselben Resultate liefert, wie der vorhergehende.

Zweite Abtheilung.

Man kehre wieder zu Gleichung II zurück, und lege dem $(\sqrt[3]{1})^4$ seine beiden imaginären Formen bei. Dabei ist

$$\text{VIII)} \quad \delta U = 4 \cdot (\sqrt[3]{1})^4 \cdot (x - y) \cdot y^{\frac{1}{3}} \cdot (2x - y)^{\frac{1}{3}} \cdot \delta y$$

$$\text{IX)} \quad \delta^2 U = 4 \cdot (\sqrt[3]{1})^4 \cdot (x - y) \cdot y^{\frac{1}{3}} \cdot (2x - y)^{\frac{1}{3}} \cdot \delta^2 y$$
$$+ \frac{4}{3} \cdot (\sqrt[3]{1})^4 \cdot (2x^2 - 10xy + 5y^2) \cdot y^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x - y)^{-\frac{2}{3}} \cdot \delta y^2$$

Aus VIII erkennt man, dass man nur $\frac{d_y U}{dy} = 0$ setzen kann; und so ist entweder $y = x$, oder $y = 2x$, oder $y = 0$.

1) Bei $y = x$ ist $U' = gx + \frac{3}{2} \cdot (\sqrt[3]{1})^4 \cdot x^{\frac{8}{3}} - \lg nat\, hx$, welcher Ausdruck, eben weil $(\sqrt[3]{1})^4$ nur seine imaginären Formen repräsentirt, nicht weiter zu beachten ist.

2) Bei $y = 2x$ ist $U' = gx - \lg nat\, hx$, und $\varDelta U = \frac{3}{2} \cdot (\sqrt[3]{1})^4 . (- \varkappa . \mathfrak{P})^{\frac{4}{3}} . (2x + \varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{4}{3}}$. Da $\varDelta U$ unter allen Umständen imaginär ist, so ist das hiesige U' ein Einzel-stand.

3) Bei $y = 0$, d. h. wenn y eine identische Function von x ist, ist wieder $U' = gx - \lg nat\, hx$, und $\varDelta U = \frac{3}{2} \cdot (\sqrt[3]{1})^4 (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{4}{3}} (2x - \varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{4}{3}}$. Also auch dieses U' ist ein Einzel-stand.

Aufgabe 6.

Welche Function y von x ist so beschaffen, dass durch sie bei irgend einem nach Belieben gewählten Werthe des x folgender Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = h + k \cdot x + m \cdot x^2 + (e \cdot y + g \cdot x^2)^4$$

grösser oder kleiner wird, als er bei dem nemlichen Werthe des x von allen andern der gesuchten Function beständig nächstanliegenden Nachbarfunctionen gemacht werden kann?

Durch Mutiren bekommt man

$$\text{II)}\quad \delta U = 4e \cdot (ey + g \cdot x^2)^3 \cdot \delta y$$

$$\text{III)}\quad \delta^2 U = 4e \cdot (ey + g \cdot x^2)^3 \cdot \delta^2 y + 12 \cdot e^2 \cdot (ey + g \cdot x^2)^2 \cdot \delta y^2$$

Aus $\frac{d_y U}{dy} = 0$ folgt die identische Gleichung $ey + g \cdot x^2 = 0$, und sonach ist

$$\text{IV)}\quad y = -\frac{g}{e} \cdot x^2$$

Da aber dabei auch $\frac{d_y^2 U}{dy^2} = 0$ und $\frac{d_y^3 U}{dy^3} = 0$, dagegen $\delta^4 U = 24 \cdot e^4 \cdot \delta y^4$ ist, und unter allen Umständen positiv bleibt; so ist $U' = h + kx + m \cdot x^2$ ein Minimum-stand.

Aufgabe 7.

Man sucht y als solche Function von x, dass folgender Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = (15 \cdot g^2 \cdot x^2 - 15 \cdot g^3 \cdot x + 5 \cdot g^2 \cdot y^2 - 3 \cdot y^4) \cdot y$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Durch Mutiren bekommt man

$$\text{II)}\quad \delta U = 15 \cdot (gx - y^2) \cdot (gx - g^2 + y^2) \cdot \delta y$$

$$\text{III)}\quad \delta^2 U = 15 \cdot (gx - y^2) \cdot (gx - g^2 + y^2) \cdot \delta^2 y + 30 \cdot (g^2 - 2y^2) \cdot y \cdot \delta y^2$$

Aus $\frac{d_y U}{dy} = 0$ folgt entweder $gx - y^2 = 0$ oder $gx - g^2 + y^2 = 0$.

A) Aus $gx - y^2 = 0$ folgt $y^2 = gx$ oder $y = \sqrt{gx}$. Man erkennt also, dass g und x einerlei Zeichen haben müssen, weil sonst $\sqrt{gx}$ imaginär wäre. Hier ist $U' = 2 \cdot g^2 \cdot x \cdot (6x - 5g) \cdot \sqrt{gx}$ und $\delta^2 U = 30 \cdot g \cdot (g - 2x) \cdot (\sqrt{gx}) \cdot \delta y^2$. Da die für $\delta^2 U$ und U' hergestellten Ausdrücke das Radical als gemeinschaftlichen Factor bekommen haben, so entscheidet man sich (nach §. 114. γ. 2. a) auf folgende Weise:

α) Hat das Radical die Bedeutung, wobei das Product $g \cdot (g - 2x) \cdot \sqrt{gx}$ positiv wird, so ist auch $\delta^2 U$ positiv; und es findet ein Minimum-stand statt.

β) Hat das Radical die Bedeutung, wobei das Product $g \cdot (g - 2x) \cdot \sqrt{gx}$ negativ wird, so ist auch $\delta^2 U$ negativ; und es findet ein Maximum-stand statt. (Dabei beachte man jedoch, dass in der Analysis jedesmal $p > q$ ist, sobald die Differenz $p - q$ positiv wird, dass also in der Analysis ein negativer Ausdruck für desto grösser gilt, je näher sein Werth bei Null liegt; und umgekehrt.)

B) Aus $gx - g^2 + y^2 = 0$ folgt $y^2 = g \cdot (g - x)$ oder $y = \sqrt{g \cdot (g - x)}$. Man erkennt also, dass g und $(g - x)$ einerlei Zeichen haben müssen, weil sonst $\sqrt{g \cdot (g - x)}$ imaginär wäre. Hier ist $U' = 2 \cdot g^2 \cdot (6x^2 - 7gx + g^2) \cdot \sqrt{g \cdot (g - x)}$ und $\delta^2 U = 30 \cdot g \cdot (2x - g) \cdot (\sqrt{g \cdot (g - x)}) \cdot \delta y^2$. Da die für $\delta^2 U$ und U' hergestellten Ausdrücke das Radical als gemeinschaftlichen Factor bekommen haben, so entscheidet man (nach §. 114. γ. 2. a) sich wiederum auf folgende Weise:

α) Hat das Radical die Bedeutung, wobei das Product $g \cdot (2x - g) \cdot \sqrt{g \cdot (g - x)}$ positiv wird, so ist auch $\delta^2 U$ positiv, und es findet ein Minimum-stand statt.

β) Hat das Radical die Bedeutung, wobei das Product $g \cdot (2x - g) \cdot \sqrt{g \cdot (g - x)}$ negativ wird, so ist auch $\delta^2 U$ negativ; und es findet ein Maximum-stand statt. (Man beachte hierbei die oben zu A.β. gemachte Bemerkung.)

Aufgabe 8.

Man sucht y als solche Function von x, dass folgender Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = (3gx - 3x^2 - y^2) \cdot \left(gx - x^2 + y^2 - \frac{4}{3} \cdot x \cdot y\right)$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Durck Mutiren bekommt man

$$\text{II)}\quad \delta U = 4 \cdot (x - y) \cdot (y^2 - gx + x^2) \cdot \delta y$$

$$\text{III)}\quad \delta^2 U = 4 \cdot (x - y) \cdot (y^2 - gx + x^2) \cdot \delta^2 y + 4 \cdot (gx - x^2 + 2xy - 3 \cdot y^2) \cdot \delta y^2$$

Aus $\frac{d_y U}{dy} = 0$ folgt entweder $x - y = 0$ oder $y^2 - gx + x^2 = 0$.

A) Aus $x - y = 0$ folgt $y = x$. Hier ist $U' = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot (3g - 4x)^2$, und $\delta^2 U = 4 \cdot (g - 2x) \cdot x \cdot \delta y^2$. Bei den Werthen des x, wobei das Product $(g - 2x) \cdot x$ positiv ist, findet ein Minimum-stand statt; aber bei den Werthen des x, wobei das Product $(g - 2x) \cdot x$ negativ ist, findet ein Maximum-stand statt.

B) Aus $y^2 - gx + x^2 = 0$ folgt $y^2 = x \cdot (g - x)$ oder $y = \mathcal{W}\sqrt{x \cdot (g - x)}$. Man erkennt also, dass x und $(g - x)$ einerlei Zeichen haben müssen, weil sonst $\mathcal{W}\sqrt{x \cdot (g - x)}$ imaginär wäre. Hier ist $U' = 4 \cdot x^2 \cdot (g - x) \cdot \left(g - x - \frac{2}{3} \cdot \mathcal{W}\sqrt{x \cdot (g - x)}\right)$ und $\delta^2 U = 8 \cdot \left(x - g + \mathcal{W}\sqrt{x \cdot (g - x)}\right) \cdot x \cdot \delta y^2$. Wegen des zweideutigen Radicals entscheidet man sich (nach §. 114. γ. 2. b) auf folgende Weise:

α) Nimmt man das noch allgemeine Radical positiv, so ist $U' = 4x^2 \cdot (g - x) \cdot \left(g - x - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x \cdot (g - x)}\right)$ und $\delta^2 U = 8 \cdot \left(x - g + \sqrt{x \cdot (g - x)}\right) \cdot x \cdot \delta y^2$. Bei den Werthen des x, wobei das Product $\left(x - g + \sqrt{x \cdot (g - x)}\right) \cdot x$ positiv ist, findet ein Minimum-stand statt; aber bei den Werthen des x, wobei dieses Product negativ ist, findet ein Maximum-stand statt.

β) Nimmt man das noch allgemeine Radical negativ, so ist $U' = 4 \cdot x^2 \cdot (g - x) \cdot \left(g - x + \frac{2}{3}\sqrt{x \cdot (g - x)}\right)$ und $\delta^2 U = 8 \cdot \left(x - g - \sqrt{x \cdot (g - x)}\right) \cdot x \cdot \delta y^2$. Bei den Werthen des x, wobei das Product $\left(x - g - \sqrt{x \cdot (g - x)}\right) \cdot x$ positiv ist, findet ein Minimum-stand statt; aber bei den Werthen des x, wobei dieses Product negativ ist, findet ein Maximum-stand statt.

Aufgabe 9.

Man sucht y als solche Function von x, dass der Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = ax - x^2 + (y - 3x) \cdot \mathcal{W}\sqrt{x^2 - y^2}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Da hinsichtlich des Radicals keine Einschränkung beigefügt ist, so hat dieser Ausdruck zwei reelle Formen, je nachdem man dem Radical seine positive oder negative Bedeutung beilegt. Jedenfalls ist es bequem, $(\mathcal{W}\sqrt{1}) \cdot (y - 3x) \cdot (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$ zu setzen, und nur $(\mathcal{W}\sqrt{1})$ als zweiförmig, alles Andere aber als einförmig zu betrachten. Statt Gleichung I hat man also

$$\text{II)}\quad U = a \cdot x - x^2 + (\mathcal{W}\sqrt{1}) \cdot (y - 3x) \cdot (x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Durch Mutiren bekommt man

$$\text{III)}\quad \delta U = (\mathcal{W}\sqrt{1}) \cdot (x^2 + 3xy - 2y^2) \cdot (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \delta y$$

Erstens. Soll $\frac{d_y U}{dy} = 0$ werden, so muss $x^2 + 3xy - 2 \cdot y^2 = 0$ sein; und daraus folgt $y = \frac{1}{4} \cdot (3x + x \cdot \sqrt{17})$, und $U' = ax - x^2 + \frac{x^2}{16} \cdot (-9 + \sqrt{17}) \cdot \sqrt{-10 - 6 \cdot \sqrt{17}}$. Wenn man dem $\sqrt{17}$ seine positive Bedeutung beilegt, so wird U' imaginär; man kann also dem $\sqrt{17}$ nur seine negative Bedeutung beilegen, und bekommt sonach

$$\text{IV)} \quad y = \frac{1}{4} \cdot (3x - x \cdot \sqrt{17})$$

und

$$\text{V)} \quad U' = a \cdot x - x^2 - \frac{x^2}{16} \cdot (9 + \sqrt{17}) \cdot \sqrt{-10 + 6 \cdot \sqrt{17}}$$

Berücksichtigt man Gleichung IV, so bekommt man

$$\text{VI)} \quad \delta^2 U = \frac{4 \cdot \sqrt{17}}{\sqrt{-10 + 6 \cdot \sqrt{17}}} \cdot \delta y^2$$

Das Radical $\sqrt{-10 + 6 \cdot \sqrt{17}}$ hat aber sowohl seine positive als negative Bedeutung, Hat es seine negative Bedeutung, so ist $\delta^2 U$ negativ, und U' ein Maximum-stand; hat es aber seine positive Bedeutung, so ist $\delta^2 U$ positiv, und U' ein Minimum-stand. Zugleich sieht man, dass kein Mutationscoefficient einen andern Factor als $(x^2 - y^2)$ in den Nenner bekommen kann; und sonach kann bei der jetzt für y erlangten Function kein Mutationscoefficient die im Calcul unzulässige Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ annehmen. Die für $\varDelta U$ herzustellende Reihe läuft also durchaus nach ganzen Potenzen des $\varkappa$ fort, und alle Glieder dieser Reihe sind reell. Der Ausdruck in VI gibt also das wahre Prüfungsmittel ab, wie bereits benützt ist.

Zweitens. Soll $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ werden, so muss $x^2 - y^2 = 0$ sein. Daraus folgt $y = \pm x$ und $U' = a \cdot x - x^2$, welcher Ausdruck nur eiue einzige reelle Form hat. Hier kann das Prüfungsmittel nur durch directe Reihenentwicklung gewonnen werden.

A) Bei $y = + x$ ist $\varDelta U = -(2x - \varkappa \cdot \mathfrak{P}) \cdot \sqrt{-2x \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P}) - (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^2}$, und wenn $\varkappa$ in den Moment des Verschwindens gesetzt wird, so ist ohne angebbaren Fehler

$$\text{VII)} \quad \varDelta U = -2x \cdot \sqrt{-2x \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})}$$

B) Bei $y = - x$ ist $\varDelta U = -(4x - \varkappa \cdot \mathfrak{P}) \cdot \sqrt{+2x \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P}) - (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^2}$; und wenn $\varkappa$ in den Moment des Verschwindens gesetzt wird, so ist ohne angebbaren Fehler

$$\text{VIII)} \quad \varDelta U = -4x \cdot \sqrt{2x \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})}$$

Da $\varDelta U$ vom Imaginären ins Reelle oder umgekehrt übergeht, so findet ein Gränz-stand statt. In den Fällen, wo das unendlichkleine $\varDelta U$ reell und positiv ist, ist der Gränzstand $U' = ax - x^2$ kleiner als seine reellen Nachbarzustände; in den Fällen, wo das unendlichkleine $\varDelta U$ reell und negativ ist, ist der Gränz-stand $U' = ax - x^2$ grösser, als seine reellen Nachbarzustände Vergleicht man übrigens Gleichung VII und VIII, so sieht man, dass das in VII befindliche $\varDelta U$ reell, wann das in VIII befindliche imaginär ist, und umgekehrt.

Drittens. Setzt man den in Gleichung I befindlichen Factor $y - 3x = 0$, so ist $y = 3x$, und wiederum $U' = ax - x^2$, d. h. man hat für U' wieder einen Ausdrnck mit einer einzigen reellen Form. Zur Prüfung setze man $(3x + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ statt y, und $(ax - x^2 + \varDelta U)$ statt U; so bekommt man

$$\varDelta U = (\varkappa \cdot \mathfrak{P}) \cdot \sqrt{-8 \cdot x^2 - 6x \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P}) - (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^2}$$

Bei einem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ kann man ohne angebbaren Fehler setzen $\varDelta U = (\varkappa \cdot \mathfrak{P}) \cdot \sqrt{-8 \cdot x^2}$. Mag nun $(\varkappa \cdot \mathfrak{P})$ positiv oder negativ sein, so ist dieses unendlichkleine $\varDelta U$ dennoch unter allen Umständen imaginär. Also bei $y = 3x$ ist $U' = ax - x^2$ ein Einzel-stand.

Dieser letzte Fall ist nicht auf theoretischem Wege, sondern dadurch erlangt worden, dass man versuchsweise für y eine solche Function setzte, deren nächstanliegenden Nachbarfunctionen alle das ΔU imaginär machen; und es ist zu bemerken, dass auf diese Weise sehr oft Einzel-stände erlangt werden (§. 132. Nro. 2).

Aufgabe 10.

Man sucht y als solche Function von x, dass der Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = W\!\sqrt{x-1} + \frac{2}{3}\cdot W\!\sqrt{(y-2x)^3} + W\!\sqrt{2xy-y^2}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Da keines der Radicale einer Einschränkung unterworfen ist, so kann ein jedes nach Belieben sowohl als positiv als auch als negativ genommen werden, so dass der vorgegebene Ausdruck acht verschiedene eindeutige Formen annehmen kann. Jedenfalls ist es bequem, der Gleichung I folgende Form

$$\text{II)}\quad U = (W\!\sqrt{1})\cdot(x-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}\cdot(W\!\sqrt{1})\cdot(y-2x)^{\frac{3}{2}} + (W\!\sqrt{1})\cdot(2xy-y^2)^{\frac{1}{2}}$$

zu geben, und nur die Radicale $(W\!\sqrt{1})$ als zweideutig, alles Andere aber als eindeutig zu nehmen.

Der für U' herzustellende Ausdruck muss jedenfalls reell sein. Der Factor $(x-1)^{\frac{1}{2}}$ wird aber nur reell, wenn $x > 1$ ist; x muss also positiv sein, und desswegen wird der Theilsatz $(y-2x)^{\frac{3}{2}}$ nur dann reell, wenn y eine solche Function von $x > 1$ ist, dass $y > 2x$ wird. Es muss also auch y positiv sein. Durch Mutiren bekommt man zunächst

$$\text{III)}\quad \delta U = \frac{(W\!\sqrt{1})\cdot(\sqrt{y-2x})\cdot(\sqrt{2xy-y^2}) + (W\!\sqrt{1})\cdot(x-y)}{\sqrt{2xy-y^2}}$$

Erstens. Setzt man $\frac{d_y U}{dy} = 0$, so ist $(W\!\sqrt{1})\cdot(\sqrt{y-2x})\cdot(\sqrt{2x\cdot y-y^2}) + (W\!\sqrt{1})\cdot(x-y) = 0$. Daraus folgt $(W\!\sqrt{1})\cdot(x-y) = -(W\!\sqrt{1})\cdot(\sqrt{y-2x})\cdot(\sqrt{2x\cdot y-y^2})$, oder $(x-y)^2 = (y-2x)\cdot(2xy-y^2)$, oder $(x-y)^2 = -(2x-y)^2\cdot y$, oder

$$\text{IV)}\quad \left(\frac{x-y}{2x-y}\right)^2 = -y$$

Der linke Theil dieser Gleichung ist jedenfalls positiv; also muss auch der rechte Theil positiv sein. Dieses ist aber nur möglich, wenn y eine solche Function ist, welche bei jedem Werthe des x negativ bleibt. Da sich nun aus Gleichung IV für y keine solche Function ergeben kann, welche bei irgend einem Werthe des x positiv wird; und da, wie schon oben auseinandergesetzt ist, bei negativem y der Ausdruck U jedenfalls imaginär wird, während man für U nur reelle Formen sucht; so darf dieser erste Fall nicht weiter beachtet werden.

Zweitens. Setzt man $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$, so ist entweder $y = 0$ oder $2x - y = 0$.

A) Wenn $y = 0$, d. h. eine identische Function von x ist; so ist

$$U' = (W\!\sqrt{1})\cdot\sqrt{x-1} + \frac{2}{3}\cdot(W\!\sqrt{1})\cdot\sqrt{(-2x)^3}$$

Hier ist aber U' imaginär, das x mag positiv oder negativ sein. Die Function $y = 0$ darf also nicht beachtet werden.

B) Bei $2x - y = 0$ ist $y = 2x$ und $U' = (W\!\sqrt{1})\cdot\sqrt{x-1}$. Damit aber U' reell bleibt, muss $x > 1$ sein, wie schon im Anfange auseinandergesetzt wurde. Ferner ist

$$\Delta U = \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{1}) \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{3}{2}} + (\sqrt{1}) \cdot \sqrt{-(2x + \varkappa \cdot \mathfrak{P}) \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})}$$

welcher Ausdruck, eben weil x nicht negativ sein darf, imaginär bleibt, das $\varkappa \cdot \mathfrak{P}$ mag positiv oder negativ sein; und somit erkennt man, dass $U' = (\sqrt{1}) \cdot \sqrt{x - 1}$ ein Einzel-stand ist.

Aufgabe 11.

Man sucht für y eine solche Function von x, dass der Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = m \cdot x^2 - n \cdot x^3 + 3 \cdot (hx - y)^2 + g \cdot \sqrt{(hx - y)^9}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Da hinsichtlich des Radicals keine Einschränkung beigefügt ist, so hat dieser Ausdruck zwei reelle Formen, je nachdem man dem Radical seine positive oder negative Bedeutung beilegt. Man wird aber die Aufgabe leichter durchführen, wenn man

$$\text{II)}\quad U = m \cdot x^2 - n \cdot x^3 + 3 \cdot (hx - y)^2 + g \cdot (\sqrt{1}) \cdot (hx - y)^{\frac{9}{2}}$$

setzt, und nur $(\sqrt{1})$ als zweideutig, alles Andere aber als eindeutig behandelt. Durch Mutiren bekommt man

$$\text{III)}\quad \delta U = -(hx - y) \cdot \left(6 + \frac{9g}{2} \cdot (\sqrt{1}) \cdot (hx - y)^{\frac{5}{2}}\right) \cdot \delta y$$

A) Man setze $hx - y = 0$, so ist $y = hx$, und $U' = m \cdot x^2 - n \cdot x^3$. Weil dabei $\delta^2 U = 6 \cdot \delta y^2$ ist, so könnte man versucht sein, zu behaupten, es fände ein Minimum-stand statt. Da man aber sogleich sieht, dass $\frac{d_y^5 U}{dy^5} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ wird, so muss man sich überzeugen, ob alle Glieder der für ΔU herzustellenden Reihe beständig reell bleiben. Man setze also $(hx + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ statt y, und $(m \cdot x^2 - n \cdot x^3 + \Delta U)$ statt U in Gleichung II ein, so bekommt man

$$\Delta U = 3 \cdot (-\varkappa \cdot \mathfrak{P})^2 + g \cdot (\sqrt{1}) \cdot (-\varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{9}{2}}$$

Hier ist der erste Theilsatz beständig reell und beständig positiv, der zweite geht vom Imaginären ins Reelle oder umgekehrt über. Es findet also ein Gränz-stand statt. Denkt man sich den zweiten Theilsatz reell und $\varkappa$ im Momente des Verschwindens; so ist ΔU positiv, das Radical $(\sqrt{1})$ mag seine positive oder negative Bedeutung haben. Der Gränz-stand ist also kleiner, als seine reellen Nachbarzustände.

B) Setzt man $6 + \frac{9g}{2} \cdot (\sqrt{1}) \cdot (hx - y)^{\frac{5}{2}} = 0$, so ist $(\sqrt{1}) \cdot (hx - y)^{\frac{5}{2}} = -\frac{4}{3g}$; weil aber der Exponent 5 eine ungrade Zahl ist, so ist $(\sqrt{1}) \cdot (hx - y)^{\frac{5}{2}} = \left((\sqrt{1}) \cdot (hx - y)^{\frac{1}{2}}\right)^5$; und somit ist auch $\left((\sqrt{1}) \cdot (hx - y)^{\frac{1}{2}}\right)^5 = -\frac{4}{3g}$. Wenn man beiderseits die fünfte Wurzel auszieht, so bekommt man

$$\text{IV)}\quad (\sqrt{1}) \cdot (hx - y)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[5]{-\frac{4}{3g}}$$

Wenn man hier beiderseits auf das Quadrat erhebt, so bekommt man $hx - y = \left(\sqrt[5]{-\frac{4}{39}}\right)^2$; und daraus folgt

$$\text{V)}\quad y = hx - \left(\sqrt[5]{-\frac{4}{3g}}\right)^2$$

Erhebt man Gleichung IV beiderseits auf die vierte Potenz, so bekommt man $(hx - y)^2 = \left(\sqrt[5]{-\frac{4}{3g}}\right)^4$; und erhebt man Gleichung IV beiderseits auf die neunte Potenz, so bekommt man $(\sqrt{1})\cdot(hx - y)^{\frac{9}{2}} = \left(\sqrt[5]{-\frac{4}{3g}}\right)^9 = \left(\sqrt[5]{-\frac{4}{3g}}\right)^5\cdot\left(\sqrt[5]{-\frac{4}{3g}}\right)^4$ $= -\frac{4}{3g}\cdot\left(\sqrt[5]{-\frac{4}{3g}}\right)^4$. Gleichung II geht jetzt über in

$$\text{VI)}\quad U' = m\cdot x^2 - n\cdot x^3 + \frac{5}{3}\cdot\left(\sqrt[5]{-\frac{4}{3g}}\right)^4$$

Dieser primäre Zustand hat aber unter seinen fünf Formen nur eine einzige reelle, und seine vier imaginären Formen dürfen nicht weiter berücksichtigt werden. Da ferner kein Mutationscoefficient einen andern Factor als $(h\cdot x - y)$ in den Nenner bekommen kann, so bekommt auch kein Mutationscoefficient die im Calcul unzulässige Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$; und die für ΔU herzustellende Reihe läuft nur nach ganzen Potenzen des $\varkappa$ fort. Mutirt man Gleichung III noch einmal, so bekommt man zunächst

$$\delta^2U = -(hx - y)\cdot\left(6 + \frac{9g}{2}\cdot(\sqrt{1})\cdot(hx - y)^{\frac{5}{2}}\right)\cdot\delta^2y$$

$$+\left(6 + \frac{63g}{4}\cdot(\sqrt{1})\cdot(hx - y)^{\frac{5}{2}}\right)\cdot\delta y^2$$

Nun ist $(\sqrt{1})\cdot(hx - y)^{\frac{5}{2}} = -\frac{4}{3g}$; und unter Berücksichtigung alles Vorhergehenden bleibt nur $\delta^2U = -15\cdot\delta y^2$, woran man erkennt, dass U' ein Maximum-stand ist.

Es ist beachtenswerth, dass der in VI aufgestellte Ausdruck nur eine einzige reelle Form hat, während der in I oder II aufgestellte Ausdruck zwei reelle Formen hatte.

Aufgabe 12.

Man sucht y als solche Function von x, dass der Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = g\cdot x^2 - hx + (x - y)^4 + 2\cdot\sqrt{(x - y)^9}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Da hinsichtlich des Radicals keine Einschränkung beigefügt ist, so hat dieser Ausdruck zwei reelle Formen, je nachdem man dem Radical seine positive oder negative Bedeutung beilegt. Man wird aber die Aufgabe leichter durchführen, wenn man

$$\text{II)}\quad U = g\cdot x^2 - h\cdot x + (x - y)^4 + 2\cdot(\sqrt{1})\cdot(x - y)^{\frac{9}{2}}$$

setzt, und nur $(\sqrt{1})$ als zweideutig, alles Andere aber als eindeutig behandelt. Durch Mutiren bekommt man

$$\text{III)}\quad \delta U = -(x - y)^3\cdot\left(4 + 9\cdot(\sqrt{1})\cdot(x - y)^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\delta y$$

A) Setzt man $x - y = 0$, so ist $y = x$, und $U' = g\cdot x^2 - h\cdot x$. Es ist aber jetzt $\frac{d_y^2U}{dy^2} = 0$, $\frac{d_y^3U}{dy^3} = 0$, $\delta^4U = 24\cdot\delta y^4$, so dass man versucht sein könnte, zu be-

haupten, es fände ein Minimum-stand statt. Da aber $\frac{d^5_y U}{dy^5} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ ist, so kann die für ΔU herzustellende Reihe nicht nach lauter ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigen. Man muss also untersuchen, ob alle Glieder der für ΔU herzustellenden Reihe reell werden. Durch die gewöhnliche Substitution geht II über in

$$\Delta U = (-\varkappa \cdot \mathfrak{P})^4 + 2 \cdot (\sqrt[W]{1}) \cdot (-\varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{9}{2}}$$

Hier ist der erste Theilsatz beständig reell und positiv, dagegen der zweite geht vom Reellen ins Imaginäre über. Es findet also ein Gränz-stand statt. Denkt man sich den zweiten Theilsatz reell, und das $\varkappa$ im Momente des Verschwindens, so ist ΔU positiv, das $(\sqrt[W]{1})$ mag seine positive oder negative Bedeutung haben. Der Gränz-stand selbst ist also kleiner als seine reellen Nachbarzustände.

B) Setzt man $4 + 9 \cdot (\sqrt[W]{1}) \cdot (x - y)^{\frac{1}{2}} = 0$, so ist

$$\text{IV)} \quad (\sqrt[W]{1}) \cdot (x - y)^{\frac{1}{2}} = -\frac{4}{9}$$

Erhebt man diese Gleichung beiderseits auf die zweite Potenz, so bekommt man $x - y = \frac{16}{81}$; und daraus folgt

$$\text{V)} \quad y = \frac{1}{81} \cdot (81x - 16)$$

Erhebt man Gleichung IV beiderseits auf die achte Potenz, so bekommt man $(x - y)^4 = \left(\frac{16}{81}\right)^4$; und erhebt man Gleichung IV beiderseits auf die neunte Potenz, so bekommt man $(\sqrt[W]{1}) \cdot (x - y)^{\frac{9}{2}} = -\frac{4}{9} \cdot \left(\frac{16}{81}\right)^4$. Gleichung II geht also jetzt über in

$$\text{VI)} \quad U' = g \cdot x^2 - hx + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{16}{81}\right)^4$$

Dieser für U' hergestellte Ausdruck hat aber nur eine einzige Form. Auch steigt jetzt die für ΔU herzustellende Reihe nur nach ganzen Potenzen des $\varkappa$ auf. Mutirt man Gleichung III noch einmal, so bekommt man zunächst

$$\delta^2 U = -(x - y)^3 \cdot \left(4 + 9 \cdot (\sqrt[W]{1})(\cdot x - y)^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \delta^2 y$$
$$+ (x - y)^2 \cdot \left(12 + \frac{63}{2} \cdot (\sqrt[W]{1}) \cdot (x - y)^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \delta y^2$$

Indem man Gleichung IV auf die vierte Potenz erhebt, bekommt man $(x - y)^2 = \left(\frac{16}{81}\right)^2$; und unter Berücksichtigung alles Vorhergehenden bleibt nur $\delta^2 U = -2 \cdot \left(\frac{16}{81}\right)^2 \cdot \delta y^2$, woran man erkennt, dass ein Maximum-stand stattfindet.

Es ist beachtenswerth, dass der in VI aufgestellte Ausdruck nur eine einzige Form hat, während der in I oder II aufgestellte Ausdruck zwei Formen hatte.

Aufgabe. 13.

Man sucht für y eine solche Function von x, dass der Ausdruck

$$U = x \cdot y + p^2 \cdot \lg \operatorname{nat} qx + 3g \cdot \sqrt[3]{W} hx \cdot (x - y)$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Die beiden imaginären Formen des Radicals $\sqrt[3]{hx\cdot(x-y)}$ sollen nicht berücksichtigt werden, da sie doch nur auf einen Einzel-stand führen. Durch Mutiren bekommt man

$$\text{I)}\quad \delta U = \frac{-g\cdot\sqrt[3]{hx} + x\cdot\sqrt[3]{(x-y)^2}}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}\cdot\delta y$$

Erstens. Aus $\frac{d_y U}{dy} = 0$ folgt $y = \frac{1}{x}\cdot(x^2 - g\cdot\sqrt{gh})$, d. h. y hat zwei reelle Formen, je nachdem man dem $\sqrt{gh}$ seine positive oder negative Bedeutung beilegt. Ferner wird jetzt

$$\text{II)}\quad U' = x^2 + 2g\cdot\sqrt{gh} + p^2\cdot \lg\text{ nat } qx$$

so dass auch U' zwei reelle Formen hat. Da nun kein Mutationscoefficient einen andern Factor als $\sqrt[3]{x-y}$ in den Nenner bekommen kann, so kann auch kein Mutationscoefficient die im Calcul unzulässige Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ annehmen. Die für ΔU herzustellende Reihe läuft also nur nach ganzen Potenzen des $\varkappa$ fort, und alle Glieder sind reell. Da ferner $\delta^2 U = \frac{-2x^2}{3g\cdot\sqrt{gh}}\cdot\delta y^2$ wird; so erkennt man, dass ein Maximum-stand stattfindet, wenn $g\cdot\sqrt{gh}$ positiv ist, und dass ein Minimum-stand stattfindet, wenn $g\cdot\sqrt{gh}$ negativ ist.

Zweitens. Aus $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ folgt $y = x$; dabei ist $U' = x^2 + p^2\cdot\lg\text{ nat } qx$. Zur Prüfung setze man $(x^2 + p^2\cdot\lg\text{ nat } qx + \Delta U)$ statt U, und $(x + \varkappa\cdot\mathfrak{P})$ statt y in die ursprüngliche Gleichung überall ein; so ergibt sich

$$\Delta U = -\left(3g\cdot\sqrt[3]{hx}\right)\cdot(\varkappa\cdot\mathfrak{P})^{\frac{1}{3}} + x\cdot(\varkappa\cdot\mathfrak{P})$$

Bei einem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ kann ΔU sein Zeichen wechseln; und sonach findet weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Aufgabe 14.

Man sucht y als solche Function von x, dass der Ausdruck

$$U = y^3 + 3gx\cdot y^2 - 9\cdot g^2\cdot x^2\cdot y + \frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{(2gx - x^2)^4}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Durch Mutiren bekommt man

$$\delta U = 3\cdot(y^2 + 2gx\cdot y - 3g^2x^2)\cdot\delta y$$

$$\delta^2 U = 3\cdot(y^2 + 2gx\cdot y - 3g^2\cdot x^2)\cdot\delta^2 y + 6\cdot(y + gx)\cdot\delta y^2$$

Aus $\frac{d_y U}{dy} = 0$ folgt $y = -gx \pm 2gx$

1) Ist $y = -gx + 2gx = gx$, so ist $\delta^2 U = 12gx\cdot\delta y^2$; und $\delta^2 U$ hat mit gx dasselbe Zeichen. $U' = -5g^3\cdot x^3 + \frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{(2gx - x^2)^4}$ ist ein Maximum-stand oder Minimum-stand, jenachdem gx negativ oder positiv ist.

2) Ist $y = -gx - 2gx = -3gx$, so ist $\delta^2 U = -12gx\cdot\delta y^2$; und $\delta^2 U$ und gx

haben entgegengesetzte Zeichen. Somit ist $U' = 27 \cdot g^3 \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{(2 \cdot gx - x^2)^4}$ ein Maximum-stand oder Minimum-stand, je nachdem gx positiv oder negativ ist.

Aufgabe 15.

Welche unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen Flächen hat in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft, dass sie folgenden von den Coordinaten abhängigen Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = b \cdot (x - w) + 3 \cdot (hxw - y)^2 + g \cdot \sqrt{(hxw - y)^9}$$

bei irgend zwei nach Belieben gewählten Abscissen x und w grösser oder kleiner macht, als ihn bei den nemlichen zwei Abscissen x und w alle andern der gesuchten Fläche in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarflächen machen können?

Da hinsichtlich des Radicals keine Einschränkung beigefügt ist, so hat dieser Ausdruck zwei reelle Formen, je nachdem man dem Radical seine positive oder negative Bedeutung beilegt. Man wird aber die Aufgabe leichter durchführen, wenn man

$$\text{II)}\quad U = b \cdot (x - w) + 3 \cdot (hxw - y)^2 + g \cdot (\sqrt{1}) \cdot (hxw - y)^{\frac{9}{2}}$$

setzt, und nur $(\sqrt{1})$ als zweideutig, alles Andere aber als eindeutig behandelt. Durch Mutiren bekommt man

$$\text{III)}\quad \delta U = -(hxw - y) \cdot \left(6 + \frac{9g}{2} \cdot (\sqrt{1}) \cdot (hxw - y)^{\frac{5}{2}}\right) \cdot \delta y$$

A) Man setze $hxw - y = 0$, so bekommt man für die gesuchte Fläche folgende Gleichung

$$y = h \cdot x \cdot w$$

Dabei ist $U' = b \cdot (x - w)$, und $\delta^2 U = + 6 \cdot \delta y^2$, so dass man versucht sein könnte, zu behaupten, es fände ein Minimum-stand statt. Da man aber sogleich sieht, dass bei den jetzigen Specialitäten $\frac{d_y^5 U}{dy^5} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ wird, so muss man sich überzeugen, ob alle Glieder der für ΔU herzustellenden Reihe beständig reell bleiben. Man setze also $(hxw + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ statt y, und $(b \cdot (x - w) + \Delta U)$ statt U in Gleichung II ein, so ergibt sich

$$\Delta U = 3 \cdot (-\varkappa \cdot \mathfrak{P})^2 + g \cdot (\sqrt{1}) \cdot (-\varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{9}{2}}$$

Hier ist der erste Theilsatz beständig reell und beständig positiv, der zweite geht vom Reellen ins Imaginäre oder umgekehrt über. Es findet also ein Gränz-stand statt. Denkt man sich den zweiten Theilsatz reell und das $\varkappa$ im Momente des Verschwindens; so ist ΔU positiv, das Radical $(\sqrt{1})$ mag seine positive oder negative Bedeutung haben. Der Gränz-stand ist also kleiner als seine reellen Nachbarzustände.

B) Setzt man $6 + \frac{9g}{2} \cdot (\sqrt{1}) \cdot (hxw - y)^{\frac{5}{2}} = 0$, so ist $(\sqrt{1}) \cdot (hxw - y)^{\frac{5}{2}} = -\frac{4}{3g}$; weil aber der Exponent 5 eine ungrade Zahl ist, so ist $(\sqrt{1}) \cdot (hxw - y)^{\frac{5}{2}} = \left((\sqrt{1}) \cdot (hxw - y)^{\frac{1}{2}}\right)^5$; und somit ist auch $\left((\sqrt{1}) \cdot (hxw - y)^{\frac{1}{2}}\right)^5 = -\frac{4}{3g}$. Wenn man beiderseits die fünfte Wurzel auszieht, so bekommt man

$$\text{IV)}\quad (\sqrt{1}) \cdot (hxw - y)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[5]{-\frac{4}{3g}}$$

Wenn man beiderseits aufs Quadrat erhebt, so bekommt man $hxw - y = \left(\sqrt[5]{-\frac{4}{3g}}\right)^2$; und die gesuchte Fläche hat folgende Gleichung

$$\text{V)}\quad y = h\cdot x\cdot w - \left(\sqrt[5]{-\frac{4}{3\cdot g}}\right)^2$$

Erhebt man Gleichung IV beiderseits auf die vierte Potenz, so bekommt man $(h.x.w - y)^2 = \left(\sqrt[5]{-\frac{4}{3.g}}\right)^4$; und erhebt man Gleichung IV beiderseits auf die neunte Potenz, so bekommt man $(\sqrt{1})\cdot(h\cdot x\cdot w - y)^{\frac{9}{2}} = \left(\sqrt[5]{-\frac{4}{3.g}}\right)^9 = \left(\sqrt[5]{-\frac{4}{3.g}}\right)^5\cdot\left(\sqrt[5]{-\frac{4}{3.g}}\right)^4$ $= -\frac{4}{3.g}\cdot\left(\sqrt[5]{-\frac{4}{3.g}}\right)^4$. Gleichung II geht also über in

$$\text{VI)}\quad U' = b\cdot(x - w) + \frac{5}{3}\cdot\left(\sqrt[5]{-\frac{4}{3g}}\right)^4$$

Dieser für U' hergestellte Ausdruck hat aber unter seinen fünf Formen nur eine einzige reelle, und seine vier imaginären Formen dürfen nicht weiter beachtet werden. Da ferner kein Mutationscoefficient einen andern Factor als $(hxw - y)$ in den Nenner bekommen kann, so bekommt auch kein Mutationscoefficient die im Calcul unzulässige Form $\frac{\mathfrak{A}}{0}$; und die für ΔU herzustellende Reihe läuft nur nach ganzen Potenzen des $\varkappa$ fort. Mutirt man Gleichung III noch einmal, so bekommt man zunächst

$$\delta^2 U = -(hxw - y)\cdot\left(6 + \frac{9g}{2}\cdot(\sqrt{1})\cdot(hxw - y)^{\frac{5}{2}}\right)\cdot\delta^2 y$$
$$+\left(6 + \frac{63\cdot g}{4}\cdot(\sqrt{1})\cdot(hxw - y)^{\frac{5}{2}}\right)\cdot\delta y^2$$

Nun ist $(\sqrt{1})\cdot(hxw - y)^{\frac{5}{2}} = -\frac{4}{3g}$; und unter Berücksichtigung alles Vorhergehenden bleibt nur $\delta^2 U = -15\cdot\delta y^2$, woran man erkennt, dass ein Maximum-stand stattfindet.

Es ist beachtenswerth, dass der in VI aufgestellte Ausdruck nur eine einzige reelle Form hat, während der in I oder II aufgestellte Ausdruck zwei reelle Formen hat.

Aufgabe 16.

Welche unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen Flächen hat in sich einen bestimmten Punkt, der so gelegen ist, dass folgender von den Coordinaten dieses Punktes abhängige Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = 6ax + x^2 + w^2 + 6y^2 - 4hy\cdot(x + w)$$

grösser oder kleiner ist, als bei allen andern nächstgelegenen Nachbarpunkten, mögen sie nun sich in der gesuchten Fläche oder in den ihr überall nächstanliegenden Nachbarflächen befinden, der Fall sein kann?

Diese Aufgabe verlangt, wie man sieht, einen Maximumwerth eines Maximum-standes oder einen Minimumwerth eines Minimum-standes. Zu den irgend einem beliebigen Punkte nächstgelegenen (sowohl in der gesuchten, als in allen nächstanliegenden Nach-

barflächen befindlichen) Nachbarpunkten gehören die Abscissen $(x + Dx)$ und $(w + Dw)$, welche man (nach §. 76 und 156) auch darstellen kann durch

$$\text{II)}\quad x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x \ldots\ldots$$

$$\text{III)}\quad w + \varkappa \cdot \vartheta w + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 w + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 w \ldots\ldots$$

und die Ordinate

$$\text{IV)}\quad y + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 y \ldots\ldots$$

wo, wie (aus §. 78) bekannt

$${}_{(}\delta_{)}y = \delta y + \frac{d_x y}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d_w y}{dw} \cdot \vartheta w$$

$${}_{(}\delta_{)}^2 y = \delta^2 y + 2 \cdot \frac{d_x \delta y}{dx} \cdot \vartheta x + 2 \cdot \frac{d_w \delta y}{dw} \cdot \vartheta w + \frac{d_x y}{dx} \cdot \vartheta^2 x + \frac{d_w y}{dw} \cdot \vartheta^2 w$$

$$+ \frac{d_x^2 y}{dx^2} \cdot \vartheta x^2 + 2 \cdot \frac{d_x d_w y}{dx.dw} \cdot \vartheta x \cdot \vartheta w + \frac{d_w^2 y}{dw^2} \cdot \vartheta w^2$$

etc. etc.

ist. Da aber die Werthänderungen des x und des w hier ganz unabhängig und willkürlich sind, so wäre es schon hinreichend, statt der Reihen II und III nur $(x + \varkappa \cdot \vartheta x)$ und $(w + \varkappa \cdot \vartheta w)$ zu setzen, wobei also $\vartheta^2 x = 0$, $\vartheta^2 w = 0$, $\vartheta^3 x = 0$, $\vartheta^3 w = 0$ etc. ist. Durch Mutiren bekommt man

$$\text{V)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = 4 \cdot (3y - hx - hw) \cdot \delta y$$

$$+ \left(4 \cdot (3y - hx - hw) \cdot \frac{d_x y}{dx} + 6a + 2x - 4hy\right) \cdot \vartheta x$$

$$+ \left(4 \cdot (3y - hx - hw) \cdot \frac{d_w y}{dw} + 2w - 4hy\right) \cdot \vartheta w$$

Aus ${}_{(}\delta_{)}U = 0$ folgt zuerst die identische Gleichung

$$\text{VI)}\quad 3y - hx - hw = 0$$

und die beiden nichtidentischen Gleichungen

$$\text{VII)}\quad 4 \cdot (3y - hx - hw) \cdot \frac{d_x y}{dx} + 6a + 2x - 4hy = 0$$

$$\text{VIII)}\quad 4 \cdot (3y - hx - hw) \cdot \frac{d_w y}{dw} + 2w - 4hy = 0$$

welche sich aber wegen Gleichung VI zurückziehen auf

$$\text{IX)}\quad 6a + 2x - 4hy = 0 \quad \text{und} \quad \text{X)}\quad 2w - 4hy = 0$$

Aus VI folgt zunächst

$$\text{XI)}\quad y = \frac{h}{3} \cdot (x + w)$$

Die gesuchte Fläche ist also eine Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, und bei welcher die in den Coordinatenebenen XY und WY liegenden Spuren mit der Coordinatenaxe Y solche Winkel bilden, deren goniometrische Cotangente $= \frac{h}{3}$.

Führt man nun in IX und X für y den Ausdruck ein, so bekommt man $x = \frac{3 \cdot (3 - 2h^2)}{4h^2 - 3} \cdot a$, und $w = \frac{6h^2}{4h^2 - 3} \cdot a$. Unter diesen Umständen bleibt nur

$$\text{XII)}\quad \partial_\beta^2 U = 12 \cdot \partial y^2 + \frac{2}{3} \cdot (3 - 2h^2) \cdot \left[\left(\vartheta x - \frac{2h^2}{3 - 2h^2} \cdot \vartheta w\right)^2 + \frac{3 \cdot (3 - 4h^2)}{(3 - 2h^2)^2} \cdot \vartheta w^2\right]$$

Der Theilsatz mit dem Mutationscoefficienten ist unter allen Umständen positiv; dagegen das Aggregat der mit Differenzcoefficienten versehenen Theilsätze ist nur dann sicher positiv, wenn $(3 - 2h^2)$ und $(3 - 4h^2)$ gleichzeitig positiv sind; und dieses ist der Fall bei allen von $\left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}\right)$ bis zu $\left(+\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}\right)$ liegenden Werthen des h. Dabei findet aber ein Minimumwerth eines Minimum-standes statt.

Bei allen zwischen $(-\infty)$ und $\left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}\right)$ sowie bei allen zwischen $\left(+\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}\right)$ und $(+\infty)$ liegenden Werthen des h kann von einem sicheren Zeichenstande des mit Differenzcoefficienten versehenen Aggregates keine Rede sein: und in diesem Falle hat der vorhandene Minimum-stand weder einen Maximumwerth noch Minimumwerth.

Aufgabe 17.

Irgend eine Aufgabe führe auf den Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = g \cdot x \cdot w - h \cdot (x^2 - w) + 2y + 3 \cdot \sqrt[3]{(2xw - y)^2}$$

und man sucht für y eine solche Function von x und w, und zugleich für x und w solche bestimmte Werthe, dass dabei U ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes wird.

Der gegebene Ausdruck ist wegen des Theilsatzes $\sqrt[3]{(2xw - y)^2}$ ein dreiförmiger; um aber bequem calculiren zu können, setze man $\left(\sqrt[3]{1}\right) \cdot (2xw - y)^{\frac{2}{3}}$, und betrachte nur den Factor $\left(\sqrt[3]{1}\right)$ als dreiförmig, alles Andere aber als einförmig und reell. Statt Gleichung I bekommt man also

$$\text{II)}\quad U = g \cdot x \cdot w - h \cdot (x^2 - w) + 2y + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{1}\right) \cdot (2xw - y)^{\frac{2}{3}}$$

Um nun die Aufgabe weiter durchführen zu können, bringe man sie in zwei Abtheilungen, wobei man dem $\left(\sqrt[3]{1}\right)$ zuerst seine reelle, und dann seine beiden imaginären Formen beilegt.

Erste Abtheilung.

Wenn man dem $\left(\sqrt[3]{1}\right)$ seine reelle Bedeutung beilegt, so geht Gleichung II über in

$$\text{III)}\quad U = gxw - h \cdot (x^2 - w) + 2y + 3 \cdot (2xw - y)^{\frac{2}{3}}$$

wo man Alles als eindeutig und reell zu betrachten hat. Um die irgend einem beliebigen Werthe der gesuchten Function nächstgelegenen (sowohl aus der gesuchten Function, als auch aus allen nächstanliegenden Nachbarfunctionen entstehenden) Nachbarwerthe herzustellen, lässt man die nichtmutablen Veränderlichen x und w übergehen in

$$x + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 x \; \ldots\ldots$$

$$w + \varkappa \cdot \vartheta w + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 w + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \vartheta^3 w \; \ldots\ldots$$

und das mutable Element y lässt man übergehen in

$$y + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot {}_{(}\delta_{)}^3 y \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, .$$

Man bekommt also für den gemischten Mutationscoefficient der ersten Ordnung

$$\text{IV)} \quad {}_{(}\delta_{)}U = 2 \cdot \left(1 - (2xw - y)^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \delta y$$

$$+ \left[2 \cdot \left(1 - (2xw - y)^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \frac{d_x y}{dx} + gw - 2hx + 4w \cdot (2xw - y)^{-\frac{1}{3}}\right] \cdot \vartheta x$$

$$+ \left[2 \cdot \left(1 - (2xw - y)^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \frac{d_w y}{dw} + gx + h + 4x \cdot (2xw - y)^{-\frac{1}{3}}\right] \cdot \vartheta w$$

Erstens. Setzt man ${}_{(}\delta_{)}U = 0$, d. h. $\frac{d_y U}{dy} = 0$, $\frac{d_x U}{dx} = 0$, $\frac{d_w U}{dw} = 0$; so hat man zuerst die identische Gleichung

$$\text{V)} \quad 1 - (2xw - y)^{-\frac{1}{3}} = 0$$

und auch noch die nichtidentischen Gleichungen

$$\text{VI)} \quad 2 \cdot \left(1 - (2xw - y)^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \frac{d_x y}{dx} + gw - 2hx + 4w \cdot (2xw - y)^{-\frac{1}{3}} = 0$$

$$\text{VII)} \quad 2 \cdot \left(1 - (2xw - y)^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \frac{d_w y}{dw} + gx + h + 4x \cdot (2xw - y)^{-\frac{1}{3}} = 0$$

Die beiden letzten Gleichungen ziehen sich aber wegen V zurück auf

$$\text{VIII)} \quad gw - 2hx + 4w \cdot (2xw - y)^{-\frac{1}{3}} = 0 \quad \text{und} \quad \text{IX)} \quad gx + h + 4x \cdot (2xw - y)^{-\frac{1}{3}} = 0$$

Aus V folgt

$$\text{X)} \quad y = 2xw - 1$$

und wenn man diesen Ausdruck in VIII und IX einführt, so bekommt man

$$\text{XI)} \quad x = -\frac{h}{4 + g} \quad \text{und} \quad \text{XII)} \quad w = -2 \cdot \left(\frac{h}{4 + g}\right)^2$$

Jetzt bleibt für den gemischten Mutationscoefficienten zweiter Ordnung nur

$${}_{(}\delta_{)}^2 U = -\frac{2}{3} \cdot \delta y^2 - 2h \cdot \vartheta x^2 + 2 \cdot (4 + h) \cdot \vartheta x \cdot \vartheta w$$

Daran erkennt man, dass von einem sichern Zeichenstande des ${}_{(}\delta_{)}^2 U$ keine Rede sein kann. Ebenso erkennt man, dass ein Maximum-stand vorhanden ist, welcher aber weder einen Maximumwerth noch einen Minimumwerth hat.

Zweitens. Man setze $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$, so hat man die identische Gleichung

$$\text{XIII)} \quad 2xw - y = 0$$

Daraus folgt

$$\text{XIV)} \quad y = 2xw$$

Es ist also $\frac{d_x y}{dx} = 2w$ und $\frac{d_w y}{dw} = 2x$, und sonach bekommt man

$$\frac{d_x U}{dx} = 2 \cdot \left(1 - (2xw - y)^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot 2w + gw - 2hx + 4w \cdot (2xw - y)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{d_w U}{dw} = 2 \cdot \left(1 - (2xw - y)^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot 2x + gx + h + 4x \cdot (2xw - y)^{-\frac{1}{3}}$$

oder vielmehr $\frac{d_x U}{dx} = 4w + gw - 2hx$ und $\frac{d_w U}{dw} = 4x + gx + h$; und daran erkennt

man, dass man nur $\frac{d_x U}{dx} = 0$ und $\frac{d_w U}{dw} = 0$ setzen kann, so dass sich abermals $x = -\frac{h}{4+g}$ und $w = -2\cdot\left(\frac{h}{4+g}\right)^2$ ergibt. Es ist also der bestimmte Werth des $y = 4\cdot\left(\frac{h}{4+g}\right)^3$ und $U'' = -h\cdot\left(\frac{h}{4+g}\right)^2$.

Das Prüfungsmittel ergibt sich hier nur durch directe Reihenentwickelung. Aus $y = 2xw$ folgt $\frac{d_x y}{dx} = 2w$, $\frac{d_w y}{dw} = 2x$, $\frac{d_x^2 y}{dx^2} = 0$, $\frac{d_x d_w y}{dx.dw} = 2$, $\frac{d_w^2 y}{dw^2} = 0$, $\frac{d_x^3 y}{dx^3} = 0$, etc.; und indem man nach dem Vorgange der Aufgabe 4 verfährt, bekommt man

$$\text{XV)}\quad {}_{(\Delta)}U = 3\cdot\Big(-\varkappa\cdot\delta y - \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\Big(\delta^2 y + 2\cdot\frac{d_x\delta y}{dx}\cdot\vartheta x + 2\cdot\frac{d_w\delta y}{dw}\cdot\vartheta w + 4\cdot\vartheta x\cdot\vartheta w\Big) - \ldots\ldots + 2\cdot\Big(\varkappa\cdot\vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\vartheta^2 x + \ldots\ldots\Big)\cdot\Big(\varkappa\cdot\vartheta w + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\vartheta^2 w + \ldots\ldots\Big)\Big)^{\frac{2}{3}} + 2\Big(\varkappa\cdot\delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\Big(\delta^2 y + 2\cdot\frac{d_x\delta y}{dx}\cdot\vartheta x + 2\cdot\frac{d_w\delta y}{dw}\cdot\vartheta w + 4\cdot\vartheta x\cdot\vartheta w\Big) + \ldots\ldots\Big) - h\cdot\Big(\varkappa\cdot\vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\vartheta^2 x + \ldots\ldots\Big)^2 + g\cdot\Big(\Big(\varkappa\cdot\vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\vartheta^2 x + \ldots\ldots\Big)\cdot\Big(\varkappa\cdot\vartheta w + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\vartheta^2 w + \ldots\ldots\Big)\Big)$$

In der aus diesem Ausdrucke noch weiter zu entwickelnden Reihe enthält das erste Glied $3\cdot\varkappa^{\frac{2}{3}}\cdot\delta y^{\frac{2}{3}}$ keinen Differenzcoefficienten, es bietet also auch nicht das Mittel, den gemischten Zustand beurtheilen zu können. Man wird daher (wie in Aufgabe 4) zuerst den primären Zustand für sich, und dann den secundären Zustand für sich untersuchen. Dann wird man erkennen, dass wohl ein Minimum-stand vorhanden ist, welcher aber weder einen Maximumwerth noch Minimumwerth hat.

Zweite Abtheilung.

Man kehre wieder zu Gleichung II zurück, und lege dem $(\sqrt[3]{1})$ seine beiden imaginären Formen bei.

Erstens. Wollte man $\frac{d_y U}{dy} = 0$ setzen, so bekäme man

$$\text{XVI)}\quad 2 - 2\cdot(\sqrt[3]{1})\cdot(2xw - y)^{-\frac{1}{3}} = 0$$

Daraus folgt zunächst $(2xw - y)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1}$; und wenn man beiderseits auf die dritte Potenz erhebt, so gibt sich $2xw - y = 1$, so dass man $y = 2xw - 1$ bekommt. Dabei geht Gleichung XVI über in $2 - 2\cdot(\sqrt[3]{1}) = 0$. Nun repräsentirt $(\sqrt[3]{1})$ nur seine beiden imaginären Formen, somit enthält letztere Gleichung einen Widerspruch mit sich selbst; und desshalb kann dieser Fall nicht weiter beachtet werden.

Zweitens. Bei $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ muss dennoch $\frac{d_w U}{dw} = 0$ und $\frac{d_x U}{nx} = 0$ gesetzt werden. Es findet dabei ein Einzel-stand statt, welcher aber weder einen Maximumwerth noch Minimumwerth hat.

Aufgabe 18.

Man sucht y als solche Function von x, dass das in folgender ungesonderten Gleichung

I) $U^3 - 6 \cdot U^2 \cdot y + 12 \cdot U \cdot y^2 - 8 \cdot y^3 - 27 \cdot y^2 + 54 \cdot xy - 27 \cdot x^2 = 0$

enthaltene U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Durch Mutiren bekommt man zunächst

$$\text{II)} \quad \delta U = \frac{2 \cdot U^2 - 8 \cdot U \cdot y + 8 \cdot y^2 + 18 \cdot y - 18 \cdot x}{U^2 - 4 \cdot U \cdot y + 4 \cdot y^2} \cdot \delta y$$

Erstens. Setzt man $\delta U = 0$, so bekommt man

$$\text{III)} \quad 2 \cdot U^2 - 8U \cdot y + 8 \cdot y^2 + 18 \cdot y - 18 \cdot x = 0$$

Nun eliminire man U aus I und III, so bekommt man

$$\text{IV)} \quad U = 3x - y$$

Führt man $(3x - y)$ an die Stelle des U in I ein, so gibt sich

$$\text{V)} \quad 27 \cdot (x - y)^2 \cdot (x - y - 1) = 0$$

Führt man ebenso $(3x - y)$ statt U in III ein, so bekommt man

$$\text{VI)} \quad 18 \cdot (x - y) \cdot (x - y - 1) = 0$$

Der gemeinschaftliche Theiler der beiden Gleichungen V und VI ist also $(x - y) \cdot (x - y - 1)$; also ist entweder $x - y = 0$ oder $x - y - 1 = 0$.

A) Setzt man $x - y - 1 = 0$, so bekommt man

$$\text{VII)} \quad y = x - 1, \quad \text{und} \quad \text{VIII)} \quad U' = 2x + 1$$

Dabei bekommt man $\delta^2 U = -\frac{2}{3} \cdot \delta y^2$; und man erkennt, dass ein Maximum-stand stattfindet. Will man aber das Prüfungsmittel durch directe Reihenentwickelung herstellen, so setze man

$\mathfrak{U}$ an die Stelle des U

und

$\left((x - 1) + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\right)$ oder kurzweg $\left((x - 1) + \varkappa . \mathfrak{P}\right)$ statt y

in Gleichung I ein; und man bekommt

$$\begin{aligned} &-(8 \cdot (x - 1)^3 + 27) - 6 \cdot (4 \cdot x^2 - 8x - 5) \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{P} - 3 \cdot (8x + 1) \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2 \\ &- 8 \cdot \varkappa^3 \cdot \mathfrak{P}^3 + 12 \cdot ((x - 1)^2 + 2 \cdot (x - 1) \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{P} + \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2) \cdot \mathfrak{U} \\ &- 6 \cdot ((x - 1) + \varkappa \cdot \mathfrak{P}) \cdot \mathfrak{U}^2 + \mathfrak{U}^3 = 0 \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung hat man nun (§. 20—46) alle nach steigenden Potenzen des $\varkappa$ fortlaufenden Reihen zu entwickeln, von denen man jedoch nur diejenigen, welche mit $(2x + 1)$ anfangen, zu beachten hat. Man setze also zunächst $(A \cdot \varkappa^{\alpha} + R_1)$ an die Stelle des $\mathfrak{U}$ überall ein; und da $-(8.(x - 1)^3 + 27)$ soviel ist als $-(8.(x - 1)^3 + 27).\varkappa^0$, so hat man folgende Exponenten miteinander zu vergleichen

$$0, \ \alpha, \ (\alpha + 1), \ (\alpha + 2), \ 2\alpha, \ (2\alpha + 1), \ 3\alpha$$

und man erkennt, dass nur $\alpha = 0$ werden kann. Dabei ergibt sich aber folgende Coefficientengleichung

$$-(8 \cdot (x - 1)^3 + 27) + 12 \cdot (x - 1)^2 \cdot A - 6 \cdot (x - 1) \cdot A^2 + A^3 = 0$$

oder

$$(A - 2 \cdot (x - 1))^3 = 27$$

Also ist $A = 2 \cdot (x - 1) + 3 \cdot \sqrt[3]{1}$. Da aber hier nur die mit $(2x + 1)$ anfangende Reihe betrachtet werden darf, so kann man nur die reelle Form des Radicals $\sqrt[3]{1}$ benützen, d. h. man kann nur $A = 2x + 1$ setzen. Fahrt man mit Entwickelung dieser Reihe fort, so bekommt man

$$\mathfrak{U} = (2x+1) - 2\cdot\left[\frac{1}{6}\cdot\varkappa^2\cdot\mathfrak{P}^2 + \frac{1\cdot4}{6\cdot9}\cdot\varkappa^3\cdot\mathfrak{P}^3 + \frac{1\cdot4\cdot7}{6\cdot9\cdot12}\cdot\varkappa^4\cdot\mathfrak{P}^4 + \ldots\ldots\right]$$

Bei einem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ ist die Summe aller mit $\varkappa$ behafteten Glieder dieser Reihe negativ und unendlichklein, so dass man ohne angebbaren Fehler setzen kann

$$\mathfrak{U} - U' = -\frac{1}{3}\cdot\varkappa^2\cdot\mathfrak{P}^2$$

oder

$$\mathfrak{U} - U' = -\frac{1}{3}\cdot\varkappa^2\cdot\left(\delta y + \frac{\varkappa}{1.2}\cdot\delta^2 y + \frac{\varkappa^2}{1.2.3}\cdot\delta^3 y + \ldots\ldots\right)^2$$

Da nun diese unendlichkleine Differenz negativ ist, so hat man abermals den Beweis, dass $U' = 2x + 1$ ein Maximum-stand ist. Wenn man bei $\delta^2 U = -\frac{2}{3}\cdot\delta y^2$ den weggelassenen Factor $\frac{\varkappa^2}{1.2}$ wieder hinsetzt, so bekommt man genau das erste Glied des zuletzt für die Differenz $\mathfrak{U} - U'$ hingestellten Ausdruckes.

B) Setzt man $x - y = 0$, so bekommt man

$$\text{IX)}\quad y = x,\quad \text{und X)}\quad U' = 2x$$

Dabei geht aber Gleichung II über in $\delta U = \frac{0}{0}\cdot\delta y$; und man muss, sowohl um die Bedeutung der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ zu ermitteln, als auch um das Prüfungsmittel herzustellen, jetzt zur directen Reihenentwickelung seine Zuflucht nehmen. Man setze also $\mathfrak{U}$ an die Stelle des U, und $(x + \varkappa\cdot\mathfrak{P})$ an die Stelle des y in Gleichung I überall ein; so ergibt sich

$$-8\cdot x^3 - 24\cdot x^2\cdot\varkappa\cdot\mathfrak{P} - 3\cdot(8x+9)\cdot\varkappa^2\cdot\mathfrak{P}^2 - 8\cdot\varkappa^3\cdot\mathfrak{P}^3$$
$$+ 12\cdot(x^2 + 2x\cdot\varkappa\cdot\mathfrak{P} + \varkappa^2\cdot\mathfrak{P}^2)\cdot\mathfrak{U} - 6\cdot(x+\varkappa\cdot\mathfrak{P})\cdot\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{U}^3 = 0$$

Aus dieser Gleichung muss man alle nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigenden Reihen entwickeln; und zu diesem Ende setze man zunächst $(A\cdot\varkappa^\alpha + R_1)$ an die Stelle des $\mathfrak{U}$ ein. Nun ist $-8\cdot x^3$ soviel als $-8\cdot x^3\cdot\varkappa^0$; und man hat abermals folgende Exponenten miteinander zu vergleichen:

$$0,\ \alpha,\ (\alpha+1),\ (\alpha+2),\ 2\alpha,\ (2\alpha+1),\ 3\alpha$$

Man erkennt, dass nur $\alpha = 0$ werden kann; und dabei gibt sich folgende Coefficientengleichung:

$$-8\cdot x^3 + 12\cdot x^2\cdot A - 6x\cdot A^2 + A^3 = 0$$

oder

$$(A - 2x)^3 = 0$$

Es ist also $A = 2x$; und wenn man mit Entwickelung der Reihe fortfährt, so bekommt man

$$\text{XI)}\quad \mathfrak{U} = 2x + 3\cdot(\sqrt[3]{1})\cdot\varkappa^{\frac{2}{3}}\cdot\mathfrak{P}^{\frac{2}{3}} + 2\cdot\varkappa\cdot\mathfrak{P}$$

d. h. man hat diesmal einen geschlossenen Ausdruck, und die dem $U = 2x$ nächstanliegenden Nachbarzustände sind dreiförmig. Um diese drei Formen gehörig zu benützen, denke man sich das U aus Gleichung I entwickelt, so gibt sich auch für U ein dreiförmiger Ausdruck.

α) Man scheide die reelle Form des U aus. Setzt man in diese reelle Form x an die Stelle des y, so gibt sich $U' = 2x$. Setzt man in diese reelle Form $(x + \varkappa\cdot\mathfrak{P})$ an die Stelle des y, so gibt sich abermals eine reelle Form

$$\text{XII)}\quad \mathfrak{U} = 2x + 3\cdot\varkappa^{\frac{2}{3}}\cdot\mathfrak{P}^{\frac{2}{3}} + 2\cdot\varkappa\cdot\mathfrak{P}$$

Bei einem im Momente des Verschwindens befindlichen $\varkappa$ kann man ohne angebbaren Fehler setzen

$$\mathfrak{U} - U' = 3 \cdot \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot \mathfrak{P}^{\frac{2}{3}}$$

oder

$$\mathfrak{U} - U' = 3 \cdot \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\delta y + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots \ldots \right)^{\frac{2}{3}}$$

Hieran erkennt man, dass der aus der reellen Form des U sich ergebende Ausdruck $U' = 2x$ ein Minimum-stand ist.

β) Man nehme jetzt die beiden imaginären Formen des U, und setze auch in diese x an die Stelle des y, so gibt sich abermals $U' = 2x$. Setzt man aber $(x + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ an die Stelle des y, so gibt sich

$$\mathfrak{U} = 2x + 3 \cdot (\sqrt[3]{1}) \cdot \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot \mathfrak{P}^{\frac{2}{3}} + 2 \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{P}$$

wo das Radical $\sqrt[3]{1}$ nur seine beiden imaginären Formen repräsentirt. Hieran erkennt man, dass der aus den beiden imaginären Formen des U sich ergebende Ausdruck $U' = 2x$ ein Einzel-stand ist.

Die Reihe XI dient dazu, die wahre Bedeutung der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ kennen zu lernen. Weil nämlich $\varkappa^{\frac{2}{3}}$ die niedrigste Potenz des $\varkappa$ ist, so ist die hiesige unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ soviel als $\frac{\mathfrak{B}}{0}$.

Zweitens. Aus $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ folgt $U^2 - 4U \cdot y + 4 \cdot y^2 = 0$. Daraus gibt sich $U = 2y$. Man hat also jetzt wieder $y = x$ und $U' = 2x$, wie vorhin. Zum Prüfungsmittel bekommt man wieder die Reihe XI.

Nachtrag. Da man zuerst $U' = 2x + 1$ und hierauf $U' = 2x$ bekommen hat; so erkennt man gradezu, dass für x kein solcher bestimmter Werth aufgesucht werden kann, bei welchem diese beiden primären Zustände einen grösseren oder kleineren Werth bekommen, als bei den dem für x zu suchenden Werthe unmittelbar vorhergehenden und unmittelbar nachfolgenden Nachbarwerthen der Fall ist, d. h. es kann von einer secundären Beziehung keine Rede sein.

Aufgabe 19.

Man sucht für y eine solche Function von x, dass das in folgender ungesonderten Gleichung

$$\text{I)} \quad U^3 - 3U^2 \cdot y + y^3 + g^3 \cdot x^3 = 0$$

enthaltene U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Durch Mutiren bekommt man zunächst

$$\text{II)} \quad \delta U = \frac{(U + y) \cdot (U - y)}{U \cdot (U - 2y)} \cdot \delta y$$

Erstens. Aus $\frac{d_y U}{dy} = 0$ folgt entweder $U + y = 0$ oder $U - y = 0$.

A) Ist $U + y = 0$, so ist $U = -y$; und wenn man $(-y)$ statt U in Gleichung I einsetzt, so bekommt man $y = + \frac{gx}{\sqrt[3]{3}}$, wo aber das Radical $\sqrt[3]{3}$ nur nach seiner reellen Bedeutung genommen werden darf, weil das Imaginäre niemals als Grösstes oder Kleinstes gelten kann.

Führt man nun $\left(+\frac{gx}{\sqrt[3]{3}}\right)$ statt y in Gleichung I zurück, so zerlegt sich dieselbe in $\left(U+\frac{gx}{\sqrt[3]{3}}\right)\cdot\left(U-\frac{2gx}{\sqrt[3]{3}}\right)^2=0$, und daraus folgt entweder $U'=-\frac{gx}{\sqrt[3]{3}}$ oder $U'=+\frac{2gx}{\sqrt[3]{3}}$. Da aber die für y und U zu suchenden Ausdrücke solche zusammengehörige sein müssen, dass nicht nur Gleichung I, sondern auch die Gleichung $U+y=0$ identisch werden; so kann man nur $U'=-y=-\frac{gx}{\sqrt[3]{3}}$ gebrauchen, und $U'=+\frac{2gx}{\sqrt[3]{3}}$ muss unberücksichtigt bleiben. Unter diesen Umständen ist $\partial^2 U=-\frac{2\cdot\sqrt[3]{3}}{3\cdot gx}\cdot\partial y^2$, und man erkennt, dass für ein positives gx ein Maximum-stand, dagegen für ein negatives gx ein Minimum-stand stattfindet (jedoch mit steter Beachtung, dass in der Analysis jedesmal $p>q$ ist, sobald die Differenz $p-q$ positiv wird). Will man aber das Prüfungsmittel durch directe Reihenentwickelung gewinnen, so setze man $\mathfrak{U}$ an die Stelle des U, und $\left(\frac{gx}{\sqrt[3]{3}}+\varkappa\cdot\mathfrak{P}\right)$ an die Stelle des y in Gleichung I überall ein; und man bekommt

$$\text{III)}\quad \frac{4\cdot g^3\cdot x^3}{3}+\frac{3\cdot g^2\cdot x^2}{\sqrt[3]{9}}\cdot\varkappa\cdot\mathfrak{P}+\frac{3gx}{\sqrt[3]{3}}\cdot\varkappa^2\cdot\mathfrak{P}^2+\varkappa^3\cdot\mathfrak{P}^3-\frac{3gx}{\sqrt[3]{3}}\cdot\mathfrak{U}^2$$
$$-3\mathfrak{U}^2\cdot\varkappa\cdot\mathfrak{P}+\mathfrak{U}^3=0$$

Aus dieser Gleichung, wo, wie gesagt, alle Radicale nur nach ihrer reellen Bedeutung genommen werden dürfen, hat man alle nach steigenden Potenzen des $\varkappa$ fortlaufenden Reihen zu entwickeln. Man setze also zunächst $(A\cdot\varkappa^{\alpha}+R_1)$ an die Stelle des $\mathfrak{U}$ in Gleichung III überall ein, und da $\frac{4\cdot g^3\cdot x^3}{3}$ soviel ist als $\frac{4g^3\cdot x^3}{3}\cdot\varkappa^0$; so hat man folgende Exponenten miteinander zu vergleichen:

$$0,\ 2\alpha,\ (2\alpha+1),\ 3\alpha$$

und man erkennt, dass nur $\alpha=0$ werden kann. Dabei ergibt sich aber folgende Coefficientengleichung:

$$\frac{4g^3.x^3}{3}-\frac{3gx}{\sqrt[3]{3}}\cdot A^2+A^3=0$$

oder

$$\left(\frac{gx}{\sqrt[3]{3}}+A\right)\cdot\left(\frac{2gx}{\sqrt[3]{3}}-A\right)^2=0$$

Es ist also entweder $A=-\frac{gx}{\sqrt[3]{3}}$ oder $A=+\frac{2gx}{\sqrt[3]{3}}$. Nimmt man $A=-\frac{gx}{\sqrt[3]{3}}$, so bekommt man folgende Reihe

$$\mathfrak{U}=-\frac{gx}{\sqrt[3]{3}}-\frac{\sqrt[3]{3}}{3\cdot gx}\cdot\varkappa^2\cdot\mathfrak{P}^2+\frac{\sqrt[3]{9}}{9.g^2x^2}\cdot\varkappa^3\cdot\mathfrak{P}^3\ldots\ldots$$

Nimmt man aber $A=+\frac{2\cdot gx}{\sqrt[3]{3}}$, so bekommt man

$$\mathfrak{U} = + \frac{2gx}{\sqrt[3]{3}} + \left(\Vert\!\sqrt{gx \cdot \sqrt[3]{9}}\right) \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{P} \ldots\ldots$$

Die erste dieser Reihen repräsentirt eine Form des $\mathfrak{U}$; denn alle ihre Glieder sind eindeutig und reell, wie man aus dem Gesetze, dem die Coefficientengleichungen unterliegen, nachweisen kann.

Die zweite dieser Reihen repräsentirt die beiden andern Formen des $\mathfrak{U}$; sie ist aber eine von den Reihen, wo die Zweiförmigkeit nicht schon beim ersten Gliede beginnt. Uebrigens fängt diese zweite Reihe nicht mit dem für U' brauchbaren Ausdrucke $\left(-\frac{gx}{\sqrt[3]{3}}\right)$ an, sondern mit dem als unbrauchbar erfundenen Ausdrucke $\frac{2gx}{\sqrt[3]{3}}$; diese Reihe verdient also keine weitere Berücksichtigung.

Man kann sonach nur die erste Reihe berücksichtigen; und bei einem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ kann man ohne angebbaren Fehler setzen

$$\mathfrak{U} - U' = - \frac{\sqrt[3]{3}}{3gx} \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2,$$

oder

$$\mathfrak{U} - U' = - \frac{\sqrt[3]{3}}{3gx} \cdot \varkappa^2 \cdot \left(\delta y + \frac{\varkappa}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^2}{1.2.3} \cdot \delta^3 y \ldots\ldots\right)^2$$

Diese unendlichkleine Differenz ist negativ oder positiv, je nachdem gx positiv oder negativ ist; und wenn man bei $\delta^2 U = - \frac{2 \cdot \sqrt[3]{3}}{3 \cdot gx} \cdot \delta y^2$ den weggelassenen Factor $\frac{\varkappa^2}{1.2}$ wieder hinzusetzt, so bekommt man genau das erste Glied des zuletzt für die Differenz $\mathfrak{U} - U'$ hingestellten Ausdruckes.

B) Ist $U - y = 0$, so ist $U = y$; und wenn man y statt U in Gleichung I einsetzt, so bekommt man $y = gx$. Führt man nun gx statt y in I zurück, so zerlegt sich dieselbe in

$$(U - gx) \cdot (U^2 - 2U \cdot gx - 2 \cdot g^2x^2) = 0$$

Daraus folgt entweder $U' = gx$ oder $U' = gx \cdot (1 + \Vert\!\sqrt{3})$, wo das Radical $\Vert\!\sqrt{3}$ sowohl nach der positiven als negativen Bedeutung genommen werden muss. Da aber die für U und y zu suchenden Ausdrücke solche zusammengehörige sein müssen, dass nicht nur Gleichung I, sondern auch die Gleichung $U - y = 0$ identisch werden; so kann man nur $U' = y = gx$ gebrauchen, und $U' = gx \cdot (1 + \Vert\!\sqrt{3})$ muss unberücksichtigt bleiben. Unter diesen Umständen ist $\delta^2 U = + \frac{2}{gx} \cdot \delta y^2$, d. h. bei positivem gx findet ein Minimum-stand, und bei negativem gx findet ein Maximum-stand statt. Will man aber auch hier das Prüfungsmittel durch directe Reihenentwickelung gewinnen, so setze man wieder $\mathfrak{U}$ an die Stelle des U, und $(gx + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ an die Stelle des y in Gleichung I überall ein; und es ergibt sich

$$\text{IV)}\quad 2g^3 \cdot x^3 + 3 \cdot g^2 \cdot x^2 \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{P} + 3gx \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2 + \varkappa^3 \cdot \mathfrak{P}^3 - 3gx \cdot \mathfrak{U}^2$$
$$- 3 \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{U}^2 + \mathfrak{U}^3 = 0$$

Aus dieser Gleichung hat man nun alle nach steigenden Potenzen des $\varkappa$ fortlaufenden Reihen zu entwickeln. Man setze also zunächst $(A \cdot \varkappa^\alpha + R_1)$ an die Stelle des $\mathfrak{U}$ in Gleichung IV überall ein; und da $2 \cdot g^3 \cdot x^3$ soviel ist als $2 \cdot g^3 \cdot x^3 \cdot \varkappa^0$, so hat man folgende Exponenten miteinander zu vergleichen:

$$0,\ 2\alpha,\ (2\alpha + 1),\ 3\alpha$$

und man erkennt, dass nur $\alpha = 0$ werden kann. Dabei ergibt sich aber folgende Coefficientengleichung

$$2 \cdot g^3 \cdot x^3 - 3A^2 \cdot g^2 \cdot x^2 + A^3 = 0$$

oder

$$(A - gx) \cdot (A^2 - 2A \cdot gx - 2 \cdot g^2 \cdot x^2) = 0$$

d. h. es ist entweder $A = gx$ oder $A = gx \cdot (1 + \sqrt{3})$. Setzt man $A = gx$, so bekommt man folgende Reihe

$$\mathfrak{U} = gx + \frac{1}{gx} \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2 - \frac{5}{3 \cdot g^2 \cdot x^2} \cdot \varkappa^3 \cdot \mathfrak{P}^3 \ldots\ldots$$

Nimmt man aber $A = gx \cdot (1 + \sqrt{3})$, so bekommt man

$$\mathfrak{U} = gx \cdot (1 + \sqrt{3}) + \frac{3}{2} \cdot (3 + 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{P} \ldots\ldots$$

Die erste dieser Reihen repräsentirt eine Form des $\mathfrak{U}$, denn alle ihre Glieder sind eindeutig und reell, wie man aus dem Gesetze, welchem die Coefficientengleichungen unterliegen, nachweisen kann. Sie fängt mit dem für U' brauchbaren Ausdrucke an, und zeigt, dass ein Minimum-stand oder Maximum-stand stattfindet, je nachdem gx positiv oder negativ ist.

Die zweite dieser Reihen repräsentirt die beiden andern Formen des $\mathfrak{U}$. Da sie aber nicht mit dem für U' brauchbaren Ausdrucke anfängt, so ist sie nicht weiter zu berücksichtigen.

Zweitens. Aus $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ folgt entweder $U = 0$ oder $U - 2y = 0$.

A) Ist $U' = 0$, d. h. ist U' eine identische Function von x, so wird $y = -g \cdot x$. Zur Prüfung setze man $\mathfrak{U}$ an die Stelle des U, und $(-gx + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ an die Stelle des y in Gleichung I überall ein, so bekommt man

V) $3g^2 \cdot x^2 \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P}) - 3gx \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2 + \varkappa^3 \cdot \mathfrak{P}^3 + 3gx \cdot \mathfrak{U}^2 - 3\mathfrak{U}^2 \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{P} + \mathfrak{U}^3 = 0$

Aus dieser Gleichung hat man alle nach steigenden Potenzen des $\varkappa$ fortschreitenden Reihen zu entwickeln. Man setze also zunächst $(A \cdot \varkappa^\alpha + R_1)$ an die Stelle des $\mathfrak{U}$ in Gleichung V überall ein; so hat man folgende Exponenten miteinander zu vergleichen:

$$1, \quad 2\alpha, \quad (2\alpha + 1), \quad 3\alpha$$

Die für α sich ergebenden Werthe sind also $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 0$. Setzt man $\alpha = \frac{1}{2}$, so bekommt man

$$\mathfrak{U} = (\sqrt{-gx}) \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P}) + \frac{2}{9 \cdot \sqrt{-gx}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{3}{2}} \ldots\ldots$$

Diese Reihe repräsentirt zwei Formen des $\mathfrak{U}$, und zeigt an, dass $U' = 0$ ein Gränzstand ist; denn $\mathfrak{U}$ geht vom Imaginären ins Reelle über, wenn $(\varkappa \cdot \mathfrak{P})$ vom Positiven ins Negative übergeht.

Setzt man $\alpha = 0$, so bekommt man

$$\mathfrak{U} = -3 \cdot gx + \frac{1}{3 \cdot gx} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^2 \ldots\ldots$$

Diese Reihe repräsentirt die dritte Form des $\mathfrak{U}$; da sie aber nicht mit dem für U' brauchbaren Ausdrucke anfängt, so ist sie nicht weiter zu berücksichtigen.

B) Ist $U - 2y = 0$, so ist $U = 2y$; und wenn man 2y statt U in Gleichung I einsetzt, so bekommt man $y = \frac{gx}{\sqrt[3]{3}}$. Wenn man diesen Ausdruck statt y in Gleichung I zurückführt, so zerlegt sich dieselbe in $\left(U + \frac{gx}{\sqrt[3]{3}}\right) \cdot \left(U - \frac{2gx}{\sqrt[3]{3}}\right)^2 = 0$, d. h. es ist entweder $U' = -\frac{gx}{\sqrt[3]{3}}$ oder $U' = +\frac{2gx}{\sqrt[3]{3}}$. Da aber die für U und y zu suchenden Aus-

drücke solche zusammengehörige sein müssen, dass nicht nur Gleichung I, sondern auch die Gleichung $U - 2y = 0$ identisch werden; so kann man nur $U' = 2y = \frac{2 \cdot gx}{\sqrt[3]{3}}$ gebrauchen, und $U' = -\frac{gx}{\sqrt[3]{3}}$ muss diesmal unberücksichtigt bleiben. Zur Prüfung setze man $\mathfrak{U}$ an die Stelle des U, und $\left(\frac{gx}{\sqrt[3]{3}} + \varkappa \cdot \mathfrak{P}\right)$ an die Stelle des y in Gleichung I überall ein, so bekommt man

$$\text{VI)}\quad \frac{4 \cdot g^3 \cdot x^3}{3} + \frac{3 \cdot g^2 \cdot x^2}{\sqrt[3]{9}} \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{P} + \frac{3 \cdot g \cdot x}{\sqrt[3]{3}} \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2 + \varkappa^3 \cdot \mathfrak{P}^3$$
$$- \frac{3 \cdot g \cdot x}{\sqrt[3]{3}} \cdot \mathfrak{U}^2 - 3 \cdot \mathfrak{U}^2 \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{P} + \mathfrak{U}^3 = 0$$

Dieses ist aber genau dieselbe Gleichung, wie Gleichung III; und man bekommt wieder die zwei Reihen

$$\mathfrak{U} = -\frac{gx}{\sqrt[3]{3}} - \frac{\sqrt[3]{3}}{3 \cdot gx} \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2 + \frac{\sqrt[3]{9}}{9 \cdot g^2 \cdot x^2} \cdot \varkappa^3 \cdot \mathfrak{P}^3 \ldots\ldots$$

und

$$\mathfrak{U} = + \frac{2 \cdot gx}{\sqrt[3]{3}} + \left(\sqrt{gx \cdot \sqrt[3]{9}}\right) \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{P} \ldots\ldots$$

Die erste dieser Reihen repräsentirt eine Form des $\mathfrak{U}$, sie kann aber nicht beachtet werden, weil sie mit dem für U' unbrauchbaren Ausdrucke anfängt.

Die zweite dieser Reihen repräsentirt die beiden andern Formen des U, sie fängt mit dem für U' als brauchbar erfundenen Ausdrucke an, und thut dar, dass $U' = \frac{2gx}{\sqrt[3]{3}}$ ein Gränz-stand ist. Uebrigens ist diese zweite Reihe eine von denen, wo die Zweiförmigkeit nicht schon beim ersten Gliede beginnt.

Aufgabe 20.

Man sucht für y eine solche Function von x, dass das in folgender ungesonderten Gleichung

$$\text{I)}\quad U^4 - 2x \cdot U^3 + (2 - ax) \cdot a \cdot x^3 \cdot U^2 + x^2 \cdot y^2 - 4x^3 \cdot y + 4x^4 = 0$$

enthaltene U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Durch Mutiren bekommt man zunächst

$$\text{II)}\quad \delta U = \frac{x^2 \cdot (2x - y)}{U \cdot [2U^2 - 3x \cdot U + (2 - ax) \cdot a \cdot x^3]} \cdot \delta y$$

Erstens. Aus $\frac{d_y U}{dy} = 0$ folgt $2x - y = 0$, oder $y = 2x$. Gleichung I geht nun über in

$$\text{III)}\quad (U^2 - 2x \cdot U + (2 - ax) \cdot a \cdot x^3) \cdot U^2 = 0$$

Daraus folgt $U_1' = (2 - ax) \cdot x$, $U_2' = a \cdot x^2$, $U_3' = 0$.

A) Ist $U_1' = (2 - ax) \cdot x$, so ist $\delta^2 U = -\frac{1}{(2 - ax)^2 \cdot (1 - ax) \cdot x} \cdot \delta y^2$. So lange

das Product $(1 - ax) \cdot x$ positiv ist, findet ein Maximum-stand statt; und so lange das Product $(1 - ax) \cdot x$ negativ ist, findet ein Minimum-stand statt.

B) Ist $U_2' = a \cdot x^2$, so ist $\delta^2 U = + \frac{1}{a^2 \cdot x^2 \cdot (1 - ax) \cdot x} \cdot \delta y^2$. So lange das Product $(1 - ax) \cdot x$ positiv ist, findet jetzt ein Minimum-stand statt; und so lange das Product $(1 - ax) \cdot x$ negativ ist, findet ein Maximum-stand statt.

C) Ist $U_3' = 0$, d. h. ist U_3' eine identische Function von x; so nimmt Gleichung II folgende Form an:

$$\text{IV)} \quad \delta U = \frac{0}{0} \cdot \delta y$$

Der zu δy gehörige Factor ist also unbestimmt. Man stelle das Prüfungsmittel auf directem Wege her, setze desshalb $\mathfrak{U}$ an die Stelle des U, und $(2x + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ an die Stelle des y in Gleichung I überall ein; so bekommt man

$$\text{V)} \quad x^2 \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2 + (2 - ax) \cdot a \cdot x^3 \cdot \mathfrak{U}^2 - 2x \cdot \mathfrak{U}^3 + \mathfrak{U}^4 = 0$$

Daraus lassen sich folgende zwei nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihen entwickeln:

$$\mathfrak{U} = \left(-\frac{1}{(2 - ax) \cdot ax}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P}) - \frac{1}{(2 - ax)^2 \cdot a^2 \cdot x^3} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^2 \cdot \ldots \ldots$$

und

$$\mathfrak{U} = (x \pm x\sqrt{1 - ax}) - \frac{1}{2 \cdot (1 - ax) \cdot (1 - ax \pm 1) \cdot (x \pm x\sqrt{1 - ax})} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^2 \ldots \ldots$$

Die erste dieser Reihen repräsentirt zwei Formen des $\mathfrak{U}$, und liefert die dem $U_3' = 0$ nächstanliegenden Nachbarzustände. Sie zeigt, dass, wenn $(2 - ax) \cdot ax$ positiv, $U_3' = 0$ ein Einzel-stand ist; und dass, wenn $(2 - ax) \cdot ax$ negativ ist, das $U_3' = 0$ zwar kein Einzel-stand, aber auch weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand ist. Diese Reihe dient auch dazu, die Bedeutung der unbestimmten Form $\frac{d_y U}{dy} = \frac{0}{0}$ kennen zu lernen; weil nemlich das erste Glied dieser Reihe den Factor $\varkappa$ hat, so ist $\frac{d_y U}{dy} = \frac{0}{0} = \left(-\frac{1}{(2 - ax) \cdot ax}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Die zweite dieser Reihen repräsentirt die beiden andern aus V hervorgehenden Formen des $\mathfrak{U}$, liefert aber keine dem $U_3' = 0$ nächstanliegenden Nachbarzustände, braucht also nicht weiter berücksichtigt zu werden. Lässt man übrigens bei dem Doppelzeichen nur die oberen gelten, so geht die zweite Reihe über in

$$\mathfrak{U} = (2 - ax) \cdot x - \frac{1}{2 \cdot (2 - ax)^2 \cdot (1 - ax) \cdot x} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^2 \ldots \ldots$$

oder in

$$\mathfrak{U} = (2 - ax) \cdot x - \frac{1}{(2 - ax)^2 \cdot (1 - ax) \cdot x} \cdot \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta y^2 \ldots \ldots$$

und dieses ist der unter A behandelte Fall; denn wenn man den für das dortige $\delta^2 U$ hergestellten Ausdruck mit dem weggelassenen Factor $\frac{\varkappa^2}{1.2}$ multiplicirt, so bekommt man genau wieder das zweite Glied der letzten Reihe. Lässt man aber bei besagten Doppelzeichen die unteren gelten, so bekommt man

$$\mathfrak{U} = a \cdot x^2 + \frac{1}{2 \cdot a^2 x^2 \cdot (1 - ax) \cdot x} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^2 \ldots \ldots$$

oder

$$\mathfrak{U} = a \cdot x^2 + \frac{1}{a^2 x^2 \cdot (1 - ax) \cdot x} \cdot \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta y^2 \ldots \ldots$$

und dieses ist der unter B behandelte Fall.

Zweitens. Aus $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ folgt entweder $U = 0$ oder $2 \cdot U^2 - 3x \cdot U + (2 - ax) \cdot a \cdot x^3 = 0$.

A) Ist $U' = 0$, so reducirt sich Gleichung I auf $x^2 \cdot y^2 - 4x^3 \cdot y + 4 \cdot x^4 = 0$, woraus $y = 2x$ folgt, so dass man jetzt wieder den letzten der behandelten drei Fälle hat.

B) Aus $2 \cdot U^2 - 3x \cdot U + (2 - ax) \cdot a \cdot x^3 = 0$ folgt $U' = \frac{x}{4} \cdot \left(3 \pm \sqrt{8 \cdot (1 - ax)^2 + 1}\right)$ und Gleichung I reducirt sich auf

$$- U^4 + x \cdot U^3 + x^2 \cdot (y - 2x)^2 = 0$$

woraus

$$y = 2x \pm \frac{U'}{4} \cdot \sqrt{8 \cdot (1 - ax)^2 - 2 \pm 2 \cdot \sqrt{8 \cdot (1 - ax)^2 + 1}}$$

folgt. Alles Weitere wie gewöhnlich.

Aufgabe 21.

Man sucht für y eine solche Function von x, und zugleich für x einen solchen bestimmten Werth, dass das in folgender ungesonderten Gleichung

$$\text{I)} \quad U^4 - \frac{4}{3} U^3 \cdot \frac{x^2 - ax}{a} + x^2 \cdot y^2 - 4x^3 \cdot y + 4x^4 = 0$$

enthaltene U ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes werde.

Durch gemischtes Mutiren bekommt man

$$\text{II)} \quad {}_{(\delta)}U = \frac{a \cdot x^2 \cdot (2x - y)}{2U^2 \cdot (aU - x^2 + ax)} \cdot \delta y + \left(\frac{a \cdot x^2 \cdot (2x - y)}{2U^2 \cdot (aU - x^2 + ax)} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{2 \cdot (2x - a) \cdot U^3 - 3ax \cdot (y^2 - 6xy + 8x^2)}{6U^2 \cdot (aU - x^2 + ax)}\right) \cdot \vartheta x$$

Erstens. Setzt man ${}_{(\delta)}U = 0$, d. h. sowohl $\frac{d_y U}{dy} = 0$ als auch $\frac{dU}{dx} = 0$; so hat man zunächst die identische Gleichung

$$\text{III)} \quad 2x - y = 0$$

und in Folge dieser Gleichung bekommt man noch die nichtidentische

$$\text{IV)} \quad 2 \cdot (2x - a) \cdot U^3 - 3ax \cdot (y^2 - 6xy + 8x^2) = 0$$

Aus III folgt, dass die gesuchte Function

$$\text{V)} \quad y = 2x$$

ist; und wenn man diesen Ausdruck in I einsetzt, so gibt sich

$$\text{entweder VI)} \quad U_1' = 0 \quad \text{oder} \quad \text{VII)} \quad U_2' = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2 - ax}{a}$$

Da $U_1' = 0$ eine identische Function von x ist, und doch nach einem bestimmten Werthe von x gefragt wird; so kann nur $U_2' = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2 - ax}{a}$ berücksichtigt werden. Gleichung IV reducirt sich nun auf

$$\text{VIII)} \quad 2 \cdot (2x - a) \cdot U^3 = 0$$

Daraus folgt $x = \frac{a}{2}$, und somit ist $U'' = -\frac{a}{3}$. Mutirt man Gleichung II noch einmal, so ergibt sich

$$\text{IX)}\quad {}_{(}\delta_{)}^{2}U = \frac{27}{2a}\cdot\delta y^2 + \frac{8}{3a}\cdot\vartheta x^2$$

Ist a positiv, so ist $U'' = -\frac{a}{3}$ ein Minimumwerth eines Minimum-standes; ist aber a negativ, so ist $U'' = -\frac{a}{3}$ ein Maximumwerth eines Maximum-standes.

Will man das Prüfungsmittel durch directe Reihenentwickelung herstellen, so setze man

$_{(}\mathfrak{U}_{)}$ an die Stelle des U

$\left(a + \varkappa\cdot{}_{(}\delta_{)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot{}_{(}\delta_{)}^2y + \ldots\ldots\right)$ oder kurzweg $(a + \varkappa\cdot\Pi)$ statt y

und

$\left(\frac{a}{2} + \varkappa\cdot\vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\vartheta^2 x + \ldots\ldots\right)$ oder kurzweg $\left(\frac{a}{2} + \varkappa\cdot\mathfrak{P}\right)$ statt x

in Gleichung I ein; und man bekommt

$$\text{X)}\quad a^2\cdot\left(\frac{1}{2}\Pi - \mathfrak{P}\right)^2\cdot\varkappa^2 + 4a\cdot\mathfrak{P}\cdot\left(\frac{1}{2}\Pi - \mathfrak{P}\right)^2\cdot\varkappa^3 + 4\cdot\mathfrak{P}^2\cdot\left(\frac{1}{2}\Pi - \mathfrak{P}\right)^2\cdot\varkappa^4$$
$$+ \frac{a}{3}\,{}_{(}\mathfrak{U}_{)}^3 - \frac{4}{3a}\cdot{}_{(}\mathfrak{U}_{)}^3\cdot\varkappa^2\cdot\mathfrak{P}^2 + {}_{(}\mathfrak{U}_{)}^4 = 0$$

Aus dieser Gleichung hat man nun für $_{(}\mathfrak{U}_{)}$ alle nach steigenden Potenzen des $\varkappa$ fortlaufenden Reihen zu entwickeln. Man bekommt aber folgende zwei Reihen

$$\text{XI)}\quad {}_{(}\mathfrak{U}_{)} = -\varkappa^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{3a\cdot\left(\frac{1}{2}\Pi - \mathfrak{P}\right)^2}\ldots\ldots$$

und

$$\text{XII)}\quad {}_{(}\mathfrak{U}_{)} = -\frac{a}{3} + \frac{81\cdot\left(\frac{1}{2}\Pi - \mathfrak{P}\right)^2 + 4\mathfrak{P}^2}{3a}\cdot\varkappa^2\ldots\ldots$$

Die erste dieser Reihen repräsentirt drei Formen des $_{(}\mathfrak{U}_{)}$, gibt aber nicht die dem $U'' = -\frac{a}{3}$ nächstanliegenden Nachbarzustände, ist also nicht weiter zu beachten.

Die zweite dieser Reihen repräsentirt die vierte Form des $_{(}\mathfrak{U}_{)}$, und gibt die dem $U'' = -\frac{a}{3}$ nächstanliegenden Nachbarzustände. Bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ kann man ohne angebbaren Fehler setzen

$${}_{(}\mathfrak{U}_{)} - U'' = \frac{81\left(\frac{1}{2}\cdot\Pi - \mathfrak{P}\right)^2 + 4\cdot\mathfrak{P}^2}{3a}\cdot\varkappa^2$$

woran man erkennt, dass $U'' = -\frac{a}{3}$ ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes, je nachdem a negativ oder positiv ist. Weil $y = 2x$, so ist ${}_{(}\delta_{)}y = \delta y + 2\cdot\vartheta x$, ${}_{(}\delta_{)}^2y = \delta^2y + 2\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot\vartheta x + 2\cdot\vartheta^2 x$, etc.; und wenn man diese Ausdrücke in die Reihe XII einsetzt, und abermals nach Potenzen des $\varkappa$ ordnet, so bekommt man

$$\text{XIII)}\quad {}_{(}\mathfrak{U}_{)} = -\frac{a}{3} + \left(\frac{27}{2a}\cdot\delta y^2 + \frac{8}{3a}\cdot\vartheta x^2\right)\cdot\frac{\varkappa^2}{1.2}\ldots\ldots$$

Bei einem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ kann man ohne angebbaren Fehler

$${}_{(}\mathfrak{U}_{)} - U'' = \left(\frac{27}{2a}\cdot\delta y^2 + \frac{8}{3a}\cdot\vartheta x^2\right)\cdot\frac{\varkappa^2}{1.2}$$

setzen, woran man wieder erkennt, dass $U'' = -\frac{a}{3}$ ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes, je nachdem a negativ oder positiv ist. Wenn man in Gleichung IX den dort weggelassenen Factor $\frac{\varkappa^2}{1.2}$ wieder hinsetzt, so bekommt man genau den zuletzt für die Differenz $_{(}\mathfrak{U}_{)} - U''$ hingestellten Ausdruck.

Zweitens. Man setze $\frac{d_{,}U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$, so hat man entweder $U = 0$ oder $aU - x^2 + ax = 0$.

Da $U' = 0$ eine identische Function von x ist, und doch nach einem bestimmten Werthe des x gefragt wird; so kann $U = 0$ nicht weiter berücksichtigt werden. Dagegen aus $aU - x^2 + ax = 0$ folgt $U' = \frac{x^2 - ax}{a}$; und wenn man diesen Ausdruck in Gleichung I einführt, so bekommt man $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x^2 - ax}{a}\right)^4 + x^2 \cdot (y - 2x)^2 = 0$, woraus $y = 2x + x \cdot \left(\frac{x - a}{a}\right)^2 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ folgt. Diese für y gefundene Function ist zweiförmig, je nachdem das Radical $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ seine positive oder negative Bedeutung beigelegt erhält. Der für x gesuchte bestimmte Werth ist wieder $= \frac{a}{2}$, so dass jetzt $U'' = -\frac{a}{4}$ ist.

Zur Herstellung des Prüfungsmittels setze man

$_{(}\mathfrak{U}_{)}$ an die Stelle des U

$$\left(a + \frac{a}{8 \cdot \sqrt[4]{3}} + \varkappa \cdot {}_{(}\delta_{)}y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot {}_{(}\delta_{)}^2 y + \ldots\ldots\right) \text{ oder kurzweg } \left(a + \frac{a}{8 \cdot \sqrt[4]{3}} + \varkappa \cdot \Pi\right) \text{ statt y}$$

und

$$\left(\frac{a}{2} + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \ldots\ldots\right) \text{ oder kurzweg } \left(\frac{a}{2} + \varkappa \cdot \mathfrak{P}\right) \text{ statt x}$$

in Gleichung I überall ein, und entwickle für $_{(}\mathfrak{U}_{)}$ alle nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigenden Reihen. Zuletzt führe man für $_{(}\delta_{)}y$, $_{(}\delta_{)}^2y$, etc. die Ausdrücke ein, und ordne aufs Neue nach Potenzen des $\varkappa$.

Weil aber jetzt $y = 2x + x \cdot \left(\frac{x - a}{a}\right)^2 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$, so ist

$$_{(}\delta_{)}y = \delta y + \left(2 + \frac{3x^2 - 4ax + a^2}{a^2} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right) \cdot \vartheta x$$

und wenn man für x den Werth einsetzt, so gibt sich

$$_{(}\delta_{)}y_{\frac{a}{2}} = \delta y_{\frac{a}{2}} + \frac{1}{4} \cdot \left(8 - \sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right) \cdot \vartheta x$$

Auf gleiche Weise ergibt sich

$$_{(}\delta_{)}^2 y_{\frac{a}{2}} = \delta^2 y_{\frac{a}{2}} + 2 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_{\frac{a}{2}} \cdot \vartheta x + \frac{1}{4} \cdot \left(8 - \sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right) \cdot \vartheta^2 x - \left(\frac{1}{a} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right) \cdot \vartheta x^2$$

und so fort.

Aufgabe 22.

Man sucht für y eine solche Function von x, dass das in folgender ungesonderten Gleichung

$$\text{I)}\quad U^3 - U + a \cdot \sqrt[5]{(y - ax)^6} = 0$$

enthaltene U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Das Radical $\sqrt[5]{(y - ax)^6}$ ist fünfförmig; um aber bequem calculiren zu können, setze man

$$\text{II)}\quad U^3 - U + a \cdot (\sqrt[5]{1}) \cdot (y - ax)^{\frac{6}{5}} = 0$$

und betrachte nur den Factor $(\sqrt[5]{1})$ als fünfförmig, alles Andere aber als einförmig und reell. Um die Aufgabe weiter durchführen zu können, bringe man sie in zwei Abtheilungen, wobei man dem $(\sqrt[5]{1})$ zuerst seine reelle und dann seine vier imaginären Formen beilegt.

Erste Abtheilung.

Wenn man dem $(\sqrt[5]{1})$ seine reelle Bedeutung beilegt, so geht Gleichung II über in

$$\text{III)}\quad U^3 - U + a \cdot (y - ax)^{\frac{6}{5}} = 0$$

wo Alles reell und einförmig ist. Daraus folgt

$$\delta U = -\frac{6a \cdot (y - ax)^{\frac{1}{5}}}{5 \cdot (3U^2 - 1)} \cdot \delta y$$

Erstens. Aus $\frac{d_y U}{dy} = 0$ folgt $y = ax$, und dabei reducirt sich Gleichung III auf $U^3 - U = 0$, so dass man hat

$$U_1' = 0,\quad U_2' = +1,\quad U_3' = -1$$

und man erkennt, dass, weil diese drei für U gefundenen Ausdrücke ganz unabhängig sind von dem Werthe des x, auch von einer secundären Beziehung keine Rede sein kann. Hier wird $\delta^2 U = -\frac{6a}{0} \cdot \delta y^2$, so dass man das Prüfungsmittel durch directe Reihenentwicklung herstellen muss.

Hier hat man ein Beispiel, wo der aus einer ungesonderten Gleichung abgeleitete zweite Mutationscoefficient in den Nenner einen Factor bekommt, welcher im Nenner des ersten Mutationscoefficienten noch nicht vorhanden war.

Man setze nun $\mathfrak{U}$ an die Stelle des U, und $(ax + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ an die Stelle des y in Gleichung III überall ein, so bekommt man

$$\text{IV)}\quad a \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{6}{5}} - \mathfrak{U} + \mathfrak{U}^3 = 0$$

Daraus ergeben sich folgende zwei nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihen:

$$\text{V)}\quad \mathfrak{U} = \pm 1 - \frac{a}{2} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{6}{5}} \mp \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{12}{5}} - \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{18}{5}}$$

$$\mp \frac{39}{4} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^4 \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{24}{5}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und

$$\text{VI)}\quad U = a\cdot(\varkappa\cdot\mathfrak{P})^{\frac{6}{5}} + a^3\cdot(\varkappa\cdot\mathfrak{P})^{\frac{18}{5}} + 3a^5\cdot(\varkappa\cdot\mathfrak{P})^{\frac{30}{5}} + 12\cdot a^7\cdot(\varkappa\cdot\mathfrak{P})^{\frac{42}{5}}$$
$$+ 55\cdot a^9\cdot(\varkappa\cdot\mathfrak{P})^{\frac{54}{5}}\ldots\ldots$$

Die Radicale $(\varkappa\cdot\mathfrak{P})^{\frac{6}{5}}$, $(\varkappa\cdot\mathfrak{P})^{\frac{12}{5}}$, etc. etc. sind alle als einförmig und reell zu nehmen, weil in Gleichung III das entsprechende Radical $(y - ax)^{\frac{6}{5}}$ nur als einförmig und reell genommen worden ist. Die Reihe V repräsentirt also zwei Formen des U, so dass $U'_2 = +1$ und $U'_3 = -1$ Maximum-stände oder Minimum-stände sind, je nachdem a positiv oder negativ ist. Die Reihe VI repräsentirt die dritte Form des U, und sagt, dass $U'_1 = 0$ ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist, je nachdem a negativ oder positiv ist.

Zweitens. Aus $\frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ folgt $3U^2 - 1 = 0$, also ist $U' = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Führt man diesen Ausdruck in III ein, so bekommt man $y = ax + \sqrt[6]{\left(\frac{2}{3a\cdot\sqrt{3}}\right)^5}$, von welcher Function man jedoch nur die reellen Formen berücksichtigen darf.

Und so fort.

Zweite Abtheilung.

Legt man in Gleichung II dem Radical $(\sqrt[5]{1})$ seine vier imaginären Formen bei, so bekommt man

$$\text{VII)}\quad \delta U = -\frac{6a\cdot(\sqrt[5]{1})\cdot(y - ax)^{\frac{1}{5}}}{5\cdot(3U^2 - 1)}\cdot\delta y$$

Erstens. Aus $\frac{d_yU}{dy} = 0$ folgt wieder $y = ax$, und $U'_1 = 0$, $U'_2 = +1$, $U'_3 = -1$. Man findet aber, dass jetzt die für U' erhaltenen Ausdrücke Einzel-stände sind.

Zweitens. Aus $\frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ folgt wieder $U' = \sqrt{\frac{1}{3}}$, und dabei geht Gleichung II über in $-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} + a\cdot(\sqrt[5]{1})\cdot(y - ax)^{\frac{6}{5}} = 0$, oder $a\cdot(\sqrt[5]{1})\cdot(y - ax)^{\frac{6}{5}} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$. Wenn man hier beiderseits auf die fünfte Potenz erhebt, so bekommt man $a^5\cdot(y - ax)^6 = \left(\frac{2}{3\cdot\sqrt{3}}\right)^5$, oder $(y - ax)^6 = \left(\frac{2}{3a\cdot\sqrt{3}}\right)^5$; und daraus folgt $y - ax = \sqrt[6]{\left(\frac{2}{3a\cdot\sqrt{3}}\right)^5}$. Führt man nun die für U und für $(y - ax)$ erlangten Ausdrücke in II ein, so bekommt man

$$-\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}} + a\cdot(\sqrt[5]{1})\cdot\sqrt[5]{\left(\sqrt[6]{\left(\frac{2}{3a\cdot\sqrt{3}}\right)^5}\right)^6} = 0,\text{ oder}$$

$$-\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}} + a\cdot(\sqrt[5]{1})\cdot\frac{2}{3a\cdot\sqrt{3}} = 0,\text{ oder } -\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot(\sqrt[5]{1}) = 0$$

Weil aber $(\sqrt[5]{1})$ nur seine vier imaginären Formen repräsentirt, so enthält letztere Gleichung einen Widerspruch; und somit ist dieser zweite Fall nicht weiter zu beachten.

Aufgabe 23.

Man sucht für y eine solche Function von x und w, und zugleich für x und w solche bestimmte Werthe, dass das in folgender Gleichung

$$\text{I)}\quad U^4 - 8 \cdot (ax + xw - x^2 - w^2) \cdot y \cdot U + c^2 \cdot y^2 = 0$$

enthaltene U ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes wird.

Man setze zur Abkürzung m statt $2U^3 - 4 \cdot (ax + xw - x^2 - w^2) \cdot y$, so ist

$$\text{II)}\quad {}_{(\delta)}U = \frac{1}{m} \cdot (4(ax + xw - x^2 - w^2) \cdot U - c^2 \cdot y) \cdot \delta y$$

$$+ \frac{1}{m} \cdot \left[4 \cdot (a + w - 2x) \cdot yU + (4 \cdot (ax + xw - x^2 - w^2) \cdot U - c^2 \cdot y) \cdot \frac{d_x y}{dx}\right] \cdot \vartheta x$$

$$+ \frac{1}{m} \cdot \left[4 \cdot (x - 2w) \cdot yU + (4 \cdot (ax + xw - x^2 - w^2) \cdot U - c^2 \cdot y) \cdot \frac{d_w y}{dw}\right] \cdot \vartheta w$$

Erstens. Setzt man ${}_{(\delta)}U = 0$, d. h. sowohl $\frac{d_y U}{dy} = 0$ als auch $\frac{d_x U}{dx} = 0$ und $\frac{d_w U}{dw} = 0$; so hat man zunächst die identische Gleichung

$$\text{III)}\quad 4 \cdot (ax + xw - x^2 - w^2) \cdot U - c^2 \cdot y = 0$$

Daraus folgt

$$\text{IV)}\quad y = \frac{4}{c^2} \cdot (ax + xw - x^2 - w^2) \cdot U$$

Eliminirt man y aus I, so gibt sich

$$\text{V)}\quad U^2 \cdot \left(U^2 - \frac{16}{c^2} \cdot (ax + xw - x^2 - w^2)^2\right) = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt zunächst $U = 0$, welches Resultat, da es eine identische Gleichung ist, nicht weiter berücksichtigt zu werden braucht, da dabei von einem bestimmten Werthe des x und des w keine Rede sein könnte. Aus V folgt aber auch noch

$$\text{VI)}\quad U' = \frac{4}{c} \cdot (ax + xw - x^2 - w^2) \cdot \sqrt[W]{1}$$

und sonach gibt sich aus Gleichung IV, dass

$$\text{VII)}\quad y = \frac{16}{c^3} \cdot (ax + xw - x^2 - w^2)^2 \cdot \sqrt[W]{1}$$

In Folge von Gleichung II bekommt man aber auch noch die beiden nichtidentischen Gleichungen

$$\text{VIII)}\quad a + w - 2x = 0, \text{ und IX)}\quad x - 2w = 0$$

Daraus folgt $x = \frac{2a}{3}$ und $w = \frac{a}{3}$, so dass jetzt der für U gesuchte bestimmte Werth ist

$$\text{X)}\quad U'' = \frac{4a^2}{3c} \cdot \sqrt[W]{1}$$

Das Radical $\sqrt[W]{1}$ zeigt an, dass alle damit multiplicirten Ausdrücke ein zweideutiges Vorzeichen haben. In Folge alles Vorhergehenden ist jetzt

$$\text{XI)}\quad {}_{(\delta)}^{2}U = -\frac{1}{c} \cdot \left[\left(\frac{3c^2}{4a^2}\right)^3 \cdot \delta y^2 + 4 \cdot ((\vartheta x - \vartheta w)^2 + \vartheta x^2 + \vartheta w^2)\right] \cdot \sqrt[W]{1}$$

Da das zweideutige Radical $\sqrt[W]{1}$ sowohl in Gleichung X als auch in XI gemeinschaftlicher Factor ist, so entscheidet man sich (§. 114. γ. 2. a) auf folgende Weise:

α) Hat das Radical die Bedeutung, wobei das Product $c \cdot \sqrt[W]{1}$ positiv wird; so ist

U'' positiv und $(\delta)^2U$ negativ; es findet also ein Maximum-werth eines Maximumstandes statt.

β) Hat das Radical die Bedeutung, wobei das Product $c \cdot \sqrt[4]{1}$ negativ wird, so ist U'' negativ und $(\delta)^2U$ poisitiv; es findet also ein Minimumwerth eines Minimumstandes statt, jedoch in dem Sinne, dass in der Analysis ein negativer Ausdruck für desto kleiner gilt, je weiter sein Werth von Null absteht.

Will man das Prüfungsmittel durch directe Reihenentwicklung herstellen, so setze man

$(\mathfrak{U})$ an die Stelle des U

$$\left(\frac{16 \cdot a^4}{9 \cdot c^3} \cdot \sqrt[4]{1} + \varkappa \cdot (\delta)y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot (\delta)^2y + \ldots\ldots\right) \text{ oder kurzweg } \left(\frac{16 \cdot a^4}{9 \cdot c^3} \cdot \sqrt[4]{1} + \varkappa \cdot \Pi\right) \text{ statt } y$$

$$\left(\frac{2a}{3} + \varkappa \cdot \vartheta x + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 x + \ldots\ldots\right) \text{ oder kurzweg } \left(\frac{3a}{3} + \varkappa \cdot \mathfrak{P}\right) \text{ statt } x$$

und

$$\left(\frac{a}{3} + \varkappa \cdot \vartheta w + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \vartheta^2 w + \ldots\ldots\right) \text{ oder kurzweg } \left(\frac{a}{3} + \varkappa \cdot \mathfrak{Q}\right) \text{ statt } w$$

in Gleichung I ein. Dann bekommt man

$$\text{XII)} \quad \left(\frac{4a^2}{3c} \cdot \sqrt[4]{1}\right)^4 + \frac{8a^2}{3} \cdot \left(\frac{4a^2}{3c} \cdot \sqrt[4]{1}\right) \cdot \varkappa \cdot \Pi + c^2 \cdot \varkappa^2 \cdot \Pi^2 - 2 \cdot \left(\frac{4a^2}{3c} \cdot \sqrt[4]{1}\right)^3 \cdot (\mathfrak{U})$$

$$- \frac{8a^2}{3} \cdot \varkappa \cdot \Pi \cdot (\mathfrak{U}) + \frac{32a^2}{3c^2} \cdot \left(\frac{4a^2}{3c} \cdot \sqrt[4]{1}\right) \cdot (\mathfrak{P}^2 - \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}^2) \cdot \varkappa^2 \cdot (\mathfrak{U})$$

$$+ 8 \cdot (\mathfrak{P}^2 - \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}^2) \cdot \Pi \cdot \varkappa^3 \cdot (\mathfrak{U}) + (\mathfrak{U})^4 = 0$$

Setzt man hier (nach §. 20 bis §. 46) zunächst $(\mathfrak{U}) = (A \cdot \varkappa^\alpha + R_1)$, so findet man, dass nur $\alpha = 0$ werden kann, dass also aus Gleichung XII sich keine Reihe ergibt, die ein mit irgend einer Potenz des $\varkappa$ behaftetes erstes Glied hat. Die erste Coefficientengleichung ist

$$A^4 - 2 \cdot \left(\frac{4a^2}{3c} \cdot \sqrt[4]{1}\right)^3 \cdot A + \left(\frac{4a^2}{3c} \cdot \sqrt[4]{1}\right)^4 = 0$$

welche Gleichung sich gradezu zerlegt in

$$\text{XIII)} \quad \left(A - \frac{4a^2}{3c} \cdot \sqrt[4]{1}\right) \cdot \left[A^3 + \left(\frac{4a^2}{3c} \cdot \sqrt[4]{1}\right) \cdot A^2 + \left(\frac{4a^2}{3c} \cdot \sqrt[4]{1}\right)^2 \cdot A - \left(\frac{4a^2}{3c} \cdot \sqrt[4]{1}\right)^3\right] = 0$$

Daraus folgt zunächst

$$\text{XIV)} \quad A = \frac{4a^2}{3c} \cdot \sqrt[4]{1}$$

Entwickelt man die mit diesem Ausdrucke anfangende und nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe noch weiter; so bekommt man

$$\text{XV)} \quad (\mathfrak{U}) = \frac{4a^2}{3c} \cdot \sqrt[4]{1} - \frac{1}{c} \cdot \left[\left(\frac{3c^2}{4a^2}\right)^3 \cdot \Pi^2 + 8 \cdot (\mathfrak{P}^2 - \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}^2)\right] \cdot \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \sqrt[4]{1}$$

. .

Diese Reihe repräsentirt nur eine der vier aus XII sich für $(\mathfrak{U})$ ergebenden Formen; zugleich stellt sie die dem $U'' = \frac{4a^2}{3c} \cdot \sqrt[4]{1}$ nächstanliegenden Nachbarzustände dar, so dass die übrigen drei für $(\mathfrak{U})$ noch herzustellenden Formen nicht weiter berücksichtigt zu werden brauchen. Auch erkennt man an dieser Reihe gradezu, dass ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes stattfindet, je nachdem $c \cdot \sqrt[4]{1}$ positiv oder negativ ist, wie schon einmal auseinandergesetzt wurde.

Nun ist $_{(\delta)}y = \delta y + \frac{d_x y}{dx} \cdot \vartheta x + \frac{d_w y}{dw} \cdot \vartheta w$; und wenn man aus Gleichung VII für die partiellen Differentialquotienten $\frac{d_x y}{dx}$ und $\frac{d_w y}{dw}$ die Ausdrücke ableitet, und die für x und w gefundenen Werthe einführt; so bleibt in diesem Falle nur $_{(\delta)}y = \delta y$. Auf ähnliche Weise verfahre man mit $_{(\delta)^2}y$. Und so fort. Führt man nun für Π, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ die Ausdrücke ein, und ordnet man aufs Neue nach aufsteigenden Potenzen des $\varkappa$; so geht Gleichung XV über in

$$\text{XVI)}\quad {}_{(}U_{)} = \frac{4a^2}{3c} \cdot \sqrt{1} - \frac{1}{c} \cdot \left[\left(\frac{3c^2}{4a^2}\right)^3 \cdot \delta y^2 + 4((\vartheta x - \vartheta w)^2 + \vartheta x^2 + \vartheta w^2)\right] \cdot \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \sqrt{1}$$

. .

Aus XVI ergibt sich also genau dasselbe Prüfungsmittel, wie aus XI.

Zweitens. Man setze $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$, so hat man die identische Gleichung

$$\text{XVII)}\quad 2U^3 - 4(ax + xw - x^2 - w^2) \cdot y = 0$$

Eliminirt man y, so geht Gleichung I über in

$$\text{XVIII)}\quad \frac{U^4}{4 \cdot (ax + xw - x^2 - w^2)^2} \cdot (c^2 \cdot U^2 - 12 \cdot (ax + xw - x^2 - w^2)) = 0$$

Daraus folgt zuerst $U = 0$, welches Resultat, da es eine identische Gleichung ist, nicht weiter berücksichtigt zu werden braucht, weil dabei von einem bestimmten Werthe des x und des w keine Rede sein kann. Aus XVIII folgt auch noch ferner die identische Gleichung

$$\text{XIX)}\quad c^2 \cdot U^2 - 12 \cdot (ax + xw - x^2 - w^2) = 0$$

Diese Gleichung mit I verbunden gibt

$$\text{XX)}\quad y = \frac{12}{c^3} \cdot (ax + xw - x^2 - w^2)^2 \cdot \sqrt{3}$$

und

$$\text{XXI)}\quad U' = \frac{2}{c} \cdot (ax + xw - x^2 - w^2) \cdot \sqrt{3}$$

Man bekommt also hier wieder $x = \frac{2a}{3}$ und $w = \frac{a}{3}$, so dass jetzt

$$\text{XXII)}\quad U'' = \frac{2a^2}{3c} \cdot \sqrt{3}$$

ist. Das Radical $\sqrt{3}$ zeigt an, dass alle damit multiplicirten Ausdrücke ein doppeltes Vorzeichen haben Das Prüfungsmittel wird durch directe Reihenentwicklung hergestellt, wie schon einmal geschehen ist.

Aufgabe 24.

Es sei folgender Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = a + \sqrt[3]{(x \cdot y - y^2)^4} + \left(\sqrt[3]{b \cdot x - x^2}\right)^2$$

vorgelegt. Man habe zu untersuchen, ob bei irgend einer Function y von x und bei irgend einem festen Werthe des x der vorgelegte Ausdruck ein ausgezeichneter Zustand werden und dieser Zustand einen ausgezeichneten Werth annehmen kann.

Jedes der beiden Radicale ist dreiförmig, so dass der vorgelegte Ausdruck neunförmig ist. Um aber bequem calculiren zu können, setze man $(\sqrt[3]{1}) \cdot (x \cdot y - y^2)^{\frac{4}{3}}$ statt

$\sqrt[3]{(x \cdot y - y^2)^4}$ und $(\sqrt[3]{1})^2 \cdot (b \cdot x - x^2)^{\frac{2}{3}}$ statt $(\sqrt[3]{b \cdot x - x^2})^2$, und betrachte blos die Factoren $(\sqrt[3]{1})$ und $(\sqrt[3]{1})^2$ als dreiförmig, alles Andere aber als einförmig und reell.

Erste Abtheilung.

Man untersuche zuerst die Form

$$U = a + (xy - y^2)^{\frac{4}{3}} + (bx - x^2)^{\frac{2}{3}}$$

wo, wie gesagt, Alles als reell behandelt werden muss.

Zweite Abtheilung.

Man untersuche die Form

$$U = a + (\sqrt[3]{1}) \cdot (xy - y^2)^{\frac{4}{3}} + (bx - x^2)^{\frac{2}{3}}$$

wo der Factor $(\sqrt[3]{1})$ seine beiden imaginären Formen repräsentirt, alles Andere aber reell ist.

Dritte Abtheilung.

Man untersuche die Form

$$U = a + (xy - y^2)^{\frac{4}{3}} + (\sqrt[3]{1})^2 \cdot (bx - x^2)^{\frac{2}{3}}$$

wo der Factor $(\sqrt[3]{1})^2$ seine beiden imaginären Formen repräsentirt, alles Andere aber reell ist.

Vierte Abtheilung.

Man untersuche die Form

$$U = a + (\sqrt[3]{1}) \cdot (xy - y^2)^{\frac{4}{3}} + (\sqrt[3]{1})^2 \cdot (bx - x^2)^{\frac{2}{3}}$$

wo jeder der Factoren $(\sqrt[3]{1})$ und $(\sqrt[3]{1})^2$ seine beiden imaginären Formen repräsentirt. Dieser letzte Ausdruck ist sonach vierförmig, und liefert einen Einzelwerth eines Einzel-standes.

Aufgabe 25.

Welche unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen räumlichen Curven hat in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft, dass sie das Product irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse mit den beiden zugehörigen Ordinaten und mit dieser um ihre beiden Ordinaten verminderten Abscisse grösser oder kleiner macht, als es bei der nemlichen Abscisse alle andern der gesuchten Curve in jedem Punkte nächstanliegenden Nachbarcurven machen können?

Die hier gestellte Aufgabe, welche einen Maximum-stand oder Minimum-stand sucht, führt auf den allgemeinen Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = x \cdot y \cdot z \cdot (x - y - z)$$

wo x jede beliebige Abscisse und y und z die jedesmaligen Ordinaten der gesuchten Curve sind. Die Ordinaten der Curven, welche der gesuchten Curve in jedem Punkte nächstanliegen, werden dargestellt durch

$$\text{II)}\quad y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$\text{III)}\quad z + \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 z \ldots\ldots\ldots$$

Aus I' bekommt man durch Mutiren

$$\text{IV)}\quad \delta U = (x - 2y - z) \cdot x \cdot z \cdot \delta y + (x - y - 2z) \cdot x \cdot y \cdot \delta z$$

$$\text{V)}\quad \delta^2 U = (x - 2y - z) \cdot x \cdot z \cdot \delta^2 y + (x - y - 2z) \cdot x \cdot y \cdot \delta^2 z$$
$$- 2x \cdot z \cdot \delta y^2 + 2x \cdot (x - 2y - 2z) \cdot \delta y \cdot \delta z - 2x \cdot y \cdot \delta z^2$$

Hier wird $\delta U = 0$ in folgenden vier Fällen:

1) wenn $x - 2y - z = 0$ und $x - y - 2z = 0$

2) wenn $x - 2y - z = 0$ und $y = 0$

3) wenn $z = 0$ und $x - y - 2z = 0$

4) wenn $z = 0$ und $y = 0$

Erster Fall. Wenn $x - 2y - z = 0$ und $x - y - 2z = 0$, so gibt sich $y = \frac{1}{3} \cdot x$ und $z = \frac{1}{3} \cdot x$. Die gesuchte räumliche Curve ist also eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Grade, deren in den Coordinatenebenen XY und XZ liegenden Projectionen mit der Abscissenaxe einen Winkel einschliessen, dessen goniometrische Tangente $= \frac{1}{3}$.

Gleichung V reducirt sich nun auf

$$\text{VI)}\quad \delta^2 U = -\frac{2}{3} \cdot x^2 \cdot \left[\left(\delta y + \frac{1}{2} \cdot \delta z\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \delta z^2\right]$$

Dieser Ausdruck bleibt unter allen Umständen negativ; und somit erkennt man, dass $U' = \frac{1}{27} \cdot x^4$ ein Maximum-stand ist. Will man aber das Prüfungsmittel durch directe Reihenentwicklung herstellen, so setze man

$$\left(\frac{1}{27} \cdot x^4 + \Delta U\right) \text{ an die Stelle des } U$$

$$\left(\frac{x}{3} + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \ldots\ldots\right) \text{ oder kurzweg } \left(\frac{x}{3} + \varkappa \cdot \mathfrak{P}\right) \text{ statt } y$$

und

$$\left(\frac{x}{3} + \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z + \ldots\ldots\right) \text{ oder kurzweg } \left(\frac{x}{3} + \varkappa \cdot \mathfrak{Q}\right) \text{ statt } z$$

in Gleichung I ein, reducire soviel als möglich, und man bekommt

$$\Delta U = -\frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \varkappa^2 \cdot (\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}^2) - x \cdot \varkappa^3 \cdot \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{Q} \cdot (\mathfrak{P} + \mathfrak{Q})$$

Wenn man hier für $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ die Ausdrücke zurückführt, so gibt sich folgende nach ganzen Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe:

$$\text{VII)}\quad \Delta U = -\frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \varkappa^2 \cdot (\delta y^2 + \delta y \cdot \delta z + \delta z^2) - \ldots\ldots$$

Wenn man in Gleichung VI den weggelassenen Factor $\frac{\varkappa^2}{1.2}$ wieder hinzusetzt, so bekommt man genau das erste Glied der in VII hingestellten Reihe. Durch die directe Reihenentwicklung ist also abermals bewiesen, dass ein Maximum-stand stattfindet.

Zweiter Fall. Wenn $x - 2y - z = 0$ und $y = 0$; so bekommt man für y eine identische Function, und $z = x$. Die gesuchte räumliche Curve ist also jetzt eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Grade, welche ganz in der Coordinatenebene XZ liegt, und mit der Abscissenaxe einen halben rechten Winkel einschliesst. Dabei reducirt sich Gleichung V auf

$$\text{VIII)} \quad \delta^2 U = -2x^2 \cdot (\delta y^2 + \delta y \cdot \delta z)$$

Dieser Ausdruck kann aber nicht unter allen Umständen einerlei Zeichen behalten, und somit findet jetzt weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Dritter Fall. Wenn $x - y - 2z = 0$ und $z = 0$; so bekommt man für z eine identische Function, und $y = x$. Die gesuchte räumliche Curve ist also eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Grade, welche ganz in der Coordinatenebene XY liegt, und mit der Abscissenaxe einen halben rechten Winkel einschliesst. Dabei reducirt sich Gleichung V auf

$$\text{IX)} \quad \delta^2 U = -2 \cdot x^2 \cdot (\delta y \cdot \delta z + \delta z^2)$$

Dieser Ausdruck kann aber nicht unter allen Umständen einerlei Zeichen behalten, und somit findet jetzt weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

Vierter Fall. Wenn $y = 0$ und $z = 0$, so hat man die ganz in die Abscissenaxe fallende Grade. Dabei reducirt sich Gleichung V auf

$$\text{X)} \quad \delta^2 U = 2x^2 \cdot \delta y \cdot \delta z$$

woran man erkennt, dass auch jetzt weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand stattfindet.

Aufgabe 26.

Man sucht y und z als solche Functionen von x, dass der Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = y^2 - x \cdot y + (ax - z)^4$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Durch Mutiren bekommt man

$$\text{II)} \quad \delta U = (2y - x) \cdot \delta y - 4 \cdot (ax - z)^3 \cdot \delta z$$

$$\text{III)} \quad \delta^2 U = (2y - x) \cdot \delta^2 y - 4 \cdot (ax - z)^3 \cdot \delta^2 z + 2 \cdot \delta y^2 + 12 \cdot (ax - z)^2 \cdot \delta z^2$$

Hier bekommt man die beiden identischen Gleichungen

$$\text{IV)} \quad 2y - x = 0 \text{ und V)} \quad ax - z = 0$$

Es ist also $y = \frac{1}{2} \cdot x$ und $z = ax$; und somit ist $U' = -\frac{x^2}{4}$. Dabei reducirt sich Gleichung III auf $\delta^2 U = 2 \cdot \delta y^2$, so dass man, weil letzterer Ausdruck nichts von der Mutation des z enthält, das Prüfungsmittel durch directe Reihenentwicklung herstellen muss. Man setze also $\left(-\frac{x^2}{4} + \Delta U\right)$ statt U, $\left(\frac{x}{2} + \varkappa \cdot \mathfrak{P}\right)$ statt y, und $(ax + \varkappa \cdot \mathfrak{Q})$ statt z in Gleichung I überall ein; so bekommt man

$$\text{VI)} \quad \Delta U = \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2 + \varkappa^4 \cdot \mathfrak{Q}^4$$

Bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ ist das Zeichen des ΔU mit dem Zeichen des $\varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2$ einerlei; allein dieser mit der niedrigsten Potenz des $\varkappa$ behaftete Theilsatz enthält nur die Mutation des y, während ΔU einerlei Zeichen haben muss bei jedem unendlichkleinen Werthe sowohl der Mutation des y als auch der Mutation des z, also auch, wenn z. B. die Mutation des y zu Null, d. h. wenn $\mathfrak{P} = 0$ wird. In diesem Falle ist aber $\Delta U = \varkappa^4 \cdot \mathfrak{Q}^4$, so dass jetzt das ΔU ebensogut positiv ist, als zuvor, wo $\mathfrak{P}$ nicht Null war. Da nun ΔU unter allen Umständen positiv bleibt, so ist $U' = -\frac{x^2}{4}$ ein Minimum-stand.

Aufgabe 27.

Man sucht für y und z solche Functionen von x, dass der Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = a^2 + (ax - y^2)^2 + \sqrt[3]{(x^2 - bz)^2}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird

Dieser Ausdruck ist wegen des Radicals dreiförmig. Um aber bequem calculiren zu können, setze man

$$\text{II)}\quad U = a^2 + (ax - y^2)^2 + (\sqrt[3]{1}) \cdot (x^2 - bz)^{\frac{2}{3}}$$

und betrachte nur den Factor $(\sqrt[3]{1})$ als dreiförmig, alles Andere aber als einförmig und reell.

Erste Abtheilung.

Man gebe dem Factor $\sqrt[3]{1}$ seine reelle Bedeutung, und Gleichung II geht über in

$$\text{III)}\quad U = a^2 + (ax - y^2)^2 + (x^2 - bz)^{\frac{2}{3}}$$

wo, wie gesagt, Alles als eindeutig und reell betrachtet werden muss. Durch Mutiren bekommt man

$$\text{IV)}\quad \delta U = -4 \cdot (ax - y^2) \cdot y \cdot \delta y - \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{(x^2 - bz)^{\frac{1}{3}}} \cdot \delta z$$

Hier kann man nur $\frac{d_y U}{dy} = 0$ und $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$ setzen, und es ist

1) entweder $y = 0$ und $x^2 - bz = 0$

2) oder $ax - y^2 = 0$ und $x^2 - bz = 0$

A) Ist $y = 0$, d. h. ist y eine identische Function von x, und $z = \frac{x^2}{b}$; so ist $U' = a^2 \cdot (1 + x^2)$.

Zur Herstellung des Prüfungsmittels setze man $a^2 \cdot (1 + x^2) + \Delta U$ an die Stelle des U, $(0 + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ oder schlechthin $\varkappa \cdot \mathfrak{P}$ an die Stelle des y, und $\left(\frac{x^2}{b} + \varkappa \cdot \mathfrak{Q}\right)$ an die Stelle des z in Gleichung III überall ein; so bekommt man

$$\text{V)}\quad \Delta U = b^{\frac{2}{3}} \cdot \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot \mathfrak{Q}^{\frac{2}{3}} - 2ax \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2 + \varkappa^4 \cdot \mathfrak{P}^4$$

Bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ hat ΔU allerdings mit dem ersten Gliede dasselbe Zeichen, d. h. ΔU ist positiv; allein der mit der niedrigsten Potenz des $\varkappa$ behaftete Theilsatz enthält nichts von der Mutation des y, während doch ΔU einerlei Zeichen haben soll bei jedem unendlichkleinen Werthe sowohl der Mutation des y als auch der Mutation des z, also auch wenn z. B. die Mutation des z zu Null, d. h. wenn $\mathfrak{Q} = 0$ wird. In diesem Falle ist aber

$$\Delta U = -2ax \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2 + \varkappa^4 \cdot \mathfrak{P}^4$$

so dass bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ das ΔU sein Zeichen wechseln kann. Da nun das ΔU nicht bei jedem unendlichkleinen Werthe der Mutation des y und des z dasselbe unwandelbare Zeichen behält; so kann jetzt von einem vollständigen Maximum-stande oder Minimum-stande keine Rede sein.

B) Ist $ax - y^2 = 0$ und $x^2 - bz = 0$, so ist $y = \sqrt{ax}$ und $z = \frac{x^2}{b}$. Ferner ist $U' = a^2$, so dass, weil U' vom Werthe des x unabhängig ist, von einer secundären Beziehung keine Rede sein kann. Zur Herstellung des Prüfungsmittels setze man

$(a^2 + \varDelta U)$ an die Stelle des U, $(\sqrt{ax} + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ an die Stelle des y, und $\left(\frac{x^2}{b} + \varkappa \cdot \mathfrak{Q}\right)$ an die Stelle des z in Gleichung III überall ein; so bekommt man

$$\text{VI)}\quad \varDelta U = b^{\frac{2}{3}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^{\frac{2}{3}} + (2\sqrt{ax} + \varkappa \cdot \mathfrak{P})^2 \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2$$

Bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ hat $\varDelta U$ allerdings mit dem ersten Gliede dasselbe Zeichen, d. h. $\varDelta U$ ist positiv; allein der mit der niedrigsten Potenz des $\varkappa$ behaftete Theilsatz enthält nichts von der Mutation des y, während doch $\varDelta U$ einerlei Zeichen haben soll bei jedem unendlichkleinen Werthe sowohl der Mutation des y als auch der Mutation des z, also auch wenn z. B. die Mutation des z zu Null, d. h. wenn $\mathfrak{Q} = 0$ wird. In diesem Falle ist aber

$$\varDelta U = (2\sqrt{ax} + \varkappa \cdot \mathfrak{P})^2 \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2$$

so dass jetzt bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ das $\varDelta U$ eben so gut positiv ist, als vorher, wo $\mathfrak{Q}$ nicht Null war. Da nun $\varDelta U$ unter allen Umständen positiv bleibt, so ist $U' = a^2$ ein Minimum-stand.

Zweite Abtheilung.

Man kehre nun wieder zu Gleichung II zurück, und lege dem $(\sqrt[3]{1})$ eine seiner beiden imaginären Formen bei.

A) Ist wieder $y = 0$ und $x^2 - bz = 0$, so bekommt man wieder den reellen Ausdruck $U' = a^2 \cdot (1 + x^2)$, und die zugehörigen nächstanliegenden Nachbarzustände sind

$$\varDelta U = (\sqrt[3]{1}) \cdot b^{\frac{2}{3}} \cdot \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot \mathfrak{Q}^{\frac{2}{3}} - 2ax \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2 + \varkappa^4 \cdot \mathfrak{P}^4$$

woran man erkennt, dass jetzt, soviel von der Mutation des z abhangt, ein Einzel-stand stattfindet.

B) Ist $ax - y^2 = 0$ und $x^2 - bz = 0$, so bekommt man wieder den reellen Ausdruck $U' = a^2$; und die dazugehörigen nächstanliegenden Nachbarzustände sind

$$\varDelta U = (\sqrt[3]{1}) \cdot b^{\frac{2}{3}} \cdot \varkappa^{\frac{2}{3}} \cdot \mathfrak{Q}^{\frac{2}{3}} + (2\sqrt{ax} + \varkappa \cdot \mathfrak{P})^2 \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2$$

woran man erkennt, dass jetzt wieder, soviel von der Mutation des z abhangt, ein Einzel-stand stattfindet.

Aufgabe 28.

Man sucht für y und z solche Functionen von x, dass der Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = \frac{x^2}{m + x} + 2y^2 - 4z + 9 \cdot \sqrt[3]{(gx - y^2)^2} + 6 \cdot (\sqrt[3]{z - hx})^2$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Jedes der Radicale $\sqrt[3]{(gx - y^2)^2}$ und $(\sqrt[3]{z - hx})^2$ hat drei Formen, so dass der hier vorgegebene Ausdruck als neunförmig gelten kann. Um aber bequem calculiren zu können, so setze man

$$(\sqrt[3]{1}) \cdot (gx - y^2)^{\frac{2}{3}} \text{ statt } \sqrt[3]{(gx - y^2)^2}, \text{ und } (\sqrt[3]{1})^2 \cdot (z - hx)^{\frac{2}{3}} \text{ statt } (\sqrt[3]{z - hx})^2$$

und betrachte bloss die Factoren $(\sqrt[3]{1})$ und $(\sqrt[3]{1})^2$ als dreiförmig, alles Andere aber als einförmig und reell. Statt Gleichung I bekommt man jetzt

$$\text{II)}\quad U = \frac{x^2}{m + x} + 2y^2 - 4z + 9 \cdot (\sqrt[3]{1}) \cdot (gx - y^2)^{\frac{2}{3}} + 6 \cdot (\sqrt[3]{1})^2 \cdot (z - hx)^{\frac{2}{3}}$$

Man gebe den beiden Factoren $(\sqrt[3]{1})$ und $(\sqrt[3]{1})^2$ ihre reelle Bedeutung, so geht Gleichung II über in

$$\text{III)}\quad U = \frac{x^2}{m+x} + 2y^2 - 4z + 9\cdot(gx - y^2)^{\frac{2}{3}} + 6\cdot(z - hx)^{\frac{2}{3}}$$

wo, wie gesagt, Alles als eindeutig und reell betrachtet werden muss. Durch Mutiren bekommt man

$$\text{IV)}\quad \delta U = 4y\cdot\left(1 - 3\cdot(gx - y^2)^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\delta y + 4\cdot\left(-1 + (z - hx)^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\delta z$$

Erstens. Setzt man sowohl $\frac{d_y U}{dy} = 0$ als auch $\frac{d_z U}{dz} = 0$, so ergeben sich folgende zwei Fälle:

A) entweder $1 - 3\cdot(gx - y^2)^{-\frac{1}{3}} = 0$ und $-1 + (z - hx)^{-\frac{1}{3}} = 0$

B) oder $y = 0$ und $-1 + (z - hx)^{-\frac{1}{3}} = 0$

A) Lässt man den ersten Fall gelten, so bekommt man

$$\text{V)}\quad y = \sqrt{gx - 27} \quad\text{und}\quad \text{VI)}\quad z = 1 + hx$$

Dabei ist $\delta^2 U = -\frac{8}{81}\cdot(gx - 27)\cdot\delta y^2 - \frac{4}{3}\cdot\delta z^2$ immer negativ; denn es muss $gx > 27$ sein, weil sonst $y = \sqrt{gx - 27}$ imaginär wäre. Also ist $U' = \frac{x^2}{m+x} + 2\cdot(g - 2h)\cdot x + 29$ ein Maximum-stand.

B) Lässt man den zweiten Fall gelten, so bekommt man

$$\text{VII)}\quad y = 0,\ \text{und}\quad \text{VIII)}\quad z = 1 + hx$$

Die Gleichung $y = 0$ will aber sagen, dass y eine identische Function von x sei. Hier ist $\delta^2 U = -4\cdot\left(1 - 3\cdot(gx)^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\delta y^2 - \frac{4}{3}\cdot\delta z^2$, so dass es jetzt auf gx ankommt, ob $U' = \frac{x^2}{m+x} - 4hx + 9\cdot(gx)^{\frac{2}{3}} + 2$ ein Maximum-stand sein kann oder nicht.

Zweitens. Setzt man $\frac{d_y U}{dy} = 0$ und $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$, so ergeben sich folgende zwei Fälle:

A) entweder $1 - 3\cdot(gx - y^2)^{-\frac{1}{3}} = 0$ und $z - hx = 0$

B) oder $y = 0$ und $z - hx = 0$

A) Lässt man den ersten Fall gelten, so bekommt man

$$\text{IX)}\quad y = \sqrt{gx - 27},\ \text{und}\quad \text{X)}\quad z = hx$$

Dabei ist $U' = \frac{x^2}{m+x} + 2\cdot(g - 2h)\cdot x + 27$. Hier muss man das Prüfungsmittel auf directem Wege herstellen; und wenn man wie in den frühern Aufgaben verfährt, so bekommt man folgende nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe:

$$\Delta U = 6\cdot(\varkappa\cdot\mathfrak{Q})^{\frac{2}{3}} - 4\cdot(\varkappa\cdot\mathfrak{Q}) - \frac{4}{81}\cdot(gx - 27)\cdot(\varkappa\cdot\mathfrak{P})^2 \ldots\ldots$$

Bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ hat ΔU allerdings mit dem ersten Gliede dasselbe Zeichen, d. h. ΔU ist positiv; allein der mit der niedrigsten Potenz des $\varkappa$ behaftete Theilsatz enthält nichts von der Mutation des y, während doch ΔU einerlei

Zeichen haben soll bei jedem im Momente des Verschwindens befindlichen Werthe sowohl der Mutation des y als auch der Mutation des z, also auch wenn z. B. die Mutation des z zu Null, d. h. wenn $\mathfrak{Q} = 0$ wird. In diesem Falle ist aber

$$\Delta U = -\frac{4}{81} \cdot (gx - 27) \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^2 \ldots\ldots$$

so dass jetzt bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ das ΔU negativ ist. Da nun das ΔU nicht bei jedem verschwindendkleinen Werthe der Mutationen des y und des z dasselbe Zeichen behält; so kann jetzt von einem vollständigen Maximumstande oder Minimum-stande keine Rede sein.

B) Lässt man den zweiten Fall gelten, so bekommt man

$$\text{XI)}\quad y = 0, \text{ und XII)}\quad z = hx$$

Dabei ist dann $U' = \frac{x^2}{m + x} - 4hx + 9 \cdot (gx)^{\frac{2}{3}}$, und

$$\Delta U = 6 \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^{\frac{2}{3}} - 4 \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q}) - 2 \cdot \left(1 - 3 \cdot (gx)^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^2 \ldots\ldots$$

so dass jetzt dieselbe Bemerkung gilt, wie zuvor.

Drittens. Setzt man $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ und $\frac{d_z U}{dz} = 0$, so bekommt man nur $gx - y^2 = 0$ und $1 - \sqrt[3]{z - hx} = 0$, und daraus folgt

$$\text{XIII)}\quad y = \sqrt{gx}, \text{ und XIV)}\quad z = 1 + h \cdot x$$

Dabei ist $U' = \frac{x^2}{m + x} + 2 \cdot (g - 2h) \cdot x + 2$, und

$$\Delta U = 9 \cdot \left(\sqrt[3]{4gx}\right) \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{2}{3}} + 4\left(\sqrt{gx}\right) \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P}) - \frac{2}{3} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^2 \ldots\ldots$$

Nun muss gx positiv sein, weil sonst $y = \sqrt{gx}$ imaginär wäre. Bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ ist also allerdings ΔU positiv, allein der mit der niedrigsten Potenz des $\varkappa$ behaftete Theilsatz enthält nichts von der Mutation des z, während doch ΔU einerlei Zeichen haben soll bei jedem verschwindendkleinen Werthe sowohl der Mutation des y als auch der Mutation des z, also auch wenn z. B. die Mutation des y zu Null, d. h. wenn $\mathfrak{P} = 0$ wird. In diesem Falle ist aber

$$\Delta U = -\frac{2}{3} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^2 \ldots\ldots$$

so dass jetzt bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ das ΔU negativ ist. Da nun das ΔU nicht bei jedem verschwindendkleinen Werthe der Mutation des y und des z einerlei Zeichen behält; so kann von einem vollständigen Maximum-stande oder Minimum-stande keine Rede sein.

Viertens. Setzt man sowohl $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ als auch $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$, so bekommt man $gx - y^2 = 0$ und $z - hx = 0$; und daraus folgt

$$\text{XV)}\quad y = \sqrt{gx} \text{ und XVI)}\quad z = hx$$

Dabei ist $U' = \frac{x^2}{m + x} + 2 \cdot (g - 2h) \cdot x$, und

$$\Delta U = \varkappa^{\frac{2}{3}}\left(9 \cdot \left(\sqrt[3]{4gx}\right) \cdot \mathfrak{P}^{\frac{2}{3}} + 6 \cdot \mathfrak{Q}^{\frac{2}{3}}\right) + \ldots\ldots$$

Da nun gx positiv sein muss, weil sonst $y = \sqrt{gx}$ imaginär wäre; so erkennt man, dass bei einem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ das ΔU jedenfalls positiv ist, und ein Minimum-stand stattfindet.

Man kehre nun wieder zu Gleichung II zurück, und verbinde

α) die reelle Form des $(\sqrt[3]{1})$ zuerst mit der einen und dann mit der andern imaginären Form des $(\sqrt[3]{1})^2$; so bekommt man zwei weitere Formen des U. Hierauf verbinde man

β) zuerst die eine und dann die andere imaginäre Form des $(\sqrt[3]{1})$ mit der reellen Form des $(\sqrt[3]{1})^2$. Dadurch bekommt man wieder zwei weitere Formen des U. Hierauf verbinde man

γ) je eine der imaginären Formen des $(\sqrt[3]{1})$ mit je einer der imaginären Formen des $(\sqrt[3]{1})^2$; so bekommt man vier weitere Formen des U.

Jede dieser hier besagten acht Formen führt auf keinen andern reellen primären Zustand, als auf einen solchen, der als Einzel-stand sich erprobt.

Aufgabe 29.

Welche unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen räumlichen Curven hat in sich einen bestimmten Punkt, der so gelegen ist, dass folgender von den Coordinaten dieses Punktes abhängige Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz + hx - g^2 \cdot \lg\,\mathrm{nat}\,\frac{x}{m}$$

grösser oder kleiner wird, als bei allen nächstgelegenen Nachbarpunkten, mögen sie sich in der gesuchten Curve oder in den ihr überall nächstanliegenden Nachbarcurven befinden, der Fall sein kann?

Diese Aufgabe sucht für y und z solche Functionen von x und zugleich für x einen solchen festen Werth, dass der hier vorgelegte Ausdruck ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes wird. Durch gemischtes Mutiren bekommt man (nach §. 80 oder §. 153)

$$\text{II)}\quad {}_{(\delta)}U = (2y - z - x)\cdot \delta y_x + (2z - y - x)\cdot \delta z_x$$

$$+ \left((2y - z - x)\cdot\frac{dy}{dx} + (2z - y - x)\cdot\frac{dz}{dx} + 2x - y - z + \frac{h\cdot x - g^2}{x}\right)\cdot \vartheta x$$

Daraus folgen zunächst die beiden identischen Gleichungen

$$\text{III)}\quad 2y - z - x = 0,\quad \text{und IV)}\quad 2z - y - x = 0$$

und die nichtidentische Gleichung

$$(2y - z - x)\cdot\frac{dy}{dx} + (2z - y - x)\cdot\frac{dz}{dx} + 2x - y - z + \frac{hx - g^2}{x} = 0$$

welche sich aber wegen III und IV zurückzieht auf

$$\text{V)}\quad 2x - y - z + \frac{h\cdot x - g^2}{x} = 0$$

Aus III und IV ergibt sich

$$\text{VI)}\quad y = x \quad\text{und VII)}\quad z = x$$

d. h. die gesuchte räumliche Curve ist die durch Gleichung VI und VII bestimmte Grade.

Aus V ergibt sich

$$\text{VIII)}\quad x = \frac{g^2}{h}$$

d. h. der gesuchte Punkt hat die feste Abscisse $\frac{g^2}{h}$. Es ist also $U'' = g^2 \cdot \left(1 - \lg nat \frac{g^2}{h.m}\right)$; und in Folge alles Vorhergehenden bleibt nur

$$\text{IX)} \quad {}_{(}\delta_{t}^{2}U = (\delta y_x - \delta z_x)^2 + \delta y_x^2 + \delta z_x^2 + \left(\frac{g}{h}\right)^2 \cdot \vartheta x^2$$

Dieser Ausdruck ist unter allen Umständen positiv; es findet also ein Minimumwerth eines Minimum-standes statt.

(Man vergleiche noch Aufgabe 30, 31, 32.)

Aufgabe. 30.

Welche unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen Flächen hat in sich einen bestimmten Punkt, der so gelegen ist, dass folgender von den Coordinaten dieses Punktes abhängige Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz + hx - g^2 \cdot \lg nat \frac{x}{m}$$

grösser oder kleiner wird, als bei allen nächstgelegenen Nachbarpunkten, mögen sie sich in der gesuchten Fläche oder in den ihr überall nächstanliegenden Nachbarflächen befinden, der Fall sein kann?

Diese Aufgabe sucht für z eine solche Function von x und y und zugleich für x und y noch solche feste Werthe, dass der hier vorgelegte Ausdruck ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes wird. Durch gemischtes Mutiren bekommt man diesmal (nach §. 81 oder §. 157):

$$\text{II)} \quad {}_{(}\delta_{t}U = (2z - x - y) \cdot \delta z_{x,y} + \left((2z - x - y) \cdot \frac{d_y z}{dy} + 2y - x - z\right) \cdot \vartheta y$$
$$+ \left((2z - x - y) \cdot \frac{d_x z}{dx} + 2x - y - z + \frac{h \cdot x - g^2}{x}\right) \cdot \vartheta x$$

Daraus folgt zunächst die nach x und nach y identische Gleichung

$$\text{III)} \quad 2z - x - y = 0$$

und die beiden nichtidentischen Gleichungen

$$(2z - x - y) \cdot \frac{d_y z}{dy} + 2y - x - z = 0$$

und

$$(2z - x - y) \cdot \frac{d_x z}{dx} + 2x - y - z + \frac{hx - g^2}{x} = 0$$

welche sich aber wegen III bezüglich zurückziehen auf

$$\text{IV)} \quad 2y - x - z = 0, \quad \text{und V)} \quad 2x - y - z + \frac{hx - g^2}{x} = 0$$

Aus III ergibt sich

$$\text{VI)} \quad z = \frac{1}{2} \cdot (x + y)$$

d. h. die gesuchte Fläche ist die durch Gleichung VI bestimmte Ebene. Aus IV und V ergibt sich

$$\text{VII)} \quad y = \frac{g^2}{h}, \quad \text{und VIII)} \quad x = \frac{g^2}{h}$$

d. h. der gesuchte Punkt hat die beiden festen Abscissen $x = \frac{g^2}{h}$ und $y = \frac{g^2}{h}$. Es ist also, wie in voriger Aufgabe, so auch jetzt $U'' = g^2 \cdot \left(1 - \lg nat \frac{g^2}{h \cdot m}\right)$; und in Folge alles Vorhergehenden bleibt nur

$$\text{IX)}\quad {}_{(\delta)}^{2}U = 2 \cdot \delta z_{x,y}^{2} + \frac{3}{2} \cdot (\vartheta x - \vartheta y)^2 + \left(\frac{h}{g}\right)^2 \cdot \vartheta x^2$$

Dieser Ausdruck ist unter allen Umständen positiv; es findet also ein Minimumwerth eines Minimum-standes statt.

(Man vergleiche noch Aufgabe 29, 31, 32.)

Aufgabe 31.

Man sucht eine Fläche und eine nach ihrer ganzen Ausdehnung in dieser Fläche liegende Curve, welche in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft hat, dass folgender von den Coordinaten abhängige Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz + hx - g^2 \cdot \lg\text{nat}\,\frac{x}{m}$$

bei irgend einer nach Belieben gewählten Abscisse x grösser oder kleiner wird, als er bei der nemlichen Abscisse x von allen andern der gesuchten Curve überall nächstanliegenden Nachbarcurven, mögen sich diese in der gesuchten Fläche oder in den ihr stetsfort nächstanliegenden Nachbarflächen befinden, gemacht werden kann.

Diese Aufgabe sucht für z eine solche Function von x und y, und zugleich für y eine solche Function von x, dass der hier vorgelegte Ausdruck ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird. Durch zusammengesetztes Mutiren bekommt man (nach Seite 130) zunächst

$$\text{II)}\quad {}_{[\delta]}U = (2z - x - y) \cdot \delta z_{x,y} + \left((2z - x - y) \cdot \frac{d_y z}{dy} + 2y - x - z\right) \cdot \delta y_x$$

Die Ausdrücke $\delta z_{x,y}$, $\delta^2 z_{x,y}$, etc. sind, wie auch durch die Bezeichnung angedeutet ist, Functionen von x und y zugleich; dagegen die Ausdrücke δy_x, $\delta^2 y_x$, etc. sind nur Functionen von x. Man bekommt zuerst die nach x und y identische Gleichung

$$\text{III)}\quad 2z - x - y = 0$$

und sodann auch noch die nur nach x identische Gleichung

$$\text{IV)}\quad (2z - x - y) \cdot \frac{d_y z}{dy} + 2y - x - z = 0$$

welche sich aber in Folge der Gleichung III zurückzieht auf

$$\text{V)}\quad 2y - x - z = 0$$

Aus III folgt

$$\text{VI)}\quad z = \frac{1}{2} \cdot (x + y)$$

d. h. die gesuchte Fläche ist die durch letztere Gleichung bestimmte Ebene. Eliminirt man z aus III und V, so ergibt sich

$$\text{VII)}\quad y = x, \quad \text{und} \quad \text{VIII)}\quad z = x$$

d. h. die gesuchte räumliche Curve, welche nach ihrer ganzen Ausdehnung in der gesuchten Fläche liegt, ist die durch die Gleichungen VII und VIII bestimmte Grade. In Folge alles Vorhergehenden bleibt jetzt nur

$$\text{IX)}\quad {}_{[\delta]}^{2}U = 2 \cdot \delta z_{x,y}^{2} + \frac{3}{2} \cdot \delta y_x^2$$

Dieser Ausdruck bleibt unter allen Umständen positiv, und somit ist

$$U' = h \cdot x - g^2 \cdot \lg\text{nat}\,\frac{x}{m}$$

ein Minimum-stand.

(Man vergleiche noch Aufgabe 29, 30, 32.)

Aufgabe 32.

Man sucht eine Fläche, eine nach ihrer ganzen Ausdehnung in dieser Fläche liegende Curve, und einen zu dieser Curve gehörigen Punkt, welcher so gelegen ist, dass dabei folgender von den Coordinaten abhängige Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz + hx - g^2 \cdot \lg \operatorname{nat} \frac{x}{m}$$

grösser oder kleiner wird, als es der Fall sein kann bei allen andern dem gesuchten Punkte nächstanliegenden Nachbarpunkten, welche entweder zur gesuchten Curve gehören oder zu den ihr überall nächstanliegenden Nachbarcurven, mögen nun diese in der gesuchten Fläche oder in den ihr überall nächstanliegenden Nachbarflächen sich befinden.

Diese Aufgabe sucht für z eine solche Function von x und y, zugleich für y eine solche Function von x, und zugleich für x einen solchen festen Werth, dass der vorgelegte Ausdruck ein Maximumwerth eines Maximum-standes oder ein Minimumwerth eines Minimum-standes wird. Durch zusammengesetztes gemischtes Mutiren bekommt man (nach Seite 131) zunächst

$$\text{II)}\quad {}_{[\iota}\delta_{\iota]}U = (2z - x - y) \cdot \delta z_{x,y} + \left((2z - x - y) \cdot \frac{d_y z}{dy} + 2y - x - z\right) \cdot \delta y_x$$

$$\left((2z - x - y) \cdot \left(\frac{d_y z}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_x z}{dx}\right) + (2y - x - z) \cdot \frac{dy}{dx} + 2x - y - z + \frac{hx - g^2}{x}\right) \cdot \vartheta x$$

Die Ausdrücke $\delta z_{x,y}$, $\delta^2 z_{x,y}$ etc. sind, wie auch durch die Bezeichnung angedeutet ist, Functionen von x und y zugleich; dagegen die Ausdrücke δy_x, $\delta^2 y_x$ etc. sind nur Functionen von x. Man bekommt zuerst die nach x und y identische Gleichung

$$\text{III)}\quad 2z - x - y = 0$$

sodann die nur nach x identische Gleichung

$$\text{IV)}\quad (2z - x - y) \cdot \frac{d_y z}{dy} + 2y - x - z = 0$$

und zuletzt noch die nichtidentische Gleichung

$$\text{V)}\quad (2z - x - y) \cdot \left(\frac{d_y z}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d_x z}{dx}\right) + (2y - x - z) \cdot \frac{dy}{dx} + 2x - y - z + \frac{hx - g^2}{x} = 0$$

Wegen III zieht sich Gleichung IV zurück auf

$$\text{VI)}\quad 2y - x - z = 0$$

Wegen III und IV zieht sich V zurück auf

$$\text{VII)}\quad 2x - y - z + \frac{hx - g^2}{x} = 0$$

Aus III folgt

$$\text{VIII)}\quad z = \frac{1}{2} \cdot (x + y)$$

d. h. die gesuchte Fläche ist die durch letztere Gleichung bestimmte Ebene. Aus III und VI folgt

$$\text{IX)}\quad y = x \quad \text{und} \quad \text{X)}\quad z = x$$

d. h. die gesuchte räumliche Curve, welche nach ihrer ganzen Ausdehnung in der gesuchten Fläche liegt, ist die durch die Gleichungen IX und X bestimmte Grade. Aus III, VI und VII folgt

$$\text{XI)}\quad x = \frac{g^2}{h}$$

d. h. der gesuchte Punkt hat die bestimmte Abscisse $\frac{g^2}{h}$. In Folge alles Vorhergehenden bleibt jetzt nur

$$\text{XII)}\quad {}_{[(\delta)]}{}^2U = 2\cdot\delta z^2_{x,y} + \frac{3}{2}\cdot\delta y^2_x + \left(\frac{h}{g}\right)^2\cdot\vartheta x^2$$

Dieser Ausdruck ist unter allen Umständen positiv; somit ist $U'' = g^2\cdot\left(1 - \lg\ \text{nat}\ \frac{g^2}{h.m}\right)$ ein Minimumwerth eines Minimum-standes.

(Man vergleiche Aufgabe 29, 30, 31.)

Aufgabe 33.

Man sucht für y und z solche Functionen von x, dass der Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = by + \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\left(xz - by - \frac{1}{4}\cdot z^2\right)^2}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Das Radical hat drei Formen; jedoch soll hier nur die reelle berücksichtigt werden, eine Einschränkung, welche durch die ganze Untersuchung festzuhalten ist.

Durch Mutiren bekommt man zunächst

$$\text{II)}\quad \delta U = \frac{-b\cdot a^{\frac{2}{3}} + b\cdot\sqrt[3]{xz - by - \frac{1}{4}\cdot z^2}}{\sqrt[3]{x\cdot z - b\cdot y - \frac{1}{4}\cdot z^2}}\cdot\delta y + \frac{a^{\frac{2}{3}}\left(x - \frac{1}{2}\cdot z\right)}{\sqrt[3]{x\cdot z - b\cdot y - \frac{1}{4}\cdot z^2}}\cdot\delta z$$

Erstens. Setzt man sowohl $\frac{d_yU}{dy} = 0$ als auch $\frac{d_zU}{dz} = 0$, so bekommt man folgende zwei Gleichungen

$$-a^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{xz - by - \frac{1}{4}\cdot z^2} = 0 \text{ und } x - \frac{1}{2}\cdot z = 0$$

Daraus folgt $y = \frac{x^2 - a^2}{b}$ und $z = 2x$. Ferner ist $\delta^2U = -\left(\frac{b}{a}\right)^2\cdot\delta y^2 - \frac{1}{2}\cdot\delta z^2$, woran man erkennt, dass $U' = \frac{1}{2}\cdot(a^2 + 2x^2)$ ein Maximum-stand ist.

Zweitens. Setzt man $\frac{d_yU}{dy} = 0$ und $\frac{d_zU}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$, so bekommt man folgende zwei Gleichungen

$$-a^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{xz - by - \frac{1}{4}\cdot z^2} = 0 \text{ und } \sqrt[3]{xz - by - \frac{1}{4}\cdot z^2} = 0$$

In Folge der zweiten dieser Gleichungen zieht sich die erste zurück auf $-a^{\frac{2}{3}} = 0$, welches aber der Voraussetzung widerspricht. Desshalb kann auch dieser zweite Fall nicht weiter berücksichtigt werden.

Drittens. Man setze $\frac{d_yU}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ und $\frac{d_zU}{dz} = 0$, so bekommt man die beiden Gleichungen

$$\sqrt[3]{xz - by - \frac{1}{4}\cdot z^2} = 0 \text{ und } x - \frac{1}{2}\cdot z = 0$$

Daraus folgt $y = \frac{x^2}{b}$ und $z = 2x$. Ferner ist $U' = x^2$. Dabei beachte man sorgfältig,

dass der Quotient $\frac{d_z U}{dz}$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Um das Prüfungsmittel herzustellen, setze man $(x^2 + \Delta U)$ an die Stelle des U, $\left(\frac{x^2}{b} + \varkappa \cdot \mathfrak{P}\right)$ an die Stelle des y, und $(2x + \varkappa \cdot \mathfrak{Q})$ an die Stelle des z in Gleichung I überall ein, reducire soviel als möglich, und es gibt sich zunächst

$$\text{III)} \quad \Delta U = b \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{P} + \frac{3}{2} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot \left(b \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{P} + \frac{1}{4} \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{Q}^2\right)^{\frac{2}{3}}$$

Entwickelt man diesen Ausdruck in eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe, so bekommt man

$$\text{IV)} \quad \Delta U = \frac{3}{2} \cdot (ab)^{\frac{2}{3}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^{\frac{2}{3}} + b \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P}) + \frac{1}{4} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\mathfrak{Q}^2}{\sqrt[3]{b \cdot \mathfrak{P}}} \cdot \varkappa^{\frac{5}{3}}$$

$$- \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\mathfrak{Q}^4}{\sqrt[3]{(b \cdot \mathfrak{P})^4}} \cdot \varkappa^{\frac{8}{3}} - \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 9} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\mathfrak{Q}^6}{\sqrt[3]{(b \cdot \mathfrak{P})^7}} \cdot \varkappa^{\frac{11}{3}}$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Bei einem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ ist allerdings die Summe aller unendlichvielen Glieder dieser Reihe positiv; allein das mit der niedrigsten Potenz des $\varkappa$ behaftete Glied enthält nichts von der Mutation des z, während doch ΔU einerlei Zeichen haben muss bei jedem unendlichkleinen Werthe sowohl der Mutation des y als auch der Mutation des z, also auch wenn z. B. die Mutation des y zu Null, d. h. wenn $\mathfrak{P} = 0$ wird. In diesem Falle geht die Reihe IV über in

$$\text{V)} \quad \Delta U = \frac{1}{4} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\mathfrak{Q}^2}{0} \cdot \varkappa^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\mathfrak{Q}^4}{0} \cdot \varkappa^{\frac{8}{3}} - \ldots\ldots$$

Da hier Null in den Nenner kommt, so erkennt man, dass bei $\mathfrak{P} = 0$ die Reihe eine andere Form annehmen muss. Man kehre also wieder zu Gleichung III zurück, welche sich bei $\mathfrak{P} = 0$ zurückzieht auf

$$\text{VI)} \quad \Delta U = \frac{3}{2} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{Q}^2\right)^{\frac{2}{3}}$$

so dass jetzt bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ das ΔU ebenso gut positiv ist, als vorher, wo $\mathfrak{P}$ nicht Null war. Da nun ΔU unter allen Umständen positiv bleibt, so ist $U' = x^2$ ein Minimum-stand.

Es ist noch übrig, auszumitteln, was die unbestimmte Form $\frac{d_z U}{dz} = \frac{0}{0}$ für eine Bedeutung habe. Zu diesem Zwecke kehre man zu der Reihe IV zurück. Das erste mit der Mutation des z behaftete Glied ist $\frac{1}{4} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\mathfrak{Q}^2}{\sqrt[3]{b \cdot \mathfrak{P}}} \cdot \varkappa^{\frac{5}{3}}$, und zeigt, dass der unbestimmten Form $\frac{d_z U}{dz} = \frac{0}{0}$ die Bedeutung Null zukommt. (Man vergleiche den ersten Fall der folgenden Aufgabe.)

Viertens. Man setze $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ und $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$, so bekommt man nur die einzige Gleichung $xz - by - \frac{1}{4} \cdot z^2 = 0$. Daraus folgt

$$\text{VII)} \quad y = \frac{4xz - z^2}{4b}$$

Dieser vierte Fall führt also auf eine diophantische Gleichung, d. h. man kann für z

jede beliebige Function von x annehmen; Gleichung VII gibt dann die dem y entsprechende Function von x. Hierbei ist $U' = \frac{1}{4} \cdot (4xz - z^2)$. Um das Prüfungsmittel herzustellen, setze man $\left[\frac{1}{4} \cdot (4xz - z^2) + \varDelta U\right]$ an die Stelle des U, $\left(\frac{4xz - z^2}{4b} + \varkappa \cdot \mathfrak{P}\right)$ an die Stelle des y, und $(z + \varkappa \cdot \mathfrak{Q})$ an die Stelle des z in Gleichung I überall ein; so bekommt man zunächst

$$\text{VIII)} \quad \varDelta U = b \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{P} + \frac{3}{2} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\left(x \cdot \mathfrak{Q} - \frac{1}{2} \cdot z \cdot \mathfrak{Q} - b \cdot \mathfrak{P}\right) \cdot \varkappa - \frac{1}{4} \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{Q}^2\right)^{\frac{2}{3}}$$

Entwickelt man diesen Ausdruck in eine nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe, so bekommt man

$$\text{IX)} \quad \varDelta U = \frac{3}{2} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot \left(x \cdot \mathfrak{Q} - \frac{1}{2} z \cdot \mathfrak{Q} - b \cdot \mathfrak{P}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \varkappa^{\frac{2}{3}} + b \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{P} + \ldots\ldots$$

Da nun das mit der niedrigsten Potenz des $\varkappa$ behaftete Glied sowohl die Mutation des y als auch die Mutation des z enthält, so erkennt man, dass $U' = \frac{4xz - z^2}{4}$ ein Minimum-stand ist, man mag für z was immer für eine beliebige Function von x wählen.

Aufgabe 34.

Man sucht für y und z solche Functionen von x, dass das in folgender Gleichung

$$\text{I)} \quad U^3 - 3Uyz + 3x \cdot y^2 + z^3 = 0$$

enthaltene U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Durch Mutiren bekommt man

$$\text{II)} \quad \delta U = \frac{Uz - 2xy}{U^2 - yz} \cdot \delta y + \frac{Uy - z^2}{U^2 - yz} \cdot \delta z$$

Erstens. Man setze $\frac{d_y U}{dy} = 0$ und $\frac{d_z U}{dz} = 0$, so geben sich die beiden identischen Gleichungen $Uz - 2xy = 0$ und $Uy - z^2 = 0$. Daraus folgt $y = \frac{U^3}{4x^2}$ und $z = \frac{U^2}{2x}$; und durch Einführung dieser Ausdrücke in Gleichung I bekommt man

$$\text{III)} \quad U^3 \cdot (16 \cdot x^3 - U^3) = 0$$

Daraus folgt entweder $U' = 2x \cdot \sqrt[3]{2}$ oder $U' = 0$.

A) Nimmt man $U' = 2x \cdot \sqrt[3]{2}$, so ist $y = 4x$ und $z = 2x \cdot \sqrt[3]{4}$; wo aber, wie bekannt, nur die reellen Formen berücksichtigt werden dürfen. Mutirt man noch einmal, und nimmt nur die reellen Formen, so bekommt man

$$\delta^2 U = \frac{1}{2x \cdot \sqrt[3]{4}} \cdot \left[(\delta y - \delta z \cdot \sqrt[3]{2})^2 + (\delta z \cdot \sqrt[3]{2})^2\right]$$

Daran erkennt man, dass $U' = 2x \cdot \sqrt[3]{2}$ ein Minimum-stand ist, wenn x positiv; und dass $U' = 2x \cdot \sqrt[3]{2}$ ein Maximum-stand ist, wenn x negativ.

B) Nimmt man $U' = 0$, so ist auch $y = 0$ und $z = 0$; und es ist $\delta U = \frac{0}{0} \cdot \delta y$

$+ \frac{0}{0} \cdot \delta z$. Man stelle also jetzt das Prüfungsmittel auf directem Wege her, und setze $\mathfrak{U}$ an die Stelle des U, $(0 + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ oder schlechthin $\varkappa \cdot \mathfrak{P}$ an die Stelle des y, und $(0 + \varkappa \cdot \mathfrak{Q})$ oder schlechthin $\varkappa \cdot \mathfrak{Q}$ an die Stelle des z in Gleichung I überall ein. Dadurch bekommt man

$$\text{IV)}\quad 3x \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P}^2 + \varkappa^3 \cdot \mathfrak{Q}^3 - 3 \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{U} + \mathfrak{U}^3 = 0$$

woraus sich folgende nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihe

$$\text{V)}\quad \mathfrak{U} = (-\sqrt[3]{3x}) \cdot \mathfrak{P}^{\frac{2}{3}} \cdot \varkappa^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3x}} \cdot \mathfrak{P}^{\frac{1}{3}} \cdot \mathfrak{Q} \cdot \varkappa^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{9x^2}} \cdot \left(\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \mathfrak{Q}^{\frac{5}{3}} \cdot \varkappa^{\frac{5}{3}} \cdots$$

. .

ergibt. Diese Reihe repräsentirt die drei Formen des $\mathfrak{U}$ zugleich, von denen man aber nur die reelle zu berücksichtigen hat. Wegen $U' = 0$ ist diese Reihe mit der Differenz $(\mathfrak{U} - U')$ ganz gleichbedeutend; deren Zeichen ist bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ allerdings mit dem Zeichen des $(-\sqrt[3]{3x})$ einerlei, allein dieser mit der niedrigsten Potenz des $\varkappa$ behaftete Theilsatz enthält nur die Mutation des y, während $(\mathfrak{U} - U')$ einerlei Zeichen haben muss bei jedem unendlichkleinen Werthe sowohl der Mutation des y als auch der Mutation des z, also auch wenn z. B. die Mutation des y zu Null, d. h. wenn $\mathfrak{P} = 0$ wird. In diesem Falle geht die Reihe V über in

$$\text{VI)}\quad \mathfrak{U} = -\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{9x^2}} \cdot \left(\frac{\mathfrak{Q}}{0}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \mathfrak{Q}^{\frac{5}{3}} \cdot \varkappa^{\frac{5}{3}} \cdots\cdots$$

d. h. jetzt muss die Reihe V eine andere Form annehmen. Man kehre also zu Gleichung IV zurück, welche sich bei $\mathfrak{P} = 0$ reducirt auf $\varkappa^3 \cdot \mathfrak{Q}^3 + \mathfrak{U}^3 = 0$, und daraus folgt

$$\text{VII)}\quad \mathfrak{U} = (-\sqrt[3]{1}) \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q}$$

so dass jetzt das $\mathfrak{U}$ sein Zeichen wechseln kann. Da nun die Differenz $(\mathfrak{U} - U')$ nicht bei jedem unendlichkleinen Werthe der Mutation des y und des z ein unwandelbares Zeichen behält; so kann von einem vollständigen Maximum-stande oder Minimum-stande keine Rede sein. Es ist noch übrig, auszumitteln, was die beiden unbestimmten Formen $\frac{d_y U}{dy} = \frac{0}{0}$ und $\frac{d_z U}{dz} = \frac{0}{0}$ für eine Bedeutung haben. Zu diesem Zwecke kehre man zu der Reihe V zurück. Das erste mit der Mutation des y behaftete Glied ist $(-\sqrt[3]{3x}) \cdot \mathfrak{P}^{\frac{2}{3}} \cdot \varkappa^{\frac{2}{3}}$, und zeigt, dass der unbestimmten Form $\frac{d_y U}{dy} = \frac{0}{0}$ die Bedeutung $\frac{\mathfrak{G}}{0}$ zukommt. Das erste mit der Mutation des z behaftete Glied ist $\frac{1}{\sqrt[3]{3x}} \cdot \mathfrak{P}^{\frac{1}{3}} \cdot \mathfrak{Q} \cdot \varkappa^{\frac{4}{3}}$, und zeigt, dass der unbestimmten Form $\frac{d_z U}{dz} = \frac{0}{0}$ die Bedeutung Null zukommt. (Man vergleiche den dritten Fall der vorhergehenden Aufgabe.)

Zweitens. Setzt man $\frac{d_y U}{dy} = 0$ und $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$, so bekommt man die Gleichungen $Uz - 2xy = 0$ und $U^2 - yz = 0$. Dabei beachte man sorgfältig, dass der Quotient $\frac{d_y U}{dy}$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Aus diesen beiden Gleichungen folgt $U = \frac{z^2}{2x}$ und $y = \frac{z^3}{4x^2}$. Eliminirt man U und y aus I, so gibt sich

$$\text{VIII)}\quad z^3 \cdot (16x^3 - z^3) = 0$$

Daraus folgt entweder $z = 2x \cdot \sqrt[3]{2}$ oder $z = 0$.

A) Nimmt man $z = 2x \cdot \sqrt[3]{2}$, so ist $y = 4x$ und $U = 2x \cdot \sqrt[3]{4}$, wo aber nur die reellen Formen berücksichtigt werden dürfen. Zur Prüfung setze man $\mathfrak{U}$ an die Stelle des U, $(4x + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ an die Stelle des y, und $(2x \cdot \sqrt[3]{2} + \varkappa \cdot \mathfrak{Q})$ an die Stelle des z in Gleichung I überall ein; so bekommt man

$$\text{IX)}\quad 64x^3 + 12 \cdot x^2 \cdot (2\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} \cdot \sqrt[3]{4}) \cdot \varkappa + 3x \cdot (\mathfrak{P}^2 + 2\mathfrak{Q}^2 \cdot \sqrt[3]{2}) \cdot \varkappa^2 + \varkappa^3 \cdot \mathfrak{Q}^3$$
$$- 24x^2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \mathfrak{U} - 6x \cdot (\mathfrak{P} \cdot \sqrt[3]{2} + 2 \cdot \mathfrak{Q}) \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{U} - 3 \cdot \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{Q} \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{U} + \mathfrak{U}^3 = 0$$

Die hieraus sich ergebende Reihenform ist keine andere, als

$$\mathfrak{U} = A + B \cdot \varkappa^b + C \cdot \varkappa^c + \ldots\ldots\ldots$$

d. h. das erste Glied aller aus IX sich ergebenden Reihen enthält kein $\varkappa$. Die erste Coefficientengleichung ist

$$A^3 - 24 \cdot A \cdot x^2 \cdot \sqrt[3]{2} + 64 \cdot x^3 = 0$$

oder

$$(A - 2x \cdot \sqrt[3]{4})^2 \cdot (A + 4x \cdot \sqrt[3]{4}) = 0$$

Daraus folgt zunächst $A = 2x \cdot \sqrt[3]{4}$, und die damit anfangende Reihe ist

$$\text{X)}\quad \mathfrak{U} = 2x \cdot \sqrt[3]{4} + (2x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\mathfrak{Q} \cdot \varkappa)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{4} \cdot \mathfrak{P} \cdot \varkappa \cdot \sqrt[3]{4} + \frac{5}{12} \cdot \mathfrak{Q} \cdot \varkappa \cdot \sqrt[3]{2}\right) \ldots\ldots$$

Diese Reihe repräsentirt zwei Formen des $\mathfrak{U}$, und liefert die dem $U' = 2x \cdot \sqrt[3]{4}$ nächstanliegenden Nachbarzustände, so dass die noch aus Gleichung IX zu entwickelnde Reihe, welche die dritte Form des $\mathfrak{U}$ repräsentirt, nicht weiter berücksichtigt zu werden braucht. An der Reihe X erkennt man, dass, soviel von der Mutation des z abhangt, ein Gränz-stand stattfindet. Das erste mit der Mutation des y behaftete Glied ist $\frac{1}{4} \cdot \mathfrak{P} \cdot \varkappa \cdot \sqrt[3]{4}$; und somit ist die unbestimmte Form $\frac{d_y U}{dy} = \frac{0}{0} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{4}$.

B) Nimmt man $z = 0$, so ist auch $y = 0$ und $U' = 0$. Dieser Fall ist aber in vorliegender Aufgabe schon einmal durchgeführt worden.

Drittens. Setzt man $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ und $\frac{d_z U}{dz} = 0$, so bekommt man die Gleichungen $U^2 - yz = 0$ und $Uy - z^2 = 0$. Dabei beachte man sorgfältig, dass der Quotient $\frac{d_z U}{dz}$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Aus diesen beiden Gleichungen folgt $y = \frac{z^2}{U}$ und $y = \frac{U^2}{z}$. Es ist also $U = y = z$ und Gleichung I geht über in

$$\text{XI)}\quad z^2 \cdot (3x - z) = 0$$

Es ist also entweder $z = 3x$ oder $z = 0$.

A) Nimmt man $z = 3x$, so ist auch $y = 3x$ und $U' = 3x$. Zur Prüfung setze man $\mathfrak{U}$ an die Stelle des U, $(3x + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ an die Stelle des y, und $(3x + \varkappa \cdot \mathfrak{Q})$ an die Stelle des z in Gleichung I überall ein; so bekommt man

$$\text{XII)}\quad 54 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 \cdot (2\mathfrak{P} + 3\mathfrak{Q}) \cdot \varkappa + 3x \cdot (\mathfrak{P}^2 + 3 \cdot \mathfrak{Q}^2) \cdot \varkappa^2 + \mathfrak{Q}^3 \cdot \varkappa^3$$
$$- 27 \cdot x^2 \cdot \mathfrak{U} - 9 \cdot x \cdot (\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}) \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{U} - 3 \cdot \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{Q} \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{U} + \mathfrak{U}^3 = 0$$

Die hieraus sich ergebende Reihenform ist keine andere als

$$\mathfrak{U} = A + B \cdot \varkappa^{b} + C \cdot \varkappa^{c} + \ldots\ldots$$

d. h. das erste Glied aller aus XII sich ergebenden Reihen enthält kein $\varkappa$. Die erste Coefficientengleichung ist $54 \cdot x^3 - 27 \cdot x^2 \cdot A + A^3 = 0$, oder $(A - 3x)^2 \cdot (A + 6x) = 0$, und die mit $A = 3x$ anfangende Reihe ist

$$\text{XIII)}\quad \mathfrak{U} = 3x + (x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\mathfrak{P} \cdot \varkappa)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{4}{9} \cdot \mathfrak{P} \cdot \varkappa + \frac{1}{2} \cdot \mathfrak{Q} \cdot \varkappa\right) \ldots\ldots$$

Diese Reihe repräsentirt zwei Formen des $\mathfrak{U}$, und liefert die dem $U' = 3x$ nächstanliegenden Nachbarzustände, so dass die noch aus Gleichung XII zu entwickelnde Reihe, welche die dritte Form des $\mathfrak{U}$ repräsentirt, nicht weiter berücksichtigt zu werden braucht. An der Reihe XIII erkennt man, dass, soviel von der Mutation des y abhangt, ein Gränz-stand stattfindet. Das erste mit der Mutation des z behaftete Glied ist $\frac{1}{2} \cdot \mathfrak{Q} \cdot \varkappa$; und somit ist die unbestimmte Form $\frac{d_z U}{dz} = \frac{0}{0} = \frac{1}{2}$.

B) Nimmt man $z = 0$, so ist auch $y = 0$ und $U' = 0$. Dieser Fall ist aber in vorliegender Aufgabe schon einmal durchgeführt worden.

Viertens. Man setze $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ und $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$, so bekommt man nur die einzige Gleichung $U^2 - yz = 0$ Daraus folgt $U = \pm \sqrt{yz}$, und Gleichung I geht über

$$\pm\, yz \cdot \sqrt{yz} \mp 3yz \cdot \sqrt{yz} + 3 \cdot x \cdot y^2 + z^3 = 0$$

Daraus folgt

$$\mp\, 2yz \cdot \sqrt{yz} = -\, 3 \cdot x \cdot y^2 - z^3$$

oder

$$\text{XIV)}\quad 4y^3 \cdot z^3 = 9 \cdot x^2 \cdot y^4 + 6x \cdot y^2 \cdot z^3 + z^6$$

Dieser vierte Fall führt also auf eine diophantische Gleichung, d. h. man kann für y irgend eine willkürliche Function von x annehmen, und sodann z bestimmen, oder umgekehrt. Bedeutet nun $\varphi(x)$ eine ganz willkürliche Function von x, und setzt man z. B. $y = z \cdot \varphi(x)$, so geht dabei Gleichung XIV über in $4 \cdot z^6 \cdot (\varphi(x))^3 = 9 \cdot x^2 \cdot z^4 \cdot (\varphi(x))^4 + 6x \cdot z^5 \cdot (\varphi(x))^2 + z^6$. Man dividire aus dieser Gleichung z^4 weg, so gibt sich eine Gleichung des zweiten Grades, aus welcher

$$\text{XV)}\quad z = 3x \cdot (\varphi(x))^2 \cdot \frac{1 \pm 2 \cdot (\varphi(x)) \cdot \sqrt{\varphi(x)}}{4 \cdot (\varphi(x))^3 - 1}$$

oder in anderer Form

$$\text{XVI)}\quad z = \frac{3x \cdot (\varphi(x))^2 \cdot \left[1 \pm 2 \cdot (\varphi(x)) \cdot \sqrt{\varphi(x)}\right]}{\left[1 + 2 \cdot (\varphi(x)) \cdot \sqrt{\varphi(x)}\right] \cdot \left[-1 + 2 \cdot (\varphi(x)) \cdot \sqrt{\varphi(x)}\right]}$$

folgt.

A) Lässt man bei dem Doppelzeichen das positive gelten, so gibt sich $z = + \frac{3x \cdot (\varphi(x))^2}{-1 + 2 \cdot (\varphi(x)) \cdot \sqrt{\varphi(x)}}$. Also ist $y = z \cdot \varphi(x) = + \frac{3x \cdot (\varphi(x))^3}{-1 + 2 \cdot (\varphi(x)) \cdot \sqrt{\varphi(x)}}$ und $U' = \pm \sqrt{yz} = \pm \frac{3x \cdot (\varphi(x)) \cdot \sqrt{\varphi(x)}}{-1 + 2 \cdot (\varphi(x)) \cdot \sqrt{\varphi(x)}}$. Indem man aber diese für y, z und U' erhaltenen Ausdrücke in I einführt, erkennt man, dass nur $U' = + \frac{3x \cdot (\varphi(x))^2 \cdot \sqrt{\varphi(x)}}{-1 + 2 \cdot (\varphi(x)) \cdot \sqrt{\varphi(x)}}$ beibehalten werden darf.

B) Lässt man in Gleichung XVI bei dem Doppelzeichen das negative gelten, so gibt sich $z = - \frac{3x \cdot (\varphi(x))^2}{1 + 2 \cdot (\varphi(x)) \cdot \sqrt{\varphi(x)}}$, $y = z \cdot \varphi(x) = - \frac{3x \cdot (\varphi(x))^3}{1 + 2 \cdot (\varphi(x)) \cdot \sqrt{\varphi(x)}}$, und

$U' = \pm\sqrt{yz} = \pm \frac{3x \cdot (\varphi(x))^2 \cdot \sqrt{\varphi(x)}}{1 + 2 \cdot (\varphi(x)) \cdot \sqrt{\varphi(x)}}$. Indem man aber auch jetzt die für y, z und U' erhaltenen Ausdrücke in I einführt, erkennt man, dass nur $U' = + \frac{3x \cdot (\varphi(x))^2 \cdot \sqrt{\varphi(x)}}{1 + 2 \cdot (\varphi(x)) \cdot \sqrt{\varphi(x)}}$ beibehalten werden darf.

Man kann also für $\varphi(x)$ was immer für eine beliebige reelle Function von x annehmen, so ergeben sich gradezu die zusammengehörigen Ausdrücke für y, z und U, wodurch die beiden Gleichungen $U^2 - yz = 0$ und $U^3 - 3Uyz + 3x \cdot y^2 + z^3 = 0$ zugleich identisch werden.

Das Prüfungsmittel wird jedesmal durch directe Reihenentwickelung hergestellt.

Aufgabe 35.

Man sucht für y und z solche Functionen von x, dass das in folgender Gleichung

$$\text{I)}\quad U^3 - 3U \cdot y^2 + 6xyz - 2z^3 - \frac{(a^2 - ax + x^2)^3 + x^6}{\sqrt{(a^2 - ax + x^2)^3}} = 0$$

enthaltene U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Man beachte, dass das Radical $\sqrt{a^2 - ax + x^2}$ nur seine positive Bedeutung hat. Durch Mutiren bekommt man

$$\text{II)}\quad \delta U = \frac{2 \cdot (Uy - xz)}{(U + y) \cdot (U - y)} \cdot \delta y + \frac{2 \cdot (z^2 - xy)}{(U + y) \cdot (U - y)} \cdot \delta z$$

Erstens. Man setze $\frac{d_y U}{dy} = 0$ und $\frac{d_z U}{dz} = 0$, so gibt sich $Uy - xz = 0$ und $z^2 - xy = 0$; und aus diesen Gleichungen folgt

$$\text{III)}\quad y = \frac{x^3}{U^2}, \text{ und } \text{IV)}\quad z = \frac{x^2}{U}$$

Eliminirt man y und z aus I, so bekommt man

$$U^3 + \frac{x^6}{U^3} - \frac{(a^2 - ax + x^2)^3 + x^6}{\sqrt{(a^2 - ax + x^2)^3}} = 0$$

welche Gleichung sich gradezu umformen lässt in

$$\left(U^3 - \frac{(a^2 - ax + x^2)^3 + x^6}{2 \cdot \sqrt{(a^2 - ax + x^2)^3}}\right)^2 = \left(\frac{(a^2 - ax + x^2)^3 - x^6}{2 \cdot \sqrt{(a^2 - ax + x^2)^3}}\right)^2$$

Daraus folgt

$$\text{V)}\quad U^3 = \frac{(a^2 - ax + x^2)^3 + x^6 \pm ((a^2 - ax + x^2)^3 - x^6)}{2 \cdot \sqrt{(a^2 - ax + x^2)^3}}$$

Lässt man bei dem Doppelzeichen das obere gelten, so ist

$$\text{VI)}\quad U_1' = (\sqrt[3]{1}) \cdot \sqrt{a^2 - ax + x^2}$$

Weil das Radical $\sqrt{a^2 - ax + x^2}$ nur seine positive Bedeutung hat, so sind durch Gleichung VI nur drei verschiedene Formen des U gegeben, von denen man natürlich nur die reelle beachten darf. Lässt man aber bei dem Doppelzeichen das negative gelten, so ist

$$\text{VII)}\quad U_2' = (\sqrt[3]{1}) \cdot \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - ax + x^2}}$$

Durch diese Gleichung sind, eben weil das Radical $\sqrt{a^2 - ax + x^2}$ nur seine positive Bedeutung hat, gleichfalls nur drei Formen des U gegeben, von denen man wieder nur die reelle beachten darf.

Ist nun $U_1' = \sqrt{a^2 - ax + x^2}$, so ist $y = \frac{x^3}{a^2 - ax + x^2}$ und $z = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - ax + x^2}}$; und diese drei zusammengehörigen Ausdrücke machen Gleichung I identisch.

Ist aber $U_2' = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - ax + x^2}}$, so ist $y = \frac{a^2 - ax + x^2}{x}$ und $z = \sqrt{a^2 - ax + x^2}$; und diese drei zusammengehörigen Ausdrücke machen wieder die Gleichung I identisch. Mutirt man noch einmal, so bleibt nur

$$\text{VIII)}\quad \delta^2 U = \frac{2}{U \cdot (U + y) \cdot (U - y)} \cdot [(U \cdot \delta y - x \cdot \delta z)^2 + x^2 \cdot \delta z^2]$$

Der in den eckigen Klammern eingeschlossene Factor ist jedenfalls positiv; es kommt also nur auf den ausserhalb der eckigen Klammern befindlichen Factor an, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet.

Zweitens. Man setze $\frac{d_y U}{dy} = 0$ und $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$, so bekommt man $Uy - xz = 0$ und $(U + y) \cdot (U - y) = 0$. Dabei beachte man sorgfältig, dass der Quotient $\frac{d_y U}{dy}$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt.

A) Nimmt man $Uy - xz = 0$ und $U + y = 0$, so gibt sich $U = -y$ und $z = -\frac{y^2}{x}$, und Gleichung I geht über in

$$\text{IX)}\quad y^6 - 2x^3 \cdot y^3 = + \frac{x^3 \cdot (a^2 - ax + x^2)^3 + x^9}{2 \cdot \sqrt{(a^2 - ax + x^2)^3}}$$

woraus sich y gradezu als Function von x bestimmen lässt. Das Prüfungsmittel gibt sich durch directe Reihenentwicklung, wodurch man zugleich zur Kenntniss der Bedeutung der unbestimmten Form $\frac{d_y U}{dy} = \frac{0}{0}$ gelangt.

B) Nimmt man $Uy - xz = 0$ und $U - y = 0$; so gibt sich $U = y$ und $z = +\frac{y^2}{x}$, und Gleichung I geht über in

$$\text{X)}\quad y^6 - 2x^3 \cdot y^3 = - \frac{x^3 \cdot (a^2 - ax + x^2)^3 + x^9}{2 \cdot \sqrt{(a^2 - ax + x^2)^3}}$$

woraus sich wieder y als Function von x bestimmen lässt. Und so fort.

Drittens. Man setze $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ und $\frac{d_z U}{dz} = 0$, so bekommt man $(U + y) \cdot (U - y) = 0$ und $z^2 - xy = 0$. Dabei beachte man sorgfältig, dass der Quotient $\frac{d_z U}{dz}$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, deren Bedeutung sich bei der directen Reihenentwicklung ergibt.

A) Nimmt man $U + y = 0$ und $z^2 - xy = 0$; so gibt sich $y = \frac{z^2}{x}$ und $U = -\frac{z^2}{x}$, und Gleichung I geht über in

$$\text{XI)}\quad z^6 + 2x^3 \cdot z^3 = \frac{x^3 \cdot (a^2 - ax + x^2)^3 + x^9}{2 \cdot \sqrt{(a^2 - ax + x^2)^3}}$$

B) Nimmt man $U - y = 0$ und $z^2 - xy = 0$; so gibt sich $y = \frac{z^2}{x}$ und $U = \frac{z^2}{x}$, und Gleichung I geht über in

$$\text{XII)}\quad z^6 - 2x^3 \cdot z^3 = - \frac{x^3 \cdot (a^2 - ax + x^2)^3 + x^9}{2 \cdot \sqrt{(a^2 - ax + x^2)^3}}$$

Viertens. Man setze $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ und $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$, so bekommt man nur die einzige Gleichung $(U + y) \cdot (U - y) = 0$.

A) Nimmt man $U + y = 0$, so bekommt man $U = -y$, und Gleichung I geht über in

$$\text{XIII)}\quad 2 \cdot y^3 + 6xyz - 2 \cdot z^3 - \frac{(a^2 - ax + x^2)^3 + x^6}{\sqrt{(a^2 - ax + x^2)^3}} = 0$$

B) Nimmt man $U - y = 0$, so bekommt man $U = +y$, und Gleichung I geht über in

$$\text{XIV)}\quad 6xyz - 2 \cdot y^3 - 2 \cdot z^3 - \frac{(a^2 - ax + x^2)^3 + x^6}{\sqrt{(a^2 - ax + x^2)^3}} = 0$$

Die Gleichungen XIII und XIV, auf welche dieser vierte Fall geführt hat, sind aber diophantische Gleichungen, d. h. man kann für y irgend eine willkürliche Function von x annehmen, und sodann z bestimmen, oder umgekehrt. Das Prüfungsmittel wird jedesmal durch directe Reihenentwicklung hergestellt.

Aufgabe 36.

Man sucht y und z als solche Functionen von x, dass das in folgender Gleichung

$$\text{I)}\quad x \cdot (U^3 + y^3 + z^3) = U^2 \cdot y \cdot z + U \cdot y^2 \cdot z + U \cdot y \cdot z^2$$

enthaltene U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.
Durch Mutiren bekommt man

$$\text{II)}\quad \delta U = \frac{2Uyz + U \cdot z^2 + U^2 \cdot z - 3x \cdot y^2}{3U^2 \cdot x - 2U \cdot yz - y^2 \cdot z - y \cdot z^2} \cdot \delta y + \frac{2Uyz + U \cdot y^2 + U^2 \cdot y - 3x \cdot z^2}{3U^2 \cdot x - 2Uyz - y^2 \cdot z - y \cdot z^2} \cdot \delta z$$

Erstens. Man setze $\frac{d_y U}{dy} = 0$ und $\frac{d_z U}{dz} = 0$, so bekommt man

$$\text{III)}\quad 2Uyz + U \cdot z^2 + U^2 \cdot z - 3x \cdot y^2 = 0 \text{ und IV)}\quad 2Uyz + U \cdot y^2 + U^2 \cdot y - 3x \cdot z^2 = 0$$

Vergleicht man diese beiden Gleichungen, so erkennt man, dass die eine in die andere übergeht, wenn y und z miteinander vertauscht werden; und somit ist klar, dass $y = z$ werden muss, da, was auch immer der Calcul liefern mag, der für das eine Element sich ergebende Ausdruck auch jedesmal für das andere passt. Die Differenz der beiden letzten Gleichungen ist

$$\text{V)}\quad (z - y) \cdot [U^2 + (3x + U) \cdot (y + z)] = 0$$

Dieser Gleichung wird nun ebenfalls genügt, wenn $y = z$ ist; und setzt man y statt z in III und IV ein, so gehen diese beide Gleichungen über in

$$\text{VI)}\quad U^2 - 3y \cdot (x - U) = 0$$

Setzt man ferner y statt z in Gleichung I ein, so gibt sich

$$\text{VII)}\quad 2y^3 \cdot (x - U) = U^2 \cdot (y^2 - x \cdot U)$$

Wenn man nun $3y \cdot (x - U)$ statt U^2 aus VI entnimmt, und in VII einsetzt; so bekommt man

$$\text{VIII)}\quad U = \frac{y^2}{3x}$$

Wird $\frac{y^2}{3x}$ an die Stelle des U entweder in Gleichung I, oder in III, oder in IV, oder VI eingesetzt, so gibt sich jedesmal

$$\text{IX)}\quad y^3 + 9x \cdot y^2 - 27 \cdot x^3 = 0$$

Es gibt nun für y und somit auch für z drei verschiedene Ausdrücke, welche näherungsweise folgende sind:

$$y_1 = z_1 = + x \cdot 1{,}5962673 \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$y_2 = z_2 = - x \cdot 1{,}9581102 \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$y_3 = z_3 = - x \cdot 8{,}6381566 \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Die hier gegebenen Zahlen sind aber nur bis zur sechsten Decimalstelle genau. Es ergeben sich nun für $U' = \frac{y^2}{3x}$ ebenfalls drei verschiedene Ausdrücke, welche folgende sind:

$$U_1' = \frac{(+ x \cdot 1{,}5962673 \ldots)^2}{3x} = x \cdot 0{,}8493564 \ldots$$

$$U_2' = \frac{(- x \cdot 1{,}9581102 \ldots)^2}{3x} = x \cdot 1{,}2780655 \ldots$$

$$U_3' = \frac{(- x \cdot 8{,}6381566 \ldots)^2}{3x} = x \cdot 24{,}8729164 \ldots$$

Mutirt man noch einmal, und berücksichtigt man alles Vorhergehende; so gibt sich

$$\text{X)}\quad \delta^2 U = \frac{2 \cdot (9x^2 - y^2)}{y^2 \cdot (6x + y)} \cdot \left[\delta y^2 - 2 \cdot \frac{y^2 \cdot (12x + y)}{6x \cdot (9x^2 - y^2)} \cdot \delta y \cdot \delta z + \delta z^2\right]$$

1) Bei $y_1 = z_1 = + x \cdot 1{,}5962673 \ldots$ findet, wenn x positiv ist, ein Minimum-stand statt; dagegen findet, wenn x negativ ist, ein Maximum-stand statt.

2) Bei $y_2 = z_2 = - x \cdot 1{,}9581102 \ldots$ findet weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand statt.

3) Bei $y_3 = z_3 = - x \cdot 8{,}6381566 \ldots$ findet, wenn x positiv ist, ein Maximum-stand statt; dagegen findet, wenn x negativ ist, ein Minimum-stand statt.

Zweitens. Man setze $\frac{d_y U}{dy} = 0$ und $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$, so bekommt man die beiden Gleichungen

$$\text{XI)}\quad 2Uyz + U \cdot z^2 + U^2 \cdot z - 3x \cdot y^2 = 0 \quad\text{und}\quad \text{XII)}\quad 3U^2 \cdot x - 2Uyz - y^2 \cdot z - y \cdot z^2 = 0$$

welche in Verbindung mit I für y, z und U Functionen von x liefern. Dabei wird $\frac{d_y U}{dy} = \frac{0}{0}$; allein die directe Reihenentwicklung gibt gradezu die wahre Bedeutung dieser unbestimmten Form.

Drittens. Man setze $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ und $\frac{d_z U}{dz} = 0$, so bekommt man die beiden Gleichungen

$$\text{XIII)}\quad 3U^2 \cdot x - 2Uyz - y^2 \cdot z - y \cdot z^2 = 0 \quad\text{und}\quad \text{XIV)}\quad 2Uyz + U \cdot y^2 + U^2 \cdot y - 3x \cdot z^2 = 0$$

welche in Verbindung mit I für y, z und U Functionen von x liefern. Dabei wird $\frac{d_z U}{dz} = \frac{0}{0}$; allein die directe Reihenentwicklung gibt gradezu die wahre Bedeutung dieser unbestimmten Form.

Viertens. Man setze $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ und $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$, so bekommt man die einzige Gleichung

$$\text{XV)} \quad 3U^2 \cdot x - 2U \cdot yz - y^2 \cdot z - y \cdot z^2 = 0$$

welche mit I verbunden werden muss. Allein jetzt ist die Aufgabe eine diophantische, d. h. man kann entweder für y eine beliebige Function von x annehmen, und sodann z bestimmen, oder umgekehrt.

Aufgabe 37.

Man sucht das Verhältniss zweier Zahlen y und z, deren Product ein Maximum-stand ist, unter der Bedingung, dass das Dreifache der ersten Zahl nebst dem Vierfachen der zweiten jedesmal ein vollkommenes Quadrat sei.

Die Aufgabe verlangt also, dass

$$\text{I)} \quad U = y \cdot z$$

ein Maximum-stand werde, während noch die Bedingungsgleichung

$$\text{II)} \quad 3 \cdot y + 4 \cdot z = x^2$$

erfüllt wird. Diese Aufgabe kann mit gleicher Leichtigkeit durchgeführt werden, man mag y oder z als mittelbar mutabel behandeln. Man behandle z als mittelbar mutabel.

Erste Auflösung.

Man eliminire z vor dem Mutiren, so geht I über in

$$U = \frac{1}{4} \cdot y \cdot (x^2 - 3y)$$

Daraus folgt $\delta U = \frac{1}{4} \cdot (x^2 - 6y) \cdot \delta y$ und $\delta^2 U = \frac{1}{4} \cdot (x^2 - 6y) \cdot \delta^2 y - \frac{3}{2} \cdot \delta y^2$. Aus $\frac{d_y U}{dy} = 0$ folgt $y = \frac{x^2}{6}$. Also ist $z = \frac{x^2}{8}$ und $U' = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^4$. Dabei ist $\delta^2 U = -\frac{3}{2} \cdot \delta y^2$; und sonach findet ein Maximum-stand statt.

Zweite Auflösung.

Man eliminire die Mutationscoefficienten des z auf directem Wege. Aus I folgt

$$\text{III)} \quad \delta U = z \cdot \delta y + y \cdot \delta z$$

und

$$\text{IV)} \quad \delta^2 U = z \cdot \delta^2 y + y \cdot \delta^2 z + 2 \cdot \delta y \cdot \delta z$$

Aus II folgt

$$\text{V)} \quad 3 \cdot \delta y + 4 \cdot \delta z = 0$$

und

$$\text{VI)} \quad 3 \cdot \delta^2 y + 4 \cdot \delta^2 z = 0$$

Man eliminire δz aus III, was mittelst V geschieht; so bekommt man

$$\text{VII)} \quad \delta U = \frac{4z - 3y}{4} \cdot \delta y$$

Man eliminire δz und $\delta^2 z$ aus IV, was mittelst V und VI geschieht; so bekommt man

$$\text{VIII)} \quad \delta^2 U = \frac{4z - 3y}{4} \cdot \delta^2 y - \frac{3}{2} \cdot \delta y^2$$

Hier kann der bei δy befindliche Factor nur zu Null werden. Man bekommt also

$$\text{IX)} \quad 4z - 3y = 0$$

Aus I, II und IX gibt sich nun $y = \frac{x^2}{6}$, $z = \frac{x^2}{8}$ und $U' = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^4$. Ferner ist auch jetzt $\delta^2 U = -\frac{3}{2} \cdot \delta y^2$. Somit ist Alles, wie bei der ersten Auflösung.

Dritte Auflösung.

Man eliminire die Mutationscoefficienten des z mittelst eines Multiplicators. Man multiplicire Gleichung V mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{L}$ von x, so ist auch noch das Product $\mathfrak{L} \cdot (3 \cdot \delta y + 4 \cdot \delta z) = 0$, und kann zu III addirt werden, ohne dass δU sich im Geringsten ändert. Vollzieht man die Addition, so bekommt man

$$\delta U = z \cdot \delta y + y \cdot \delta z + \mathfrak{L} \cdot (3 \cdot \delta y + 4 \cdot \delta z)$$

Ordnet man anders, so gibt sich

$$\text{X)} \quad \delta U = (z + 3\mathfrak{L}) \cdot \delta y + (y + 4\mathfrak{L}) \cdot \delta z$$

Man multiplicire auch Gleichung VI mit derselben Function $\mathfrak{L}$ von x, so ist auch noch das Product $\mathfrak{L} \cdot (3 \cdot \delta^2 y + 4 \cdot \delta^2 z) = 0$, und kann zu IV addirt werden, ohne dass $\delta^2 U$ sich im Geringsten ändert. Vollzieht man die Addition, so bekommt man

$$\delta^2 U = z \cdot \delta^2 y + y \cdot \delta^2 z + 2 \cdot \delta y \cdot \delta z + \mathfrak{L} \cdot (3 \cdot \delta^2 y + 4 \cdot \delta^2 z)$$

Ordnet man anders, so gibt sich

$$\text{XI)} \quad \delta^2 U = (z + 3\mathfrak{L}) \cdot \delta^2 y + (y + 4\mathfrak{L}) \cdot \delta^2 z + 2 \cdot \delta y \cdot \delta z$$

Da nun in Gleichung X das mittelbare δz nicht vorkommen darf, so denke man sich unter $\mathfrak{L}$ eine solche Function, dass identisch stattfindet

$$\text{XII)} \quad y + 4\mathfrak{L} = 0$$

Gleichung X reducirt sich also jetzt auf $\delta U = (z + 3\mathfrak{L}) \cdot \delta y$, und daraus folgt

$$\text{XIII)} \quad z + 3\mathfrak{L} = 0$$

Aus I, II, XII und XIII gibt sich nun $\mathfrak{L} = -\frac{x^2}{24}$, $y = \frac{x^2}{6}$, $z = \frac{x^2}{8}$ und $U' = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^4$. Wegen XII und XIII reducirt sich XI zunächst auf

$$\text{XIV)} \quad \delta^2 U = 2 \cdot \delta y \cdot \delta z$$

Indem man jetzt mittelst V das δz aus XIV eliminirt, bekommt man wieder $\delta^2 U = -\frac{3}{2} \cdot \delta y^2$. Somit ist Alles, wie bei den zwei vorhergehenden Auflösungen.

Aufgabe 38.

Man sucht für y und z solche Functionen von x, dass der Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = g \cdot y + h \cdot z + \sqrt[3]{(ex - x^2)^4}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während noch die Bedingungsgleichung

$$\text{II)} \quad y^2 + z^2 = x^2$$

erfüllt werden soll.

Die beiden imaginären Formen des Radicals $\sqrt[3]{(ex - x^2)^4}$ dürfen nicht berücksichtigt werden, weil der herzustellende primäre Zustand reell sein muss.

Man führe die Aufgabe in der Weise durch, dass z als mittelbar mutabel betrachtet wird.

Erste Auflösung.

Man eliminire z vor dem Mutiren. Aus II ergibt sich $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, und I geht über in

$$\text{III)}\quad U = g \cdot y + h \cdot \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt[3]{(ex - x^2)^4}$$

Hinsichtlich des Radicals $\sqrt{x^2 - y^2}$ ist keine Einschränkung beigefügt; es muss also nach seiner positiven und negativen Bedeutung berücksichtigt werden. Aus Gleichung III folgt nun

$$\text{IV)}\quad \delta U = \frac{-hy + g \cdot \sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \delta y$$

Erstens. Aus $\frac{d_y U}{dy} = 0$ folgt $-hy + g \cdot \sqrt{x^2 - y^2} = 0$, und somit ist $y = \frac{gx}{\sqrt{g^2 + h^2}}$, $z = \frac{hx}{\sqrt{g^2 + h^2}}$, und $U' = x \cdot \sqrt{g^2 + h^2} + \sqrt[3]{(ex - x^2)^4}$. Unter diesen Umständen ist nur $\delta^2 U = -\frac{g^2 + h^2}{x^2} \cdot \left(x \cdot \sqrt{g^2 + h^2}\right) \cdot \delta y^2$. Ist nun $\left(x \cdot \sqrt{g^2 + h^2}\right)$ positiv, so ist $\delta^2 U$ negativ, und U' ein Maximnm-stand; ist aber $\left(x \cdot \sqrt{g^2 + h^2}\right)$ negativ, so ist $\delta^2 U$ positiv, und U' ein Minimum-stand.

Zweitens. Aus $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ folgt $\sqrt{x^2 - y^2} = 0$, also ist jetzt $y = \pm x$, und $z = 0$, d. h. z ist eine identische Function von x. Ferner ist $U' = \pm gx + \sqrt[3]{(ex - x^2)^4}$. Zur Prüfung setze man $(\pm x + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ statt y, und $\left(\pm gx + \sqrt[3]{(ex - y^2)^4} + \Delta U\right)$ statt U in Gleichung III überall ein, so bekommt man

$$\Delta U = g \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P}) + h \cdot \sqrt{\mp 2x \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P}) - (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^2}$$

Dieser Ausdruck kann vom Imaginären ins Reelle übergehen, und somit findet ein Gränz-stand statt. Denkt man sich $\varkappa$ im Momente des Verschwindens, und gibt man dem $(\varkappa \cdot \mathfrak{P})$ eine solche Bedeutung, dass ΔU reell wird; dann, aber auch nur dann, kann man ohne angebbaren Fehler $\Delta U = h \cdot \sqrt{\mp 2x \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P})}$ setzen. Ist nun das unendlichkleine und reelle ΔU positiv, so ist der Gränz-stand kleiner, als seine reellen Nachbarstände; ist aber das unendlichkleine und reelle ΔU negativ, so ist der Gränzstand grösser, als seine reellen Nachbarstände.

Zweite Auflösung.

Man mutire zuerst, und eliminire dann die mittelbaren Mutationscoefficienten auf directem Wege. Aus I folgt

$$\text{V)}\quad \delta U = g \cdot \delta y + h \cdot \delta z,\quad \text{VI)}\quad \delta^2 U = g \cdot \delta^2 y + h \cdot \delta^2 z, \text{ etc.}$$

Aus II aber folgt

$$\text{VII)}\quad y \cdot \delta y + z \cdot \delta z = 0,\quad \text{VIII)}\quad y \cdot \delta^2 y + z \cdot \delta^2 z + \delta y^2 + \delta z^2 = 0, \text{ etc.}$$

Eliminirt man jetzt δz und $\delta^2 z$, so gehen die Gleichungen V und VI über in

$$\text{IX)}\quad \delta U = \frac{gz - hy}{z} \cdot \delta y$$

$$\text{X)}\quad \delta^2 U = \frac{gz - hy}{z} \cdot \delta^2 y - \frac{h \cdot (y^2 + z^2)}{z^3} \cdot \delta y^2$$

Frstens. Man setze $\frac{d_y U}{dy} = 0$, so ist $gz - hy = 0$. Diese Gleichung, verbunden

mit I und II, liefert $y = \frac{gx}{\sqrt{g^2 + h^2}}$, $z = \frac{hx}{\sqrt{g^2 + h^2}}$ und $U' = x \cdot \sqrt{g^2 + h^2} + \sqrt[3]{(ex - x^2)^4}$.

Unter diesen Umständen geht Gleichung X über in $\delta^2 U = -\frac{g^2 + h^2}{x^2} \cdot \left(x \cdot \sqrt{g^2 + h^2}\right) \cdot \delta y^2$, wie schon bei der ersten Auflösung der Fall war.

Zweitens. Setzt man $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$, so folgt aus Gleichung IX, dass $z = 0$, d. h. dass z eine identische Function von x ist. Die Gleichung $z = 0$, verbunden mit I und II, liefert nun $y = \pm x$, und $U' = \pm gx + \sqrt[3]{(ex - x^2)^4}$. Zur Prüfung setze man vorerst $(\pm x + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ statt y, und $(0 + \Delta z)$ oder bloss $\mathfrak{Z}$ statt z in Gleichung II überall ein, so bekommt man (nach §. 46)

$$\pm 2x \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P}) + (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^2 + \mathfrak{Z}^2 = 0$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\mp 2x \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P}) - (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^2}$$

Führt man nun $\left(\sqrt{\mp 2x \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P}) - (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^2}\right)$ statt z, $(\pm x + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ statt y, und $\left(\pm g \cdot x + \sqrt[3]{(ex - x^2)^4} + \Delta U\right)$ statt U in Gleichung I überall ein, so gibt sich

$$\Delta U = g \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P}) + h \cdot \sqrt{\mp 2x \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{P}) - (\varkappa \cdot \mathfrak{P})^2}$$

wie bei der ersten Auflösung.

Dritte Auflösung.

Man eliminire die Mutationscoefficienten des z mittelst eines Multiplicators. Man multiplicire Gleichung VII mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{L}$ von x, so ist auch noch das Product $\mathfrak{L} \cdot (y \cdot \delta y + z \cdot \delta z) = 0$, und kann zu V addirt werden, ohne dass δU sich im Geringsten ändert. Vollzieht man die Addition, so bekommt man

$$\text{XI)} \quad \delta U = (g + \mathfrak{L}y) \cdot \delta y + (h + \mathfrak{L}z) \cdot \delta z$$

Man multiplicire auch Gleichung VIII mit derselben Function $\mathfrak{L}$ von x, so ist auch noch das Product $\mathfrak{L} \cdot (y \cdot \delta^2 y + z \cdot \delta^2 z + \delta y^2 + \delta z^2) = 0$, und kann zu VI addirt werden, ohne dass $\delta^2 U$ sich im Geringsten ändert. Vollzieht man die Addition, so bekommt man

$$\text{XII)} \quad \delta^2 U = (g + \mathfrak{L} \cdot y) \cdot \delta^2 y + (h + \mathfrak{L} \cdot z) \cdot \delta^2 z + \mathfrak{L} \cdot \delta y^2 + \mathfrak{L} \cdot \delta z^2$$

Da das mittelbare δz in Gleichung XI nicht vorkommen darf, so denke man sich unter $\mathfrak{L}$ eine solche Function von x, dass identisch stattfindet

$$\text{XIII)} \quad h + \mathfrak{L}z = 0$$

Gleichung XI redicirt sich also auf

$$\text{XIV)} \quad \delta U = (g + \mathfrak{L}y) \cdot \delta y$$

Erstens. Setzt man $\frac{d_y U}{dy} = 0$, so ist $g + \mathfrak{L} \cdot y = 0$. Diese Gleichung, verbunden mit II und XIII, liefert $\mathfrak{L} = -\frac{\sqrt{g^2 + h^2}}{x}$, $y = \frac{gx}{\sqrt{g^2 + h^2}}$, $z = \frac{hx}{\sqrt{g^2 + h^2}}$, $U' = x \cdot \sqrt{g^2 + h^2} + \sqrt[3]{(ex - x^2)^4}$. Unter diesen Umständen reducirt sich Gleichung XII auf $\delta^2 U = \mathfrak{L} \cdot (\delta y^2 + \delta z^2)$; und wenn man für $\mathfrak{L}$ und δz die Ausdrücke einführt, so bekommt man $\delta^2 U = -\frac{g^2 + h^2}{x^2} \cdot \left(x \cdot \sqrt{g^2 + h^2}\right) \cdot \delta y^2$, wie bei den zwei vorigen Auflösungen.

Zweitens. Aus Gleichung XIII folgt $\mathfrak{L} = -\frac{h}{z}$, und somit geht Gleichung XIV über in

$$\text{XV)}\quad \delta U = \frac{gz - hy}{z} \cdot \delta y$$

Will man nun $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ setzen, so muss $z = 0$, d. h. z muss eine identische Function von x sein. (Das Weitere ist wie bei der zweiten Auflösung.)

Aufgabe 39.

Es seien x, y, z die drei Winkel eines Dreiecks. Welche Functionen von x müssen dann y und z sein, wenn die Summe der Sinus der drei Winkel ein Maximum-stand werden soll?

Hier soll

$$\text{I)}\quad U = \sin x + \sin y + \sin z$$

ein Maximum-stand werden, während noch die Bedingung

$$\text{II)}\quad x + y + z = 2R$$

besteht, wo 2R zwei rechte Winkel bedeutet. Aus I folgt

$$\text{III)}\quad \delta U = \delta y \cdot \cos y + \delta z \cdot \cos z$$

$$\text{IV)}\quad \delta^2 U = \delta^2 y \cdot \cos y + \delta^2 z \cdot \cos z - \delta y^2 \cdot \sin y - \delta z^2 \cdot \sin z$$

Aus II folgt

$$\text{V)}\quad \delta y + \delta z = 0, \qquad \text{VI)}\quad \delta^2 y + \delta^2 z = 0, \text{ etc.}$$

Aus III und V folgt

$$\text{VII)}\quad \delta U = (\cos y - \cos z) \cdot \delta y$$

Aus IV, V und VI folgt ferner

$$\text{VIII)}\quad \delta^2 U = (\cos y - \cos z) \cdot \delta^2 y - (\sin y + \sin z) \cdot \delta y^2$$

Man setze $\frac{d_y U}{dy} = 0$, so folgt aus VII zunächst $\cos y = \cos z$, und daraus folgt im Allgemeinen $y = 4n \cdot R \pm z$, wo n Null oder irgend eine ganze Zahl bedeutet. Es müssen aber alle Winkel des Dreiecks positiv sein; und dieser Umstand, verbunden mit Gleichung II, gibt, dass $y = z$ sein muss. Sonach folgt aus Gleichung II weiter, dass $y = \frac{2R - x}{2}$ und $z = \frac{2R - x}{2}$.

Das Dreieck ist also gleichschenkelig.

Unter diesen Umständen reducirt sich Gleichung VIII auf $\delta^2 U = -2 \cdot (\sin y) \cdot \delta y^2$. Da nun y positiv und kleiner als zwei Rechte ist, so ist auch sin y positiv. Somit ist $\delta^2 U$ negativ, und $U' = \sin x + 2 \cdot \sin \frac{2R - x}{2}$ ein Maximum-stand.

Aufgabe 40.

Es seien x, y, z die drei Winkel eines Dreiecks. Welche Functionen von x müssen dann y und z sein, wenn das Product der Sinus aller drei Winkel ein Maximum-stand werden soll?

Hier soll

$$\text{I)}\quad U = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$$

ein Maximum-stand werden, während noch die Bedingung

$$\text{II)}\quad x + y + z = 2R$$

besteht, wo 2R zwei rechte Winkel bedeutet. Aus I folgt

$$\text{III)}\quad \delta U = (\sin x \cdot \cos y \cdot \sin z) \cdot \delta y + (\sin x \cdot \sin y \cdot \cos z) \cdot \delta z$$

$$\text{IV)}\quad \delta^2 U = (\sin x \cdot \cos y \cdot \sin z) \cdot \delta^2 y + (\sin x \cdot \sin y \cdot \cos z) \cdot \delta^2 z$$
$$- (\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z) \cdot \delta y^2 + 2 \cdot (\sin x \cdot \cos y \cdot \cos z) \cdot \delta y \cdot \delta z$$
$$- (\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z) \cdot \delta z^2$$

Aus II folgt.

$$\text{V)}\quad \delta y + \delta z = 0, \qquad \text{VI)}\quad \delta^2 y + \delta^2 z = 0, \text{ etc.}$$

Aus III und V ergibt sich

$$\text{VII)}\quad \delta U = \sin x \cdot (\cos y \cdot \sin z - \sin y \cdot \cos z) \cdot \delta y$$

oder

$$\text{VIII)}\quad \delta U = \sin x \cdot \sin (z - y) \cdot \delta y$$

Setzt man $\frac{d_y U}{dy} = 0$, so muss $z = y$ sein. Diese Gleichung, mit II verbunden, gibt auch hier $y = \frac{2R - x}{2}$ und $z = \frac{2R - x}{2}$, d. h.

Auch hier ist das Dreieck gleichschenkelig.

Unter diesen Umständen bleibt nur

$$\delta^2 U = -2 \cdot \sin x \cdot (\cos y \cdot \cos z + \sin y \cdot \sin z) \cdot \delta y^2$$
$$= -2 \cdot \sin x \cdot \cos (z - y) \cdot \delta y^2$$
$$= -2 \cdot (\sin x) \cdot \delta y^2$$

denn weil $z = y$, so ist $\cos (z - y) = 1$. Da nun $\delta^2 U$ immer negativ bleibt, so ist $U' = \sin x \cdot \left(\sin \frac{2R - x}{2}\right)^2$ ein Maximum-stand.

Aufgabe 41.

Es seien x, y, z die drei Winkel eines Dreiecks, und man sucht für y und z solche Functionen von x, und zugleich für x einen solchen Werth, dass die Summe der Sinus dieser drei Winkel ein Maximumwerth eines Maximum-standes wird.

Hier soll

$$\text{I)}\quad U = \sin x + \sin y + \sin z$$

ein Maximumwerth eines Maximum-standes werden, während noch die Bedingung

$$\text{II)}\quad x + y + z = 2R$$

besteht, wo 2R zwei rechte Winkel bedeutet.

Man führe die Aufgabe so durch, dass z als mittelbar mutabel betrachtet wird.

Erste Auflösung.

Man eliminire z vor dem Mutiren, so geht Gleichung I über in

$$\text{III)}\quad U = \sin x + \sin y + \sin (x + y)$$

Daraus folgt

$$\text{IV)}\quad {}_{(\delta)}U = [\cos y + \cos (x + y)] \cdot \delta y$$
$$+ \left[\cos x + \frac{dy}{dx} \cdot \cos y + \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) \cdot \cos (x + y)\right] \cdot \vartheta x$$

und

$$\text{V)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2U = [\cos y + \cos(x+y)] \cdot \delta^2 y - [\sin y + \sin(x+y)] \cdot \delta y^2$$
$$+ \left[\cos x + \frac{dy}{dx} \cdot \cos y + \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) \cdot \cos(x+y)\right] \cdot \vartheta^2 x$$
$$+ \left[- \sin x + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \cos y - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot \sin y + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \cos(x+y)\right.$$
$$\left. - \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot \sin(x+y)\right] \cdot \vartheta x^2$$

Aus Gleichung IV folgt zuerst die identische Gleichung

$$\text{VI)}\quad \cos y + \cos(x+y) = 0$$

und hierauf auch noch die nichtidentische Gleichung

$$\text{VII)}\quad \cos x + \frac{dy}{dx} \cdot \cos y + \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) \cdot \cos(x+y) = 0$$

Da nun die drei Winkel im Dreieck zusammen nur zwei Rechte betragen, so kann man Gleichung VI nur übergehen lassen in

$$\cos y - \cos(2R - x - y) = 0$$

woraus $y = \frac{2R - x}{2}$ folgt. Wenn man diesen Ausdruck in II einführt, so bekommt man auch $z = \frac{2R - x}{2}$. Nun ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$, und Gleichung VII geht über in $\cos x - \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{2R - x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{2R + x}{2} = 0$, oder in $\cos x - \cos \frac{2R - x}{2} = 0$, woraus $x = \frac{2R}{3}$ folgt. Es ist also auch $y = \frac{2R}{3}$ und $z = \frac{2R}{3}$, d. h.

Das gesuchte Dreieck ist das gleichseitige.

Da aber $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, so reducirt sich nach allem Vorhergehenden Gleichung V auf

$${}_{(}\delta_{)}^2U = -2 \cdot \left(\sin \frac{2R - x}{2}\right) \cdot \delta y^2 - \frac{3}{2} \cdot \left(\sin \frac{2R}{3}\right) \cdot \vartheta x^2$$

Da nun sowohl der mit dem Mutationscoefficient als auch der mit dem Differenzcoefficient versehene Theilsatz unter allen Umständen negativ bleibt, so ist $U'' = 3 \cdot \sin \frac{2R}{3}$ ein Maximumwerth eines Maximum-standes.

Zweite Auflösung.

Man mutire zuerst und eliminire die mittelbaren Mutationscoefficienten auf directem Wege. Aus I folgt zunächst

$$\text{VIII)}\quad {}_{(}\delta_{)}U = (\cos y) \cdot \delta y + (\cos z) \cdot \delta z + \left[\cos x + \frac{dy}{dx} \cdot \cos y + \frac{dz}{dx} \cdot \cos z\right] \cdot \vartheta x$$

und

$$\text{IX)}\quad {}_{(}\delta_{)}^2U = (\cos y) \cdot \delta^2 y + (\cos z) \cdot \delta^2 z - (\sin y) \cdot \delta y^2 - (\sin z) \cdot \delta z^2$$
$$+ \left[\cos x + \frac{dy}{dx} \cdot \cos y + \frac{dz}{dx} \cdot \cos z\right] \cdot \vartheta^2 x$$
$$+ \left[- \sin x + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \cos y - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot \sin y + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \cos z - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \cdot \sin z\right] \cdot \vartheta x^2$$

Aus II aber folgt

$$\text{X)}\quad \delta y + \delta z + \left(1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}\right) \cdot \vartheta x = 0$$

und

$$\text{XI)}\quad \delta^2 y + \delta^2 z + \left(1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}\right) \cdot \vartheta^2 x + \left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2z}{dx^2}\right) \cdot \vartheta x^2 = 0$$

Weil aber Gleichung II für jeden Werth des x gelten soll, so ist

$$\left(1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}\right) = 0,\ \left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0,\ \text{etc.}$$

und Gleichung X und XI reduciren sich auf

$$\text{XII)}\quad \delta y + \delta z = 0, \qquad \text{XIII)}\quad \delta^2 y + \delta^2 z = 0,\ \text{etc.}$$

Eliminirt man nun δz, so geht Gleichung VIII über in

$$\text{XIV)}\quad {}_{(\delta)}U = (\cos y - \cos z) \cdot \delta y + \left(\cos x + \frac{dy}{dx} \cdot \cos y + \frac{dz}{dx} \cdot \cos z\right) \cdot \vartheta x$$

Man hat also zunächst die identische Gleichung

$$\text{XV)}\quad \cos y - \cos z = 0$$

und hierauf hat man noch die nichtidentische Gleichung

$$\text{XVI)}\quad \cos x + \frac{dy}{dx} \cdot \cos y + \frac{dz}{dx} \cdot \cos z = 0$$

Aus XV und II bekommt man $y = \frac{2R - x}{2}$ und $z = \frac{2R - x}{2}$. Daraus folgt $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$ und $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2}$; die Gleichung XVI geht also über in $\cos x - \cos \frac{2R - x}{2} = 0$, und somit hat man $x = y = z = \frac{2R}{3}$, d. h.

Das gesuchte Dreieck ist das gleichseitige.

Da ferner $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ und $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$, so reducirt sich Gleichung IX auf

$${}_{(\delta)}^{\,2}U = -2 \cdot \left(\sin \frac{2R - x}{2}\right) \cdot \delta y^2 - \frac{3}{2} \cdot \left(\sin \frac{2R}{3}\right) \cdot \vartheta x^2$$

Also Alles, wie bei der ersten Auflösung.

Dritte Auflösung.

Man eliminire die mittelbaren Mutationscoefficienten mittelst eines Multiplicators. Zu diesem Ende verwandle man Gleichung II in die identische $x + y + z - 2R = 0$, und multiplicire diese Gleichung mit einer (vorerst unbestimmten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{L}$ von x; so hat man das Product $\mathfrak{L} \cdot (x + y + z - 2R) = 0$. Dieses Product kann man zu Gleichung I addiren, ohne dass dadurch das U geändert wird; und man bekommt

$$U = \sin x + \sin y + \sin z + \mathfrak{L} \cdot (x + y + z - 2R)$$

Mutirt man, so gibt sich

$$\begin{aligned} {}_{(\delta)}U &= (\mathfrak{L} + \cos y) \cdot \delta y + (\mathfrak{L} + \cos z) \cdot \delta z \\ &+ \left[\cos x + \frac{dy}{dx} \cdot \cos y + \frac{dz}{dx} \cdot \cos z + \frac{1}{dx} \cdot d(\mathfrak{L} \cdot (x + y + z - 2R))\right] \cdot \vartheta x \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} {}_{(\delta)}^{\,2}U &= (\mathfrak{L} + \cos y) \cdot \delta^2 y + (\mathfrak{L} + \cos z) \cdot \delta^2 z - (\sin y) \cdot \delta y^2 - (\sin z) \cdot \delta z^2 \\ &+ \left[\cos x + \frac{dy}{dx} \cdot \cos y + \frac{dz}{dx} \cdot \cos z + \frac{1}{dx} \cdot d(\mathfrak{L} \cdot (x + y + z - 2R))\right] \cdot \vartheta^2 x \end{aligned}$$

$$+ \left[- \sin x + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \cos y - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot \sin y + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \cos z - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \cdot \sin z \right.$$

$$\left. + \frac{1}{dx^2} \cdot d^2(\mathfrak{L} \cdot (x + y + z - 2R)) \right] \cdot \vartheta x^2$$

Weil aber $x + y + z - 2R = 0$ eine identische Gleichung ist, so ist auch $\frac{1}{dx} \cdot d(\mathfrak{L}(x + y + z - 2R)) = 0$, $\frac{1}{dx^2} \cdot d^2(\mathfrak{L} \cdot (x + y + z - 2R)) = 0$ etc. Es bleibt also zunächst nur

$$(\delta)U = (\mathfrak{L} + \cos y) \cdot \delta y + (\mathfrak{L} + \cos z) \cdot \delta z + \left(\cos x + \frac{dy}{dx} \cdot \cos y + \frac{dz}{dx} \cdot \cos z\right) \cdot \vartheta x$$

Da nun in dem Ausdrucke für $(\delta)U$ das mittelbare δz nicht vorkommen darf, so denke man sich unter $\mathfrak{L}$ eine solche Function von x, dass identisch stattfindet

$$\text{XVII)} \quad \mathfrak{L} + \cos z = 0$$

Es bleibt also nur

$$(\delta)U = (\mathfrak{L} + \cos y) \cdot \delta y + \left(\cos x + \frac{dy}{dx} \cdot \cos y + \frac{dz}{dx} \cdot \cos z\right) \cdot \vartheta x$$

Daraus folgt zunächst die identische Gleichung

$$\text{XVIII)} \quad \mathfrak{L} + \cos y = 0$$

und sodann die nichtidentische Gleichung

$$\text{XIX)} \quad \cos x + \frac{dy}{dx} \cdot \cos y + \frac{dz}{dx} \cdot \cos z = 0$$

Aus XVII folgt $\mathfrak{L} = -\cos z$; aus II und XVIII folgt $y = \frac{2R - x}{2}$ und $z = \frac{2R - x}{2}$; und sonach folgt aus XIX $x = y = z = \frac{2R}{3}$, d. h.

Das gesuchte Dreieck ist das gleichseitige.

Da nun $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$, so reducirt sich unter Berücksichtigung alles Vorhergehenden $(\delta)^2U$ auf

$$(\delta)^2U = -(\sin y) \cdot \delta y^2 - (\sin z) \cdot \delta z^2 - \left[\sin x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot \sin y + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \cdot \sin z\right] \cdot \vartheta x^2$$

Aus XII folgt aber $\delta z = -\delta y$, und führt man noch für $\sin y$, $\sin z$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ die Ausdrücke ein, so bekommt man

$$(\delta)^2U = -2 \cdot \left(\sin \frac{2R - x}{2}\right) \cdot \delta y^2 - \frac{3}{2} \cdot \left(\sin \frac{2R}{3}\right) \cdot \vartheta x^2$$

Also Alles, wie bei den zwei vorigen Auflösungen.

Aufgabe 42.

Man sucht für z und v solche Functionen von x und y, dass der Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = gy + hz + kv + \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während noch die Bedingungsgleichung

$$\text{II)} \quad y^2 + z^2 + v^2 = x^2$$

erfüllt werden soll.

Um die Multiplicatorenmethode anzuwenden, forme man Gleichung II in folgende identische um

$$\text{III)}\quad z^2 + v^2 + y^2 - x^2 = 0$$

Diese Gleichung muss von jedem beliebigen Werthe des x und von jedem beliebigen Werthe des y erfüllt werden. Man multiplicire nun Gleichung III mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{L}$ von x und y, und addire dieses Product zu Gleichung I; so ist noch vollkommen genau

$$\text{IV)}\quad U = gy + hz + kv + \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} + \mathfrak{L} \cdot (z^2 + v^2 + y^2 - x^2)$$

Mutirt man nun, so bekommt man

$$\text{V)}\quad \delta U = (h + 2\mathfrak{L}z) \cdot \delta z + (k + 2\mathfrak{L}v) \cdot \delta v$$

$$\text{VI)}\quad \delta^2 U = (h + 2\mathfrak{L}z) \cdot \delta^2 z + (k + 2\mathfrak{L}v) \cdot \delta^2 v + 2\mathfrak{L} \cdot (\delta z^2 + \delta v^2)$$

Behandelt man nun v als das mittelbar mutable Element, so hat man sich unter $\mathfrak{L}$ eine solche Function von x und y zu denken, dass für jeden Werth des x und für jeden Werth des y stattfindet

$$\text{VII)}\quad k + 2\mathfrak{L}v = 0$$

Gleichung V reducirt sich also auf

$$\text{VIII)}\quad \delta U = (h + 2\mathfrak{L}z) \cdot \delta z$$

Erstens. Setzt man $\frac{d_z U}{dz} = 0$, so muss noch für jeden Werth des x und für jeden Werth des y stattfinden

$$\text{IX)}\quad h + 2\mathfrak{L}z = 0$$

Aus den Gleichungen I, II, VII und IX folgt nun

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{h^2 + k^2}{x^2 - y^2}},\; z = h \cdot \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{h^2 + k^2}},\; v = k \cdot \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{h^2 + k^2}}$$

und

$$U' = gy + \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} + \sqrt{(h^2 + k^2) \cdot (x^2 - y^2)}.$$

Unter diesen Umständen reducirt sich Gleichung VI auf

$$\delta^2 U = 2\mathfrak{L} \cdot (\delta z^2 + \delta v^2) = -\frac{1}{x^2 - y^2} \cdot \left(\sqrt{(h^2 + k^2) \cdot (x^2 - y^2)}\right) \cdot (\delta z^2 + \delta v^2)$$

Nun folgt aber aus Gleichung II, dass $\delta v = -\frac{z}{v} \cdot \delta z = -\frac{h}{k} \cdot \delta z$; und sonach ist

$$\delta^2 U = -\frac{h^2 + k^2}{k^2 \cdot (x^2 - y^2)} \cdot \left(\sqrt{(h^2 + k^2) \cdot (x^2 - y^2)}\right) \cdot \delta z^2$$

Da nun $(x^2 - y^2)$ positiv sein muss, weil sonst z und v imaginär wären; so ist $\delta^2 U$ negativ, wenn das Radical seine positive Bedeutung hat, und U ein Maximum-stand; dagegen ist $\delta^2 U$ positiv, wenn das Radical seine negative Bedeutung hat, und U ein Minimum-stand.

Zweitens. Aus Gleichung VII folgt $\mathfrak{L} = -\frac{k}{2v}$; Gleichung VIII geht also über in $\delta U = \frac{hv - kz}{v} \cdot \delta z$. Man sehe nun zu, was sich ergibt, wenn man $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$ setzt. Dabei ist $v = 0$, d. h. v ist eine identische Function von x und y. Gleichung II reducirt sich dabei auf $y^2 + z^2 = x^2$, d. h. es ist $z = \sqrt{x^2 - y^2}$. Ferner ist $U' = gy + h \cdot \sqrt{x^2 - y^2} + \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2}$. Zur Prüfung setze man $\left(\sqrt{x^2 - y^2} + \varkappa \cdot \mathfrak{D}\right)$ statt z, und $(0 + \Delta v)$ oder bloss $\mathfrak{B}$ statt v in Gleichung II ein, so bekommt man (§. 46)

$$\left(2 \cdot \sqrt{x^2 - y^2}\right) \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} + (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^2 + \mathfrak{B}^2 = 0$$

Somit ist

$$\mathfrak{B} = \sqrt{-\left(2 \cdot \sqrt{x^2 - y^2}\right) \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q}) - (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^2}$$

Macht man nun in Gleichung I die gewöhnlichen Substitutionen, so bekommt man

$$\Delta U = h \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q}) + k \cdot \sqrt{-\left(2 \cdot \sqrt{x^2 - y^2}\right) \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q}) - (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^2}$$

Da nun ΔU vom Imaginären ins Reelle übergeht, so findet diesmal ein Gränz-stand statt. Denkt man sich jetzt $\varkappa$ im Momente des Verschwindens, und gibt man dem Ausdrucke $\varkappa \cdot \mathfrak{Q}$ eine solche Bedeutung, dass ΔU reell wird; dann, aber auch nur dann, kann man ohne angebbaren Fehler $\Delta U = k \cdot \sqrt{-2 \cdot \left(\sqrt{x^2 - y^2}\right) \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})}$ setzen. Ist nun dieses unendlichkleine und reelle ΔU positiv, so ist der Gränz-stand kleiner, als seine reellen Nachbarzustände; ist aber das unendlichkleine und reelle ΔU negativ, so ist der Gränz-stand grösser, als seine reellen Nachbarzustände.

Aufgabe 43.

Man sucht für y, z und v solche Functionen von x, dass der Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = g \cdot y + h \cdot z + k \cdot v + \frac{x^2}{1 + x^2}$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während noch die Bedingungsgleichung

$$\text{II)} \quad y^2 + z^2 + v^2 = x^2$$

erfüllt werden soll.

Um die Multiplicatorenmethode anzuwenden, forme man Gleichung II in folgende identische um

$$\text{III)} \quad y^2 + z^2 + v^2 - x^2 = 0$$

vervielfache diese identische Gleichung mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{L}$ von x, und addire das Product zu I; so ist noch vollkommen genau

$$\text{IV)} \quad U = g \cdot y + h \cdot z + k \cdot v + \frac{x^2}{1 + x^2} + \mathfrak{L} \cdot (y^2 + z^2 + v^2 - x^2)$$

Mutirt man nun, so bekommt man

$$\text{V)} \quad \delta U = (g + 2\mathfrak{L}y) \cdot \delta y + (h + 2\mathfrak{L}z) \cdot \delta z + (k + 2\mathfrak{L}v) \cdot \delta v$$

$$\text{VI)} \quad \delta^2 U = (g + 2\mathfrak{L}y) \cdot \delta^2 y + (h + 2\mathfrak{L}z) \cdot \delta^2 z + (k + 2\mathfrak{L}v) \cdot \delta^2 v + 2\mathfrak{L} \cdot (\delta y^2 + \delta z^2 + \delta v^2)$$

Betrachtet man v als das mittelbar mutable Element, so hat man sich unter $\mathfrak{L}$ eine solche Function von x zu denken, dass die identische Gleichung

$$\text{VII)} \quad k + 2\mathfrak{L}v = 0$$

stattfindet. Gleichung V reducirt sich also auf

$$\text{VIII)} \quad \delta U = (g + 2\mathfrak{L}y) \cdot \delta y + (h + 2\mathfrak{L}z) \cdot \delta z$$

Erstens. Setzt man $\frac{d_y U}{dy} = 0$ und $\frac{d_z U}{dz} = 0$, so müssen die beiden identischen Gleichungen

$$\text{IX)} \quad g + 2\mathfrak{L}y = 0 \text{ und X) } h + 2\mathfrak{L}z = 0$$

stattfinden. Aus den Gleichungen I, II, VII, IX, X folgt $\mathfrak{L} = -\frac{\sqrt{g^2 + h^2 + k^2}}{2x}$

$y = \frac{g \cdot x}{\sqrt{g^2 + h^2 + k^2}}$, $z = \frac{h \cdot x}{\sqrt{g^2 + h^2 + k^2}}$, $v = \frac{k \cdot x}{\sqrt{g^2 + h^2 + k^2}}$, und $U' = \frac{x^2}{1 + x^2} + x \cdot \sqrt{g^2 + h^2 + k^2}$.

Unter diesen Umständen bleibt nur

$$\delta^2 U = 2\mathfrak{L} \cdot (\delta y^2 + \delta z^2 + \delta v^2) = -\frac{g^2 + h^2 + k^2}{x^2} \cdot \left(x \cdot \sqrt{g^2 + h^2 + k^2}\right) \cdot (\delta y^2 + \delta z^2 + \delta v^2)$$

Es ist nicht nöthig, für δv den Ausdruck einzuführen, da man ohnehin sieht, dass δv^2 nur positiv sein kann. Legt man nun dem Producte $x \cdot \sqrt{g^2 + h^2 + k^2}$ seine positive Bedeutung bei, so ist U' ein Maximum-stand; legt man aber dem Producte $x \cdot \sqrt{g^2 + h^2 + k^2}$ seine negative Bedeutung bei, so ist U' ein Minimum-stand.

Zweitens. Aus Gleichung VII folgt $\mathfrak{L} = -\frac{k}{2v}$, und sonach geht Gleichung VIII über in

$$\text{XI)} \quad \delta U = \frac{gv - ky}{v} \cdot \delta y + \frac{hv - kz}{v} \cdot \delta z$$

Man sehe nun zu, was sich ergibt, wenn man $\frac{d_y U}{dy} = \frac{\mathfrak{A}}{0}$ und $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$ setzt. Dabei ist $v = 0$, d. h. v ist eine identische Function von x. Gleichung II reducirt sich also auf $y^2 + z^2 = x^2$, wo entweder für y oder für z eine willkürliche Function von x gesetzt werden kann. Nimmt man y als willkürliche Function, so ist $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ und $U' = \frac{x^2}{1 + x^2} + g \cdot y + h \cdot \sqrt{x^2 - y^2}$. Zur Prüfung setze man $(y + \varkappa \cdot \mathfrak{P})$ statt y, $\left(\sqrt{x^2 - y^2} + \varkappa \cdot \mathfrak{Q}\right)$ statt z, und $(0 + \Delta v)$ oder blos $\mathfrak{B}$ statt v in Gleichung II ein; so bekommt man (§. 46)

$$2 \cdot \left(y \cdot \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} \cdot \sqrt{x^2 - y^2}\right) \cdot \varkappa + (\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2) \cdot \varkappa^2 + \mathfrak{B}^2 = 0$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{B} = \sqrt{-2 \cdot \left(y \cdot \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} \cdot \sqrt{x^2 - y^2}\right) \cdot \varkappa - (\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2) \cdot \varkappa^2}$$

Macht man nun in Gleichung I die gewöhnlichen Substitutionen, so bekommt man

$$\Delta U = \varkappa \cdot (g \cdot \mathfrak{P} + h \cdot \mathfrak{Q}) + k \cdot \sqrt{-2 \cdot \left(y \cdot \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} \cdot \sqrt{x^2 - y^2}\right) \cdot \varkappa - (\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2) \cdot \varkappa^2}$$

Daran erkennt man, dass man die willkürliche Function y niemals so annehmen kann, dass ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet. Da nun ΔU vom Imaginären ins Reelle übergeht, so findet ein Gränz-stand statt, man mag für y was immer für eine Function von x annehmen. Denkt man sich nun $\varkappa$ im Momente des Verschwindens, und gibt man den Ausdrücken $(\varkappa \cdot \mathfrak{P})$ und $(\varkappa \cdot \mathfrak{Q})$ zusammen die Eigenschaften, dass ΔU reell wird; dann, aber auch nur dann, kann man ohne angebbaren Fehler $\Delta U = k \cdot \sqrt{-2\left(y \cdot \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} \cdot \sqrt{x^2 - y^2}\right) \cdot \varkappa}$ setzen. Ist nun das unendlichkleine und reelle ΔU positiv, so ist der Gränz-stand kleiner als seine reellen Nachbarzustände; ist aber das unendlichkleine und reelle ΔU negativ, so ist der Gränz-stand grösser, als seine reellen Nachbarzustände.

Aufgabe 44.

Man sucht für y, z und v solche Functionen von x, dass das Product

$$\text{I)} \quad U = yzv$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während noch

$$\text{II)} \quad z + y = x \quad \text{und} \quad \text{III)} \quad v - y = x$$

als Bedingungsgleichungen bestehen.

Die Aufgabe wird am bequemsten durchgeführt, wenn man z und v als mittelbar mutabel behandelt.

Erste Auflösung.

Man eliminire z und v vor dem Mutiren, so wird

$$U = y \cdot (x + y) \cdot (x - y)$$

Daraus folgt

$$\delta U = (x^2 - 3y^2) \cdot \delta y$$

und

$$\delta^2 U = (x^2 - 3y^2) \cdot \delta^2 y - 6 \cdot y \cdot \delta y^2$$

Aus $\frac{d_y U}{dy} = 0$ folgt $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$; also ist $z = \frac{x}{3} \cdot (3 - \sqrt{3})$, $v = \frac{x}{3} \cdot (3 + \sqrt{3})$, $U' = \frac{2 \cdot x^3}{3 \cdot \sqrt{3}}$, und $\delta^2 U = -\frac{6 \cdot x}{\sqrt{3}} \cdot \delta y^2$.

Da die für $\delta^2 U$ und U' hergestellten Ausdrücke das zweideutige Radical $\sqrt{3}$ als gemeinschaftlichen Factor bekommen haben; so entscheidet man sich (nach §. 114. γ. 2. a) auf folgende Weise:

α) Hat das Radical die Bedeutung, bei welcher $\delta^2 U$ negativ ist, so ist U' positiv; und dabei findet ein Maximum-stand statt.

β) Hat das Radical die Bedeutung, bei welcher $\delta^2 U$ positiv ist, so ist U' negativ; und dabei findet ein Minimum-stand statt, jedoch in dem Sinne, dass ein negativer Ausdruck für desto kleiner gilt, je weiter sein Werth von Null absteht.

Zweite Auflösung.

Man mutire zuerst, und eliminire dann die mittelbaren Mutationscoefficienten auf directem Wege. Aus I folgt

$$\text{IV)} \quad \delta U = yz \cdot \delta v + yv \cdot \delta z + vz \cdot \delta y$$

und

$$\text{V)} \quad \delta^2 U = yz \cdot \delta^2 v + yv \cdot \delta^2 z + vz \cdot \delta^2 y + 2y \cdot \delta v \cdot \delta z + 2z \cdot \delta v \cdot \delta y + 2v \cdot \delta y \cdot \delta z$$

Aus II folgt

$$\text{VI)} \quad \delta z + \delta y = 0, \text{ und} \qquad \text{VII)} \quad \delta^2 z + \delta^2 y = 0$$

Aus III folgt

$$\text{VIII)} \quad \delta v - \delta y = 0, \text{ und} \qquad \text{IX)} \quad \delta^2 v - \delta^2 y = 0$$

Aus IV, VI und VIII folgt also

$$\delta U = (yz + vz - yv) \cdot \delta y$$

und aus V, VI, VII, VIII und IX folgt

$$\delta^2 U = (yz + vz - yv) \cdot \delta^2 y - 6y \cdot \delta y^2$$

Im Falle des Grössten und Kleinsten ist $\frac{d_y U}{dy} = 0$, d. h. es ist

$$\text{X)} \quad yz + vz - vy = 0$$

Dabei ist nur $\delta^2 U = -6y \cdot \delta y^2$. Die Gleichungen I, II, III und X dienen nun dazu, um y, z, v und U zu bestimmen; und man bekommt Alles, wie vorher.

Dritte Auflösung.

Man eliminire die mittelbaren Mutationscoefficienten δz und δv mittelst Multiplicatoren. Man multiplicire Gleichung VI mit einer (vorerst unbekannten, aber jedenfalls) nicht-

mutablen Function $\mathfrak{L}$ von x, so hat man $\mathfrak{L} \cdot (\delta y + \delta z) = 0$. Man multiplicire auch Gleichung VIII mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{M}$ von x, so hat man $\mathfrak{M} \cdot (\delta v - \delta y) = 0$. Diese beiden Gleichungen addire man zu Gleichung IV, so ändert sich δU nicht im Geringsten; und man hat

$$\delta U = yz \cdot \delta v + yv \cdot \delta z + vz \cdot \delta y + \mathfrak{L} \cdot (\delta y + \delta z) + \mathfrak{M} \cdot (\delta v - \delta y)$$

oder

$$\text{XI)} \quad \delta U = (yz + \mathfrak{M}) \cdot \delta v + (yv + \mathfrak{L}) \cdot \delta z + (vz + \mathfrak{L} - \mathfrak{M}) \cdot \delta y$$

Da nun in dem Ausdrucke für δU weder δv noch δz vorkommen dürfen, so denke man sich unter $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{L}$ solche Functionen von x, dass identisch stattfindet

$$\text{XII)} \quad yz + \mathfrak{M} = 0, \text{ und XIII)} \quad yv + \mathfrak{L} = 0$$

Also ist nur $\delta U = (vz + \mathfrak{L} - \mathfrak{M}) \cdot \delta y$. Da aber $\frac{d_y U}{dy} = 0$ werden muss, so hat man auch noch die weitere identische Gleichung

$$\text{XIV)} \quad vz + \mathfrak{L} - \mathfrak{M} = 0$$

Aus den Gleichungen I, II, III, XII, XIII, XIV folgt nun $\mathfrak{L} = -\frac{x^2}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot (3 + \sqrt{3})$, $\mathfrak{M} = -\frac{x^2}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot (3 - \sqrt{3})$, und für y, z, v und U ergibt sich das Gleiche, wie bei der ersten Auflösung. Wenn man nun Gleichung XI abermals mutirt, und dabei berücksichtigt, dass $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ nichtmutable Functionen sind; so bekommt man

$$\delta^2 U = (yz + \mathfrak{M}) \cdot \delta^2 v + (yv + \mathfrak{L}) \cdot \delta^2 z + (vz + \mathfrak{L} - \mathfrak{M}) \cdot \delta^2 y$$
$$+ 2y \cdot \delta v \cdot \delta z + 2z \cdot \delta v \cdot \delta y + 2v \cdot \delta z \cdot \delta y$$

Nach allem Vorhergehenden reducirt sich aber dieser Ausdruck auf $\delta^2 U = -6y \cdot \delta y^2$. Es ist also auch jetzt Alles, wie bei der ersten Auflösung.

Aufgabe 45.

Welches unter allen Dreiecken, die denselben bestimmt gegebenen Umfang m haben, und bei denen man eine Seite nach Willkür nimmt, schliesst den grössten Flächeninhalt ein?

Wenn die drei Seiten eines Dreieckes durch x, y, z dargestellt werden, so ist bekanntlich dessen Inhalt

$$\text{I)} \quad U = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(x + y + z) \cdot (x + y - z) \cdot (x - y + z) \cdot (-x + y + z)}$$

Hier hat man, eben weil kein Grund vorhanden ist, warum des Dreiecks Inhalt negativ sein sollte, das Radical nur nach seiner positiven Bedeutung genommen; und diese Bedeutung muss ihm durch die ganze Aufgabe bleiben. Die Bedingung der Aufgabe verlangt noch, dass unter allen Umständen die Gleichung

$$\text{II)} \quad x + y + z = m$$

erfüllt werde. Auch hat man durch die ganze Aufgabe festzuhalten, dass bei jedem Dreiecke zwei Seiten zusammen grösser sind, als die dritte. Wenn nun y und z als die mutablen Elemente behandelt werden sollen, also der Werth des x willkürlich ist; so muss man dennoch immer $x < \frac{m}{2}$ nehmen, weil $x < (y + z)$ sein muss.

Erste Auflösung.

Man betrachte z als mittelbar mutabel, und eliminire es schon vor dem Mutiren. Aus II folgt $z = m - x - y$, und I geht über in

$$\text{III)}\quad U = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{m \cdot (2x + 2y - m) \cdot (m - 2x) \cdot (m - 2y)}$$

Die Auflösung wird bequemer durchgeführt, wenn man diese Gleichung in folgende verwandelt

$$\text{IV)}\quad 16\, U^2 = m \cdot (2x + 2y - m) \cdot (m - 2x) \cdot (m - 2y)$$

Daraus folgt

$$\text{V)}\quad 32 \cdot U \cdot \delta U = 4m \cdot (m - 2x) \cdot (m - x - 2y) \cdot \delta y$$

und

$$\text{VI)}\quad 32 \cdot U \cdot \delta^2 U + 32 \cdot \delta U^2 = 4m \cdot (m - 2x) \cdot (m - x - 2y) \cdot \delta^2 y$$
$$- 8m \cdot (m - 2x) \cdot \delta y^2$$

Hier kann man nur $\frac{d_y U}{dy} = 0$ setzen; und aus V folgt

$$\text{VII)}\quad m - x - 2y = 0$$

Es ist also $y = \frac{m - x}{2}$, und $z = m - x - y = \frac{m - x}{2}$, d. h.

Das gesuchte Dreieck ist das gleichschenkelige.

Man hat nun $U' = \frac{x}{4} \cdot \sqrt{m \cdot (m - 2x)}$; und wegen VII reducirt sich VI auf $32 \cdot U \cdot \delta^2 U = - 8m \cdot (m - 2x) \cdot \delta y^2$, und daraus folgt

$$\delta^2 U = - \frac{m \cdot (m - 2x)}{4 \cdot U} \cdot \delta y^2 = - \frac{1}{x} \cdot \left[\sqrt{m(m - 2x)}\right] \cdot \delta y^2$$

Da in Gleichung I das Radical nur als positiv vorausgesetzt ist, so kann man es auch in letzterer Gleichung nur als positiv nehmen. Dabei ist $\delta^2 U$ negativ, und es findet ein Maximum-stand statt.

Zweite Auflösung.

Man mutire zuerst, und eliminire dann die mittelbaren Mutationscoefficienten. Aus Gleichung II folgt

$$\text{VIII)}\quad \delta z = - \delta y, \qquad \text{IX)}\quad \delta^2 z = - \delta^2 y, \text{ etc.}$$

Ferner forme man der Bequemlichkeit wegen die Gleichung I in folgende um

$$\text{X)}\quad 16\, U^2 = (x + y + z) \cdot (x + y - z) \cdot (x - y + z) \cdot (- x + y + z)$$

oder

$$\text{XI)}\quad 16\, U^2 = 2x^2 \cdot y^2 + 2x^2 \cdot z^2 + 2y^2 \cdot z^2 - x^4 - y^4 - z^4$$

Daraus folgt

$$\text{XII)}\quad 32 \cdot U \cdot \delta U = 4y \cdot (x^2 + z^2 - y^2) \cdot \delta y + 4z \cdot (x^2 + y^2 - z^2) \cdot \delta z$$

und

$$\text{XIII)}\quad 32 \cdot U \cdot \delta^2 U + 32 \cdot \delta U^2 = 4y \cdot (x^2 + z^2 - y^2) \cdot \delta^2 y + 4z \cdot (x^2 + y^2 - z^2) \cdot \delta^2 z$$
$$+ 4 \cdot (x^2 + z^2 - 3y^2) \cdot \delta y^2 + 16yz \cdot \delta y \cdot \delta z + 4 \cdot (x^2 + y^2 - 3z^2) \cdot \delta z^2$$

Eliminirt man jetzt δz aus XII, so bekommt man

$$\text{XIV)}\quad 32U \cdot \delta U = 4 \cdot (x + y + z) \cdot (x - y - z) \cdot (y - z) \cdot \delta y$$

Hier wird $\frac{d_y U}{dy} = 0$ entweder wenn $x - y - z = 0$ oder wenn $y - z = 0$. Setzt man $x - y - z = 0$, so bekommt man $y + z = x$, d. h. zwei Seiten eines Dreieckes zusammen wären nicht grösser als die dritte; man kann also nicht $x - y - z = 0$ setzen. Setzt man aber $y - z = 0$, so bekommt man $y = z$, d. h.

Das gesuchte Dreieck ist das gleichschenkelige.

Indem man nun die Gleichungen $x + y + z = m$ und $y - z = 0$ miteinander verbindet, bekommt man wieder $y = \frac{m - x}{2}$ und $z = \frac{m - x}{2}$. Eliminirt man jetzt δz und $\delta^2 z$ aus Gleichung XIII, so reducirt sie sich auf

$$32 \cdot U \cdot \delta^2 U = - 8(y + z + x) \cdot (y + z - x) \cdot \delta y^2$$

und daraus folgt

$$\delta^2 U = - \frac{(y + z + x) \cdot (y + z - x)}{4U} \cdot \delta y^2 = - \frac{1}{x} \cdot [\sqrt{m(m - 2x)}] \cdot \delta y^2$$

Es ist also Alles wie bei der ersten Auflösung.

Unter allen Dreiecken, welche den gegebenen Umfang m und eine nach Belieben gewählte Seite x haben, schliesst also dasjenige den grössten Inhalt ein, wo jede der beiden andern Seiten gleich ist dem halben Unterschiede des Umfangs und der bereits nach Belieben gewählten Seite.

Aufgabe 46.

Welches unter allen Dreiecken, die einerlei aber einen nichtgegebenen Umfang haben, und bei denen man eine Seite nach Willkür nimmt, schliesst den grössten Flächeninhalt ein?

Hier soll wieder, wie in voriger Aufgabe,

$$\text{I)}\quad U = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(x + y + z) \cdot (x + y - z) \cdot (x - y + z) \cdot (- x + y + z)}$$

ein Maximum-stand werden, während die Summe

$$\text{II)}\quad x + y + z$$

beständig denselben aber nichtgegebenen Werth behält.

Erste Auflösung.

Man stelle den wenn gleich nichtgegebenen Umfang des Dreiecks dar durch m, so dass sich

$$\text{III)}\quad x + y + z = m$$

ergibt. Wie in der ersten Auflösung der vorigen Aufgabe verfahrend bekommt man auch jetzt

$$\text{IV)}\quad y = \frac{m - x}{2},\quad \text{V)}\quad z = \frac{m - x}{2},\quad \text{VI)}\quad U' = \frac{x}{4} \cdot \sqrt{m \cdot (m - 2x)}$$

und

$$\text{VII)}\quad \delta^2 U = - \frac{1}{x} \cdot [\sqrt{m \cdot (m - 2x)}] \cdot \delta y^2$$

Das der Aufgabe ganz fremdartige Hilfselement m muss nun noch eliminirt werden. Nimmt man Gleichung III hierzu, so gehen IV, V, VI, VII bezüglich über in

$$\text{VIII)}\quad y = z,\quad \text{IX)}\quad y = z,\quad \text{X)}\quad U' = \frac{x}{4} \cdot \sqrt{(x + y + z) \cdot (y + z - x)}$$

und

$$\text{XI)}\quad \delta^2 U = - \frac{1}{x} \cdot \sqrt{(x + y + z) \cdot (y + z - x)} \cdot \delta y^2$$

Da aber keine weitere Gleichung mehr gegeben ist, woraus sich bestimmen liesse, was y und z für Functionen von x sind; so kann man für z jede beliebige Function von x

wählen. Diese für z gewählte Function muss man dann auch für y nehmen. Da ferner in Gleichung I das Radical nur als positiv vorausgesetzt ist, so ist auch in Gleichung XI das Radical nur als positiv zu nehmen. Somit ist $\delta^2 U$ negativ, und es findet ein Maximum-stand statt.

Zweite Auflösung.

Man mutire zuerst, und eliminire dann die mittelbaren Mutationscoefficienten. Damit der Ausdruck in II immer den gleichen Werth behalte, so muss

XII) $\delta y + \delta z = 0$, XIII) $\delta^2 y + \delta^2 z = 0$, d. h. es muss $\delta z = -\delta y$, $\delta^2 z = -\delta^2 y$

etc. etc. sein. Der Bequemlichkeit wegen forme man Gleichung I um in

XIII) $16 \cdot U^2 = (x + y + z) \cdot (x + y - z) \cdot (x - y + z) \cdot (-x + y + z)$

Man mutire, und eliminire δz, so bekommt man

XIV) $32 \cdot U \cdot \delta U = 4 \cdot (x + y + z) \cdot (x - y - z) \cdot (y - z) \cdot \delta y$

Nun kann nicht $x - y - z = 0$ sein, weil daraus $x = y + z$ folgen würde, d. h. eine Seite eines Dreiecks den beiden andern Seiten gleich wäre. Es kann also nur $y - z = 0$, d. h. es kann nur

$$\text{XV)}\quad y = z$$

sein, wie bei der ersten Auflösung. Mutirt man noch einmal, und eliminirt man δz und $\delta^2 z$; so bekommt man $\delta^2 U = -\frac{1}{x} \cdot \left(\sqrt{(x + y + z) \cdot (y + z - x)}\right) \cdot \delta y^2$. Ferner ist $U' = \frac{x}{4} \cdot \sqrt{(x + y + z) \cdot (y + z - x)}$, und es findet ein Maximum-stand statt. Da aber auch jetzt keine weitere Gleichung gegeben ist, woraus sich bestimmen liesse, was y und z für Functionen von x sind; so kann man für z jede beliebige Function von x wählen. Diese für z gewählte Function muss man dann auch für y nehmen. Es ist also alles wie bei der ersten Auflösung.

Unter allen Dreiecken, welche eine nach Belieben gewählte Seite miteinander gemeinschaftlich haben, und denen man einerlei Umfang zudenkt, schliesst also dasjenige, dessen beide andere Seiten einander gleich sind, den grössten Inhalt ein.

Aufgabe 47.

Man sucht für y und z solche Functionen von x, dass der Ausdruck

$$U = x^2 + y^2 + z^2$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während man der Summe der drei Elemente $x + y + z$ immer den gleichen jedoch nichtgegebenen Werth zudenkt.

Man bekommt zunächst

$$\text{I)}\quad \delta U = 2y \cdot \delta y + 2z \cdot \delta z$$

$$\text{II)}\quad \delta^2 U = 2y \cdot \delta^2 y + 2z \cdot \delta^2 z + 2 \cdot \delta y^2 + 2 \cdot \delta z^2$$

Und aus der zugefügten Nebenbedingung folgt

$$\text{III)}\quad \delta y + \delta z = 0$$

$$\text{IV)}\quad \delta^2 y + \delta^2 z = 0$$

Betrachtet man z als mittelbar mutabel, und eliminirt man δz und $\delta^2 z$; so gehen I und II bezüglich über in

$$\text{V)}\quad \delta U = (2y - 2z) \cdot \delta y$$

$$\text{VI)}\quad \delta^2 U = (2y - 2z) \cdot \delta^2 y + 4 \cdot \delta y^2$$

Setzt man $\frac{d_y U}{dy} = 0$, so bekommt man $y = z$, d. h. für z kann man eine beliebige Function von x annehmen, und man hat $U' = x^2 + 2 \cdot z^2$. Dabei reducirt sich Gleichung VI auf $\delta^2 U = 4 \cdot \delta y^2$, so dass ein Minimum-stand stattfindet für jede beliebige Function z von x.

Aufgabe 48.

Man sucht y und z als solche Functionen von x, dass der Ausdruck

$$U = x + y + z$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während man der Summe der Quadrate dieser drei Elemente, d. h. $x^2 + y^2 + z^2$ immer den gleichen jedoch nichtgegebenen Werth zudenkt.

Man bekommt zunächst

$$\text{I)}\quad \delta U = \delta y + \delta z$$

$$\text{II)}\quad \delta^2 U = \delta^2 y + \delta^2 z$$

Aus der zugefügten Nebenbedingung folgt

$$\text{III)}\quad y \cdot \delta y + z \cdot \delta z = 0$$

$$\text{IV)}\quad y \cdot \delta^2 y + z \cdot \delta^2 z + \delta y^2 + \delta z^2 = 0$$

Betrachtet man z als mittelbar mutabel, und eliminirt man δz und $\delta^2 z$; so gehen I und II bezüglich über in

$$\text{V)}\quad \delta U = \frac{z - y}{z} \cdot \delta y$$

$$\text{VI)}\quad \delta^2 U = \frac{z - y}{z} \cdot \delta^2 y - \frac{z^2 + y^2}{z^3} \cdot \delta y^2$$

Setzt man $\frac{d_y U}{dy} = 0$, so bekommt man $y = z$, wie in voriger Aufgabe. Es ist also $U' = x + 2z$. Gleichung VI reducirt sich nun auf $\delta^2 U = -\frac{2}{z} \cdot \delta y^2$, woran man erkennt, dass es auf die zu wählende Function z von x ankommt, ob ein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfindet.

Aufgabe 49.

Welches unter allen Vierecken, die denselben (gegebenen oder nichtgegebenen) Umfang haben, und bei denen man zwei nebeneinander liegende Seiten nach Willkür nimmt, schliesst den grössten Inhalt ein?

Die zwei nach Willkür genommenen Seiten des Vierecks seien dargestellt durch x und w, die beiden andern durch y und z. Der von den Seiten x und w eingeschlossene Winkel sei v, und der von den Seiten y und z eingeschlossene Winkel sei s. Des Vierecks Inhalt ist bekanntlich

$$\text{I)}\quad U = \frac{1}{2} \cdot xw \cdot \sin v + \frac{1}{2} \cdot yz \cdot \sin s$$

Zwischen den Seiten und den hier zugezogenen Winkeln des Vierecks besteht aber noch die Gleichung

$$\text{II)}\quad x^2 + w^2 - 2 \cdot xw \cdot \cos v = y^2 + z^2 - 2 \cdot yz \cdot \cos s$$

Ferner erfordert die Bedingung der Aufgabe, dass die Summe

$$\text{III)}\quad x + w + y + z$$

beständig denselben (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behalte.

Man führe die Aufgabe in der Weise durch, dass man z und v als mittelbar mutabel behandelt. Dadurch bekommt man

$$\delta U = \frac{y - z}{2 \cdot \sin v} \cdot (\cos v + \cos v \cdot \cos s - \sin v \cdot \sin s) \cdot \delta y$$

$$+ \frac{y \cdot z}{2 \cdot \sin v} \cdot (\sin v \cdot \cos s + \operatorname{sos} v \cdot \sin s) \cdot \delta s$$

oder

$$\delta U = \frac{y - z}{2 \cdot \sin v} \cdot (\cos v + \cos (v + s)) \cdot \delta y + \frac{y \cdot z}{2 \cdot \sin v} \cdot \sin (v + s) \cdot \delta s$$

Daraus folgen die beiden identischen Gleichungen

$$\text{IV)}\quad \sin (v + s) = 0, \text{ und } \quad \text{V)}\quad (y - z) \cdot (\cos v + \cos (v + s)) = 0$$

Aus $\sin (v + s) = 0$ folgt Winkel $(v + s) = n \cdot 2R$, wo 2R zwei rechte Winkel, und n entweder Null oder irgend eine ganze Zahl bedeutet. Da nun die gesuchte Figur ein Viereck ist, also die beiden Winkel v und s zusammen grösser als Null und kleiner als vier Rechte sein müssen; so müssen die beiden Winkel v und s zusammen zwei Rechte betragen.

Das gesuchte Viereck ist also das Viereck im Kreise.

Gleichung V geht jetzt über in $(y - z) \cdot (\cos v - 1) = 0$. Würde man $\cos v - 1 = 0$ setzen, so bekäme man $\cos v = 1$, d. h. Winkel $v = n \cdot 4R$, was der Aufgabe widerspricht. Man kann also nur $y - z = 0$ setzen, so dass sich $y = z$ ergibt. Da nun Winkel $(v + s)$ zusammen zwei Rechte betragen, so ist $\cos s = - \cos v$; und Gleichung II geht über in

$$\text{VI)}\quad x^2 + w^2 - 2x \cdot w \cdot \cos v = 2 \cdot z^2 \cdot (1 + \operatorname{sos} v)$$

und nun ist man auf dem Punkte, zu unterscheiden, ob des hier in Frage stehenden Viereckes Umfang ein gegebener oder nichtgegebener ist.

Erstens. Des Vierecks Umfang sei gegeben, und sei $= m$. Der Ausdruck III geht also über in die Gleichung

$$\text{VII)}\quad x + w + y + z = m$$

Diese Gleichung, verbunden mit $y - z = 0$ und mit VI, gibt

$$y = z = \frac{m - x - w}{2} \text{ und } \cos v = \frac{2x^2 + 2w^2 - (m - x - w)^2}{4xw + (m - x - w)^2}$$

Dadurch ist der von den beiden nach Willkür genommenen Seiten eingeschlossene Winkel bestimmt; die beiden andern Seiten sind einander gleich, und eine jede ist der halbe Unterschied des gegebenen Umfanges und der zwei nach Willkür genommenen Seiten.

Hiermit ist des Vierecks Abhängigkeit von den zwei nach Willkür genommenen Seiten vollkommen bestimmt.

Zweitens. Des Vierecks Umfang sei nichtgegeben. Hier hat man nur die zwei Gleichungen $y - z = 0$ und Gleichung VI. Es ist also jetzt

$$\text{VIII)}\quad y = z$$

und

$$\text{IX)}\quad \cos v = \frac{x^2 + w^2 - 2 \cdot z^2}{2xw + 2 \cdot z^2}$$

Da nun keine Gleichung mehr vorhanden ist, woraus sich bestimmen liesse, was z für eine Function von x und w ist; so kann man für z eine unendliche Menge Functionen von x und w wählen; doch müssen sie alle die Eigenschaft gemeinschaftlich haben, dass

dabei des Bruches $\frac{x^2 + w^2 - 2 \cdot z^2}{2 \cdot x \cdot w + 2 \cdot z^2}$ Werth zwischen (-1) und $(+1)$ liegt. Würde man z. B. den nichtmutablen Elementen x und w bezüglich die willkürlichen Werthe 19a und 4a beilegen, und für z eine solche Function von x und w annehmen, dass bei diesen dem x und dem w beigelegten Werthen das z den Werth 3a bekommt; so würde man $\cos v = \frac{361 \cdot a^2 + 16 \cdot a^2 - 18 \cdot a^2}{152 \cdot a^2 + 18 \cdot a^2} = \frac{359}{170}$ bekommen, ein Zahlenwerth, welcher bekanntlich keinem Cosinus angehört.

Das Prüfungsmittel ist noch herzustellen.

Aufgabe 50.

Welches unter allen Vierecken, die denselben (gegebenen oder nichtgegebenen) Umfang haben, und bei welchen man zwei gegenüberliegende Seiten nach Willkür nimmt, schliesst den grössten Inhalt ein?

Die zwei nach Willkür genommenen gegenüberliegenden Seiten seien x und w, die beiden andern seien y und z. Der von x und y eingeschlossene Winkel sei v, und der von w und z eingeschlossene sei s. Des Vierecks Inhalt ist bekanntlich

$$\text{I)}\quad U = \frac{1}{2} \cdot xy \cdot \sin v + \frac{1}{2} \cdot wz \cdot \sin s$$

Zwischen den Seiten und den hier zugezogenen Winkeln des Vierecks besteht aber noch die Gleichung

$$\text{II)}\quad x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos v = w^2 + z^2 - 2w \cdot z \cdot \cos s$$

Ferner erfordert die Bedingung der Aufgabe, dass die Summe

$$\text{III)}\quad x + y + z + w$$

beständig denselben (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behalte.

Man führe auch diese Aufgabe in der Weise durch, dass man v und z als mittelbar mutabel behandelt; und dadurch bekommt man

$$\text{IV)}\quad \delta U = \frac{1}{2 \cdot \sin v} \cdot [(x + w \cdot \cos (s + v) - (y + z) \cos v) \cdot \delta y + wz \cdot \sin (s + v) \cdot \delta s]$$

Man hat also die beiden Gleichungen:

$$\text{V)}\quad \sin (s + v) = 0, \text{ und} \qquad \text{VI)}\quad x + w \cdot \cos (s + v) - (y + z) \cdot \cos v = 0$$

Aus $\sin (s + v) = 0$ folgt wieder, dass die Winkel s und v zusammen zwei Rechte betragen. d. h.

Das gesuchte Viereck ist das Viereck im Kreise.

Weil aber s und v zusammen zwei Rechte betragen, so ist $\cos (s + v) = -1$; und Gleichung VI geht über in

$$\text{VII)}\quad x - w - (y + z) \cdot \cos v = 0$$

Also ist

$$\text{VIII)}\quad \cos v = \frac{x - w}{y + z}$$

Ferner ist

$$\text{IX)}\quad \cos s = -\cos v = -\frac{x - w}{y + z}$$

Gleichung II geht daher über in

$$\text{X)}\quad x^2 + y^2 - 2xy \cdot \frac{x - w}{y + z} = z^2 + w^2 + 2wz \cdot \frac{x - w}{y + z}$$

Erstens. Ist der Umfang des Viereckes ein gegebener, und dargestellt durch m; so geht der Ausdruck III über in die Gleichung

$$\text{XI)} \quad x + y + z + w = m$$

und die Gleichungen X und XI reichen hin, zu bestimmen, was y und z für Functionen von x und w sind.

Zweitens. Ist der Umfang des Viereckes nicht gegeben, so hat man nur die einzige Gleichung X: und jetzt kann man für das mittelbar mutable Element z eine unendliche Menge Functionen von x und w wählen, die zugehörige Function y ergibt sich dann jedesmal aus Gleichung X. Allein alle für z zu wählenden Functionen müssen auch jetzt die Eigenschaft gemeinschaftlich haben, dass des Bruches $\frac{x - w}{y + z}$ Werth zwischen (+ 1) und (— 1) fällt, wie am Schlusse der vorigen Aufgabe näher auseinandergesetzt ist.

Das Prüfungsmittel ist noch herzustellen.

Aufgabe 51.

Welcher abgekürzte senkrechte Kegel hat bei jedem beliebigen zwischen dem Halbmesser der obern und untern Grundfläche stattfindenden Verhältnisse die Eigenschaft, dass er unter allen denen, die denselben (gegebenen oder nichtgegebenen) Körperinhalt einschliessen, von der kleinsten Oberfläche begränzt wird?

Es sei y der Halbmesser der unteren, z der oberen Grundfläche, und v sei die senkrechte Entfernung dieser beiden Grundflächen; so ist bekanntlich des abgekürzten Kegelmantels Flächeninhalt $= \pi \cdot (y + z) \cdot \sqrt{v^2 + (y - z)^2}$, das z mag grösser oder kleiner als y sein, d. h. des abgekürzten Kegels Spitze mag abwärts oder aufwärts liegen. Hier hat man, eben weil kein Grund vorhanden ist, warum des Kegelmantels Flächeninhalt negativ sein sollte, das Radical nur nach seiner positiven Bedeutung genommen; und diese Bedeutung muss ihm durch die ganze Aufgabe bleiben. Der Flächeninhalt der untern Grundfläche ist $\pi \cdot y^2$, und der Flächeninhalt der oberen Grundfläche ist $\pi \cdot z^2$. Addirt man diese drei Ausdrücke, so gibt sich für die ganze Oberfläche des abgekürzten senkrechten Kegels folgender Ausdruck

$$\text{I)} \quad U = \pi \cdot \left[y^2 + z^2 + (y + z) \cdot \sqrt{v^2 + (y - z)^2}\right]$$

Der Körperinhalt desselben ist

$$\text{II)} \quad \frac{\pi}{3} \cdot v \cdot (y^2 + yz + z^2)$$

Weil ferner der Halbmesser der oberen Grundfläche irgend ein beliebiges Vielfaches oder irgend ein beliebiger Theil des Halbmessers der untern Grundfläche ist, so hat man noch die Gleichung

$$\text{III)} \quad y = x \cdot z$$

Man erkennt sogleich, dass die Aufgabe am leichtesten durchgeführt wird, wenn man y eliminirt, man hat dann z und v als solche Functionen von x zu bestimmen, dass

$$\text{IV)} \quad U = \pi \cdot \left[z^2 \cdot (1 + x^2) + z \cdot (1 + x) \cdot \sqrt{v^2 + z^2 \cdot (x - 1)^2}\right]$$

ein Minimum-stand wird, während noch der Ausdruck

$$\text{V)} \quad \frac{\pi}{3} \cdot v \cdot z^2 \cdot (1 + x + x^2)$$

beständig denselben (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält. Aus IV folgt nun

$$\text{VI)} \quad \delta U = \frac{\pi z \cdot (1 + x) \cdot v}{\sqrt{v^2 + z^2 \cdot (x - 1)^2}} \cdot \delta v +$$

$$+\frac{\pi\cdot(1+x)\cdot(v^2+2z^2\cdot(x-1)^2)+2\pi z\cdot(1+x^2)\cdot\sqrt{v^2+z^2\cdot(x-1)^2}}{\sqrt{v^2+z^2\cdot(x-1)^2}}$$

Aus V aber folgt

$$\text{VII)}\quad z\cdot\delta v+2v\cdot\delta z=0$$

Eliminirt man nun δv, so geht Gleichung VI über in

$$\text{VIII)}\quad \delta U=\frac{\pi\cdot(x+1)\cdot(2z^2\cdot(x-1)^2-v^2)+2\pi z\cdot(x^2+1)\cdot\sqrt{v^2+z^2\cdot(x-1)^2}}{\sqrt{v^2+z^2\cdot(x-1)^2}}\cdot\delta z$$

Man sieht hier sogleich, dass man nicht $\frac{d_zU}{dz}=\frac{\mathfrak{A}}{0}$ setzen darf; denn daraus würde $v^2+z^2\cdot(x-1)^2=0$ folgen, d. h. es würde $v=z\cdot(x-1)\cdot\sqrt{-1}$ imaginär sein. Man kann also nur $\frac{d_zU}{dz}=0$ setzen, so dass man

$$\text{IX)}\quad (x+1)\cdot(2z^2\cdot(x-1)^2-v^2)+2z\cdot(x^2+1)\cdot\sqrt{v^2+z^2\cdot(x-1)^2}$$

hat. Daraus folgt

$$\text{X)}\quad z^2=\left(\frac{v}{2x\cdot(x-1)}\right)^2\cdot\left[-(x^4+1)+\sqrt{(x^4+1)^2+x^2\cdot(x^2-1)^2}\right]$$

Das Radical kann hier nur eindeutig sein, d. h. nur seine positive Bedeutung haben, weil widrigenfalls z^2 negativ, also z selbst imaginär wäre. Hierdurch ist das Verhältniss der Höhe zum Halbmesser der oberen Grundfläche gegeben.

Würde man dem nichtmutablen Elemente x den Werth 1 beilegen, so würde aus Gleichung III folgen $y=z$, d. h. der Halbmesser der oberen Grundfläche wäre dem der unteren Grundfläche gleich, und der abgekürzte Kegel ginge in den Cylinder über; und Gleichung X ginge über in

$$\text{XI)}\quad z^2=v^2\cdot\frac{0}{0}$$

Wenn man aber Gleichung X genauer betrachtet, so erkennt man, dass man den wahren Werth der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ jetzt am leichtesten dadurch ermittelt, dass man das Radical nach dem binomischen Lehrsatze in eine Reihe verwandelt. Nun darf das Radical, wie bereits auseinandergesetzt ist, nur seine positive Bedeutung haben; und dabei geht Gleichung X über in

$$z^2=\frac{v^2}{4x^2\cdot(x-1)^2}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2\cdot(x^2-1)^2}{x^4+1}-\frac{1\cdot1}{2\cdot4}\cdot\frac{x^4\cdot(x^2-1)^4}{(x^4+1)^3}\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^6\cdot(x^2-1)^6}{(x^4+1)^5}-\cdots\cdots\cdots\right]$$

Dividirt man in Zähler und Nenner das gemeinschaftliche Pruduct $x^2\cdot(x-1)^2$ weg; so geht letztere Gleichung über in

$$z^2=\frac{v^2}{4}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+1)^2}{x^4+1}-\frac{1\cdot1}{2\cdot4}\cdot\frac{x^2\cdot(x-1)^2\cdot(x+1)^4}{(x^4+1)^3}\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^4\cdot(x-1)^4\cdot(x+1)^6}{(x^4+1)^5}-\cdots\cdots\cdots\right]$$

Diese Gleichung ist mit Gleichung X ganz gleichbedeutend bei jedem Werthe des x, bei welchem die in den eckigen Klammern eingeschlossene Reihe convergirt, also auch bei $x=1$; und setzt man wirklich $x=1$, so bekommt man

$$\text{XII)}\quad z^2=\frac{1}{4}\cdot v^2$$

so dass die hier in Frage stehende unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ den Werth $\frac{1}{4}$ hat. Aus XII folgt

$v = 2z$, d. h. die Höhe dieses Cylinders ist dem Durchmesser der beiden Grundflächen gleich, und man hat den bekannten Satz:

„Unter allen Cylindern von gleichem Körperinhalte wird derjenige von der kleinsten Oberfläche eingeschlossen, dessen Höhe dem Durchmesser der Grundflächen gleich ist."

Erstens. Ist der Körperinhalt des gesuchten Kegels ein gegebener, dargestellt durch m^3; so geht der Ausdruck V über in die Gleichung

$$\text{XIII)}\quad \frac{\pi}{3} \cdot v \cdot z^2 \cdot (1 + x + x^2) = m^3$$

und die Gleichungen X und XIII reichen hin, zu bestimmen, was v und z für Functionen von x sind.

Zweitens. Ist der Körperinhalt des gesuchten Kegels nicht gegeben, so hat man nur die einzige Gleichung X; und jetzt kann man für das mittelbar mutable Element v jede beliebige Function von x wählen, die zugehörige Function z ergibt sich dann jedesmal aus Gleichung IX oder X.

Das Prüfungsmittel ist noch herzustellen.

Aufgabe 52.

Man soll bei einem abgekürzten senkrechten Kegel die Halbmesser der obern und untern Grundfläche durch die nach Willkür zu nehmende Höhe in der Weise bestimmen, dass dieser Kegel unter allen denen, deren Körperinhalt dieselbe (gegebene oder nichtgegebene) Function der Höhe ist, von der kleinsten Oberfläche eingeschlossen wird.

Es sei x die nach Willkür zu nehmende Höhe, y sei der Halbmesser der untern, und z sei der Halbmesser der obern Grundfläche; so ist (nach Einleitung der Aufgabe 51) die Oberfläche dieses abgekürzten senkrechten Kegels

$$\text{I)}\quad U = \pi \cdot \left[y^2 + z^2 + (y + z) \cdot \sqrt{x^2 + (y - z)^2}\right]$$

wo, wie schon in voriger Aufgabe auseinandergesetzt ist, das Radical nur seine positive Bedeutung haben darf. Der Ausdruck I soll nun ein Maximum-stand werden, während der durch

$$\text{II)}\quad \frac{\pi}{3} \cdot x \cdot (y^2 + y \cdot z + z^2)$$

dargestellte Körperinhalt des besagten abgekürzten Kegels immer dieselbe (gegebene oder nichtgegebene) Function die Höhe x bleibt. Man behandle z als mittelbar mutabel, mutire, und eliminire die von z herkommende Mutation, so gibt sich

$$\text{III)}\quad \delta U = \frac{\pi \cdot (y - z)}{2z + y} \cdot \left(2 \cdot (y + z) + \frac{3 \cdot (y + z)^2 - x^2 - (y - z)^2}{\sqrt{x^2 + (y - z)^2}}\right) \cdot \delta y$$

Daraus kann nur folgen

$$\text{IV)}\quad y - z = 0$$

Es ist also $y = z$, d. h. die obere Grundfläche ist der untern gleich, und der hier gefundene Körper ist der senkrechte circuläre Cylinder, wie ohnehin zu erwarten war.

Erstens. Ist der Körperinhalt eine gegebene Function der Höhe x, ist z. B. vorgeschrieben, dass der Körperinhalt beständig dem Würfel der Höhe gleich sein soll; so geht Ausdruck II in folgende Gleichung

$$\text{V)}\quad \frac{\pi}{3} \cdot x \cdot (y^2 + y \cdot z + z^2) = x^3$$

über, welche in Verbindung mit IV hinreicht, y und z zu bestimmen; denn jetzt ist $y = z = \frac{x}{\sqrt{\pi}}$.

Zweitens. Ist nicht vorgeschrieben, welche Function der Höhe x der Körperinhalt sein soll; so hat man nur die einzige Gleichung $y = z$, und man kann jetzt für das mittelbar mutable Element z jede beliebige Function von x nehmen.

Unter allen abgekürzten senkrechten Kegeln, welche eine nach Belieben gewählte Höhe miteinander gemein haben, und deren Körperinhalt man sich als eine und dieselbe Function dieser Höhe denkt, wird also derjenige, dessen obere und untere Grundfläche einander gleich sind, d. h. der senkrechte circuläre Cylinder, von der kleinsten Oberfläche eingeschlossen.

Das Prüfungsmittel ist noch herzustellen.

Aufgabe 53.

Man sucht y und z als solche Functionen von x, dass dabei nicht nur folgende Gleichung

$$\text{I)}\quad y^3 - 3x \cdot y \cdot z + z^3 = 0$$

identisch, sondern dass auch das in folgender Gleichung

$$\text{II)}\quad U^3 - 3x \cdot y \cdot U + y^3 = 0$$

enthaltene U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird.

Hier kann nur z als unmittelbar mutabel behandelt werden; denn würde man y als unmittelbar mutabel behandeln, so würde, wie man an II erkennt, das z durchaus keinen Einfluss auf U haben.

Man kann diese Aufgabe entweder so durchführen, dass man aus II das y schon vor dem Mutiren eliminirt, oder so, dass man zuerst Gleichung I und II mutirt, und dann die mittelbaren Mutationscoefficienten eliminirt.

Es mögen nun folgende zwei Methoden, das y schon vor dem Mutiren zu eliminiren, durchgeführt und miteinander verglichen werden.

Erste Eliminationsmethode.

Man entwickle aus I das y in aus x und z zusammengesetzte Ausdrücke. Solcher Ausdrücke bekommt man zwei. Sie mögen bezüglich durch $y = \varphi_1(x, z)$ und $y = \varphi_2(x, z)$ dargestellt werden. Der erste dieser Ausdrücke ist einförmig, und der andere ist zweiförmig, so dass die drei verschiedenen Formen des y vollständig repräsentirt sind. Entwickelt man diese Ausdrücke in nach Potenzen des z aufsteigende Reihen, so bekommt man

$$\text{III)}\quad y = \varphi_1(x, z) = A_1 \cdot z^2 + A_2 \cdot z^5 + A_3 \cdot z^8 + A_4 \cdot z^{11} + A_5 \cdot z^{14} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\text{IV)}\quad y = \varphi_2(x, z) = B_1 \cdot z^{\frac{1}{2}} + B_2 \cdot z^2 + B_3 \cdot z^{\frac{7}{2}} + B_4 \cdot z^5 + B_5 \cdot z^{\frac{13}{2}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Zur Bestimmung der Coefficienten der ersten Reihe bekommt man folgende Gleichungen:

$$1)\quad 1 - 3x \cdot A_1 = 0$$

$$2)\quad - 3x \cdot A_2 + (A_1A_1A_1) = 0$$

$$3)\quad - 3x \cdot A_3 + (3A_1A_1A_2) = 0$$

$$4)\quad - 3x \cdot A_4 + (3A_1A_1A_3 + 3A_1A_2A_2) = 0$$

$$5)\quad - 3x \cdot A_5 + (3A_1A_1A_4 + 6A_1A_2A_3 + A_2A_2A_2) = 0$$

etc. etc.

Zur Bestimmung der Coefficienten der zweiten Reihe bekommt man folgende Gleichungen:

6) $- 3x \cdot B_1 + (B_1B_1B_1) = 0$

7) $1 - 3x \cdot B_2 + (3 \cdot B_1B_1B_2) = 0$

8) $- 3x \cdot B_3 + (3B_1B_1B_3 + 3B_1B_2B_2) = 0$

9) $- 3x \cdot B_4 + (3B_1B_1B_4 + 6 \cdot B_1B_2B_3 + B_2B_2B_2) = 0$

10) $- 3x \cdot B_5 + (3B_1B_1B_5 + 6B_1B_2B_4 + 3B_1B_3B_3 + 3 \cdot B_2B_2B_3) = 0$

etc. etc.

Das Discerptionsgesetz, welches alle diese Gleichungen beobachten, ist augenfällig. Die Reihen selbst aber sind

$$\text{V)}\quad y = \varphi_1(x, z) = \left(\frac{1}{3x}\right) \cdot z^2 + \left(\frac{1}{3x}\right)^4 \cdot z^5 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^7 \cdot z^8 + 12 \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^{10} \cdot z^{11} + 55 \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^{13} \cdot z^{14} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\text{VI)}\quad y = \varphi_2(x, z) = (3x)^{\frac{1}{2}} \cdot z^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot (3x)^{-1} \cdot z^2 - \frac{3}{8} \cdot (3x)^{-\frac{5}{2}} \cdot z^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{2} \cdot (3x)^{-4} \cdot z^5 - \frac{105}{128} \cdot (3x)^{-\frac{11}{2}} \cdot z^{\frac{13}{2}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Dass die Reihe V wirklich nur einförmig ist, erkennt man an den Coefficientengleichungen 1, 2, 3, 4, 5 · · · · · ·; und dass die Reihe VI wirklich nur zweiförmig ist, erkennt man an den Coefficientengleichungen 6, 7, 8, 9, 10 · · · · · · Man substituire nun den Ausdruck $\varphi_1(x, z)$, d. h. die entsprechende Reihe III an die Stelle des y in II; so bekommt man

$$\begin{aligned}\text{VII)}\quad & (A_1A_1A_1) \cdot z^6 + (3A_1A_1A_2) \cdot z^9 + (3A_1A_1A_3 + 3A_1A_2A_2) \cdot z^{12} \\ & + (3A_1A_1A_4 + 6A_1A_2A_3 + A_2A_2A_2) \cdot z^{15} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & - 2x \cdot (A_1z^2 + A_2 \cdot z^5 + A_3 \cdot z^8 + A_4 \cdot z^{11} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot) \cdot U \\ & + U^3 = 0\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich für U drei aus x und z zusammengesetzte Ausdrücke, welche durch $U = \psi_1(x, z)$, $U = \psi_2(x, z)$, und $U = \psi_3(x, z)$ dargestellt sein mögen. Sie sind alle drei einförmig, und wenn man sie in nach Potenzen des z aufsteigende Reihen entwickelt, so bekommt man

$$\text{VIII)}\quad U = \psi_1(x, z) = C_1 \cdot z^4 + C_2 \cdot z^7 + C_3 \cdot z^{10} + C_4 \cdot z^{13} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\text{IX)}\quad U = \psi_2(x, z) = E_1z + E_2 \cdot z^4 + E_3 \cdot z^7 + E_4 \cdot z^{10} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\text{X)}\quad U = \psi_3(x, z) = z + R_1$$

In Gleichung X bedeutet das R_1 die nach dem ersten Gliede noch hinzuzufügende Ergänzung. Zur Bestimmung der Coefficienten der Reihe VIII bekommt man folgende Gleichungen:

11) $(A_1A_1A_1) - 3x \cdot (A_1C_1) = 0$

12) $(3A_1A_1A_2) - 3x \cdot (A_1C_2 + A_2C_1) = 0$

13) $(3A_1A_1A_3 + 3A_1A_2A_2) - 3x \cdot (A_1C_3 + A_2C_2 + A_3C_1) + (C_1C_1C_1) = 0$

14) $(3A_1A_1A_4 + 6A_1A_2A_3 + A_2A_2A_2) - 3x \cdot (A_1C_4 + A_2C_3 + A_3C_2 + A_4C_1) + (3C_1C_1C_2) = 0$

etc. etc.

Daraus folgt die Reihe

$$\text{XI)}\quad U = \psi_1(x, z) = \left(\frac{1}{3x}\right)^3 \cdot z^4 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^6 \cdot z^7 + 8 \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^9 \cdot z^{10} + 35 \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^{12} \cdot z^{13} + 171 \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^{15} \cdot z^{16} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Zur Bestimmung der Coefficienten der Reihe IX bekommt man die Gleichungen:

15) $E_1 = -1$

16) $(A_1A_1A_1) - 3x \cdot (A_1E_2 + A_2E_1) + (3E_1E_1E_2) = 0$

17) $(3A_1A_1A_2) - 3x \cdot (A_1E_3 + A_2E_2 + A_3E_1) + (3E_1E_1E_3 + 3E_1E_2E_2) = 0$

18) $(3A_1A_1A_3 + 3A_1A_2A_2) - 3x \cdot (A_1E_4 + A_2E_3 + A_3E_2 + A_4E_1)$
$+ (3E_1E_1E_4 + 6E_1E_2E_3 + E_2E_2E_2) = 0$

etc. etc.

Daraus folgt die Reihe

$$\text{XII)} \quad U = \psi_2(x, z) = -z - \left(\frac{1}{3x}\right)^3 \cdot z^4 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^6 \cdot z^7 - \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Setzt man aber den in Gleichung X befindlichen Ausdruck $(z + R_1)$ an die Stelle des U in Gleichung VII ein, und ordnet man dann gehörig; so bekommt man

$$\text{XIII)} \quad [-3x \cdot A_2 + (A_1A_1A_1)] \cdot z^6 + [-3x \cdot A_3 + (3A_1A_1A_2)] \cdot z^9$$
$$+ [-3x \cdot A_4 + (3A_1A_1A_3 + 3A_1A_2A_2)] \cdot z^{12} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ [-3x \cdot (A_1 \cdot z^2 + A_2 \cdot z^5 + A_3 \cdot z^8 \ldots) + (3z^2 + 3zR_1 + R_1^2)] \cdot R_1 = 0$$

Schaut man aber auf die Gleichungen 1, 2, 3, 4, 5 · · · · · · zurück, so erkennt man, dass sich Gleichung XIII zurückzieht auf

$$\text{XIV)} \quad [-3x \cdot (A_1 \cdot z^2 + A_2 \cdot z^5 + A_3 \cdot z^8 \ldots .) + (3z^2 + 3zR_1 + R_1^2)] \cdot R_1 = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt:

entweder $R_1 = 0$

oder $R_1 = \frac{1}{2} \cdot [-3z + \sqrt{-3z^2 + 12x \cdot (A_1z^2 + A_2 \cdot z^5 + A_3 \cdot z^8 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot)}]$

oder $R_1 = \frac{1}{2} \cdot [-3z - \sqrt{-3z^2 + 12x \cdot (A_1 \cdot z^2 + A_2 \cdot z^5 + A_3 \cdot x^8 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot)}]$

Setzt man den ersten für R_1 gefundenen Ausdruck in Gleichung X ein, so bekommt man

$$\text{XV)} \quad U = \psi_3(x, z) = z$$

Setzt man den zweiten für R_1 gefundenen Ausdruck in X ein, und entwickelt man das Radical mittelst des binomischen Satzes in eine nach Potenzen des z aufsteigende Reihe; so bekommt man wieder die Reihe XI. Setzt man endlich den dritten für R_1 gefundenen Ausdruck in X ein, und entwickelt man das Radical mittelst des binomischen Satzes in eine nach Potenzen des z aufsteigende Reihe; so bekommt man wieder die Reihe XII. Hiermit ist nachgewiesen, dass in X das R_1 die Bedeutung Null haben muss, weil widrigenfalls der Ausdruck $\psi_3(x, z)$ entweder mit $\psi_1(x, z)$ oder mit $\psi_2(x, z)$ zusammenfallen würde.

Nun hat man den zweiförmigen Ausdruck $\varphi_2(x, z)$ an die Stelle des y in Gleichung II einzuführen; und jede einzelne dieser zwei Formen wird machen, dass U drei Formen bekommt. Um aber beurtheilen zu können, welche Formen des U und welche Formen des y jedesmal zusammengehören, ist es am sichersten, die dem Ausdrucke $\varphi_2(x, z)$ entsprechende Reihe zuerst in zwei eindeutige Reihenformen zu zerlegen, dadurch dass man den in Gleichung VI befindlichen Radicalen zuerst einerlei und hierauf entgegengesetzte Bedeutung beilegt. Auf diese Weise bekommt man

$$\text{XVI)} \quad y = (3x)^{\frac{1}{2}} \cdot z^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot (3x)^{-1} \cdot z^2 - \frac{3}{8} \cdot (3x)^{-\frac{5}{2}} \cdot z^{\frac{7}{2}}$$
$$- \frac{1}{2} \cdot (3x)^{-4} \cdot z^5 - \frac{105}{128} \cdot (3x)^{-\frac{11}{2}} \cdot z^{\frac{13}{2}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und

$$\text{XVII)}\quad y = -(3x)^{\frac{1}{2}} \cdot z^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot (3x)^{-1} \cdot z^2 + \frac{3}{8} \cdot (3x)^{-\frac{5}{2}} \cdot z^{\frac{7}{2}}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot (3x)^{-4} \cdot z^5 + \frac{105}{128} \cdot (3x)^{-\frac{11}{2}} \cdot z^{\frac{13}{2}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Zur Bequemlichkeit beim Calculiren schreibe man statt XVI

$$\text{XVIII)}\quad y = \mathfrak{B}_1 \cdot z^{\frac{1}{2}} + \mathfrak{B}_2 \cdot z^2 + \mathfrak{B}_3 \cdot z^{\frac{7}{2}} + \mathfrak{B}_4 \cdot z^5 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und statt XVII schreibe man

$$\text{XIX)}\quad y = \mathfrak{b}_1 \cdot z^{\frac{1}{2}} + \mathfrak{b}_2 \cdot z^2 + \mathfrak{b}_3 \cdot z^{\frac{7}{2}} + \mathfrak{b}_4 \cdot z^5 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Es ist ferner bequem, v anstatt $z^{\frac{1}{2}}$, v^2 anstatt z, v^3 anstatt $z^{\frac{3}{2}}$, etc. zu setzen, und dann erst die für U sich ergebenden Reihen zu entwickeln. Nach vollbrachter Reihenentwicklung denke man aber daran, dass man v anstatt $z^{\frac{1}{2}}$ gesetzt hatte, dass man also auch nur $z^{\frac{1}{2}}$ und durchaus nicht $z^{\frac{1}{\overline{2}}}$ an die Stelle des v zurückführen darf. Statt der Reihe XVI schreibe man also

$$\text{XX)}\quad y = \mathfrak{B}_1 \cdot v + \mathfrak{B}_2 \cdot v^4 + \mathfrak{B}_3 \cdot v^7 + \mathfrak{B}_4 \cdot v^{10} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und statt der Reihe XVII schreibe man

$$\text{XXI)}\quad y = \mathfrak{b}_1 \cdot v + \mathfrak{b}_2 \cdot v^4 + \mathfrak{b}_3 \cdot v^7 + \mathfrak{b}_4 \cdot v^{10} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Führt man nun die Reihe XX in Gleichung II ein, so bekommt man

$$\begin{aligned}\text{XXII)}\quad & (\mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_1) \cdot v^3 + (3\mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_2) \cdot v^6 + (3\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 + 3\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_2) \cdot v^9 \\ & + (3\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4 + 6\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3 + \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_2) \cdot v^{12} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & - 3x \cdot (\mathfrak{B}_1 \cdot v + \mathfrak{B}_2 \cdot v^4 + \mathfrak{B}_3 \cdot v^7 + \mathfrak{B}_4 \cdot v^{10} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot) \cdot U \\ & + U^3 = 0\end{aligned}$$

Die daraus zu entwickelnden Reihen haben folgende Formen

$$\text{XXIII)}\quad U = F_1 \cdot v^{\frac{1}{2}} + F_2 \cdot v^2 + F_3 \cdot v^{\frac{7}{2}} + F_4 \cdot v^5 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und

$$\text{XXIV)}\quad U = v^2 + \mathfrak{R}_1$$

wo $\mathfrak{R}_1$ die Ergänzung bedeutet, wenn man die Reihe XXIV schon nach dem ersten Gliede abbrechen will. Zur Bestimmung der Coefficienten der Reihe XXIII bekommt man folgende Gleichungen:

19) $-3x \cdot (\mathfrak{B}_1F_1) + (F_1F_1F_1) = 0$

20) $(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1) - 3x \cdot (\mathfrak{B}_1F_2) + (3F_1F_1F_2) = 0$

21) $-3x \cdot (\mathfrak{B}_1F_3 + \mathfrak{B}_2F_1) + (3F_1F_1F_3 + 3F_1F_2F_2) = 0$

22) $(3\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2) - 3x(\mathfrak{B}_1F_4 + \mathfrak{B}_2F_2) + (3F_1F_1F_4 + 6F_1F_2F_3 + F_2F_2F_2) = 0$

etc. etc.

Daraus folgt nun folgende Reihe:

$$U = \left((3x)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot v^2 - \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{1}{(3x)^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{7}{2}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Nun darf man, wie bereits auseinandergesetzt ist, nur $z^{\frac{1}{2}}$ und durchaus nicht $z^{\frac{1}{\overline{2}}}$ an die Stelle des v zurückführen; und letztere Reihe geht über in

$$\text{XXV)}\quad U = \psi_4(x, z) = \left((3x)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(z^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot z - \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{1}{(3x)^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(z^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{7}{2}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Diese Reihe repräsentirt zwei verschiedene Formen des U. Jetzt setze man $(v^2 + \mathfrak{R}_1)$ an die Stelle des U in Gleichung XXII ein, und ordne gehörig; so bekommt man

$$\begin{aligned}\text{XXVI)}\quad & [-3x \cdot \mathfrak{B}_2 + (3\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2)] \cdot v^6 + [-3x \cdot \mathfrak{B}_3 + (3\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 + 3\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_2)] \cdot v^9 \\ & + [-3x \cdot \mathfrak{B}_4 + (3\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4 + 6\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3 + \mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_2)] \cdot v^{12} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + [-3x \cdot (\mathfrak{B}_1 \cdot v + \mathfrak{B}_2 \cdot v^4 + \mathfrak{B}_3 \cdot v^7 \ldots.) + (3v^4 + 3v^2 \cdot \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_1^2)] \cdot \mathfrak{R}_1 = 0\end{aligned}$$

Schaut man aber auf die Gleichungen 6, 7, 8, 9, 10 · · · · · · zurück, so erkennt man, dass sich Gleichung XXVI zurückzieht auf

$$\text{XXVII)}\quad [-3x \cdot (\mathfrak{B}_1 \cdot v + \mathfrak{B}_2 \cdot v^4 + \mathfrak{B}_3 \cdot v^7 \ldots) + (3 \cdot v^4 + 3 \cdot v^2 \cdot \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_1^2)] \cdot \mathfrak{R}_1 = 0$$

Daraus folgt:

entweder $\mathfrak{R}_1 = 0$

oder $\mathfrak{R}_1 = -\frac{3}{2} \cdot v^2 + \sqrt{-\frac{3}{4} \cdot v^2 + 3x(\mathfrak{B}_1 \cdot v + \mathfrak{B}_2 \cdot v^4 \ldots.)}$

Nimmt man den ersten für $\mathfrak{R}_1$ gefundenen Ausdruck, so bekommt man $U = v^2 = \left(z^{\frac{1}{2}}\right)^2 = z$; und man hat wieder die Gleichung XV, d. h. es ist wieder

$$\text{XXVIII)}\quad U = \psi_3(x,z) = z$$

Nimmt man aber den zweiten für $\mathfrak{R}_1$ gefundenen Ausdruck, und entwickelt man das Radical mittelst des binomischen Lehrsatzes, und setzt man zuletzt wieder $z^{\frac{1}{2}}$ an die Stelle des v; so bekommt man wieder Gleichung XXV. Hiermit ist also nachgewiesen, dass nur $\mathfrak{R}_1 = 0$ die hier zulässige Ergänzung ist. Führt man nun die Reihe XXI in Gleichung II ein, so bekommt man

$$\begin{aligned}\text{XXIX)}\quad & (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1) \cdot v^3 + (3\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) \cdot v^6 + (3\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3 + 3\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_2) \cdot v^9 \\ & + (3\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4 + 6\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3 + \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_2) \cdot v^{12} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & - 3x \cdot (\mathfrak{b}_1 v + \mathfrak{b}_2 \cdot v^4 + \mathfrak{b}_3 v^7 + \mathfrak{b}_4 \cdot v^{10} \;.\;.\;.\;.\;) \cdot U \\ & + U^3 = 0\end{aligned}$$

Die daraus zu entwickelnden Reihen haben folgende Formen

$$\text{XXX)}\quad U = G_1 \cdot v^{\frac{1}{2}} + G_2 \cdot v^2 + G_3 \cdot v^{\frac{7}{2}} + G_4 \cdot v^5 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und

$$\text{XXXI)}\quad U = v^2 + \mathfrak{S}_1$$

wo $\mathfrak{S}_1$ die Ergänzung bedeutet, wenn man die Reihe XXXI gleich nach dem ersten Gliede abbrechen will. Zur Bestimmung der Reihe XXX bekommt man folgende Coefficientengleichungen:

23) $-3x \cdot (\mathfrak{b}_1 \cdot G_1) + (G_1G_1G_1) = 0$

24) $(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1) - 3x \cdot (\mathfrak{b}_1 G_2) + (3G_1G_1G_2) = 0$

25) $-3x \cdot (\mathfrak{b}_1 G_3 + \mathfrak{b}_2 G_1) + (3G_1G_1G_3 + 3G_1G_2G_2) = 0$

26) $(3\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) - 3x \cdot (\mathfrak{b}_1 G_4 + \mathfrak{b}_2 G_2) + (3G_1G_1G_4 + 6G_1G_2G_3 + G_2G_2G_2) = 0$

etc. etc.

Daraus folgt folgende Reihe:

$$U = \left(-(3x)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot v^2 - \frac{5}{8} \cdot \left(-\frac{1}{(3x)^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{7}{2}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Nun darf man, wie bereits auseinandergesetzt ist, nur $z^{\frac{1}{2}}$ und durchaus nicht $z^{\frac{\underline{1}}{2}}$ an die Stelle des v zurückführen; und letztere Reihe geht über in

$$\text{XXXII)}\quad U = \psi_5(x,z) = \left(-(3x)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{\underline{1}}{2}} \cdot \left(z^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{\underline{1}}{2}} - \frac{1}{2}\cdot z - \frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{1}{(3x)^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{\underline{1}}{2}}\cdot\left(z^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{\underline{7}}{2}}\cdots$$

Diese Reihe repräsentirt zwei verschiedene Formen des U. Nun setze man $(v^2 + \mathfrak{S}_1)$ an die Stelle des U in Gleichung XXIX ein, und ordne gehörig, so bekommt man

$$\begin{aligned}\text{XXXIII)}\quad & [-3x\cdot\mathfrak{b}_2 + (3\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)]\cdot v^6 + [-3x\cdot\mathfrak{b}_3 + (3\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3 + 3\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_2)]\cdot v^9 \\ & + [-3x\cdot\mathfrak{b}_4 + (3\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_4 + 6\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3 + \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_2)]\cdot v^{12}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + [-3x(\mathfrak{b}_1 v + \mathfrak{b}_2\cdot v^4 + \mathfrak{b}_3\cdot v^7\ldots\ldots) + (3v^4 + 3v^2\cdot\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_1^2)]\cdot\mathfrak{S}_1 = 0\end{aligned}$$

Schaut man aber auf die Gleichungen 6, 7, 8, 9, 10 · · · · · · zurück, so erkennt man, dass sich Gleichung XXXIII zurückzieht auf

$$\text{XXXIV)}\quad [-3x\cdot(\mathfrak{b}_1 v + \mathfrak{b}_2 v^4 + \mathfrak{b}_3 v^7\ldots) + (3v^4 + 3v^2\cdot\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_1^2)]\cdot\mathfrak{S}_1 = 0$$

Daraus folgt:

entweder $\mathfrak{S}_1 = 0$

oder $\mathfrak{S}_1 = -\frac{3}{2}\cdot v^2 + \sqrt{-\frac{3}{4}\cdot v^2 + 3x\cdot(\mathfrak{b}_1 v + \mathfrak{b}_2 v^4 + \mathfrak{b}_3 v^7\ldots.)}$

Nimmt man den ersten für $\mathfrak{S}_1$ gefundenen Ausdruck, so bekommt man $U = v^2 = \left(z^{\frac{1}{2}}\right)^2 = z$; und man hat wieder die Gleichung XV, d. h. man hat wieder

$$\text{XXXV)}\quad U = \psi_3(x,z) = z$$

Nimmt man aber den zweiten für $\mathfrak{S}_1$ gefundenen Ausdruck, und entwickelt man das Radical nach dem binomischen Lehrsatze, und setzt man zuletzt wieder $z^{\frac{1}{2}}$ an die Stelle des v; so bekommt man wieder Gleichung XXXII. Hiermit ist nachgewiesen, dass nur $\mathfrak{S}_1 = 0$ die hier zulässige Ergänzung ist.

Man hat nun zuerst die drei einförmigen Ausdrücke $U = \psi_1(x, z)$, $U = \psi_2(x, z)$, $U = \psi_3(x, z)$ bekommen. Hierauf bekam man den zweiförmigen Ausdruck $U = \psi_4(x, z)$ und nochmal den einförmigen $U = \psi_3(x, z)$. Zuletzt bekam man den zweiförmigen $U = \psi_5(x, z)$ und abermal den einförmigen $U = \psi_3(x, z)$. Unter den neun herzustellenden Formen sind also drei einander gleich.

Zweite Eliminationsmethode.

Man eliminire aus I und II das y, ohne dass man zuvor die dem y entsprechenden Ausdrücke herstellt, welche Elimination jedesmal leicht auszuführen ist. Man subtrahire I von II, so bekommt man $U^3 - z^3 - 3\cdot(U - z)\cdot x\cdot y = 0$, oder $y = \frac{U^3 - z^3}{3\cdot(U - z)\cdot x}$; und wenn man diesen für y gefundenen Ausdruck in I oder II substituirt, so gibt sich

$$\text{XXXVI)}\quad [(U^2 + Uz + z^2)^3 - 27Uz\cdot(U + z)\cdot x^3]\cdot(U - z)^3 = 0$$

Diese Gleichung ist in Beziehung auf U vom neunten Grade, wie sein muss. Lässt man den zweiten Factor zu Null werden, so bekommt man

$$\text{XXXVII)}\quad (U - z)^3 = 0$$

oder

$$\text{XXXVIII)}\quad U = z$$

und zugleich erkennt man an Gleichung XXXVII, dass die hier vorgelegte Gleichung XXXVI des neunten Grades für U drei einander gleiche Ausdrücke liefert. Die Glei-

chung XXXVIII vertritt also die Stelle der drei Gleichungen XV, XXVIII und XXXV zusammen. Schaut man auf XXXVI zurück, und lässt man den zweiten Factor zu Null werden; so bekommt man auch

$$(U^2 + Uz + z^2)^3 - 27 \cdot U \cdot z \cdot (U + z) \cdot x^3 = 0$$

oder

$$\text{XXXIX)} \quad z^6 - 27x^3 \cdot U \cdot z^2 + 3 \cdot U \cdot z^5 - 27 \cdot x^3 \cdot U^2 \cdot z + 6U^2 \cdot z^4 + 7U^3 \cdot z^3 + 6U^4 \cdot z^2 + 3U^5 \cdot z + U^6 = 0$$

Hieraus lassen sich folgende drei Reihen entwickeln:

$$\text{XL)} \quad U = C_1 \cdot z^4 + C_2 \cdot z^7 + C_3 \cdot z^{10} + C_4 \cdot z^{13} + \ldots\ldots$$

$$\text{XLI)} \quad = E_1 \cdot z + E_2 \cdot z^4 + E_3 \cdot z^7 + E_4 \cdot z^{10} + \ldots\ldots$$

$$\text{XLII)} \quad U = H_1 \cdot z^{\frac{1}{4}} + H_2 \cdot z + H_3 \cdot z^{\frac{7}{4}} + H_4 \cdot z^{\frac{10}{4}} + \ldots\ldots$$

Die Reihen XL und XLI sind genau wieder die Reihen XI und XII, und jede ist einförmig. Dagegen die Reihe XLII ist folgende

$$\text{XLIII)} \quad U = \psi_6(x, z) = (3x)^{\frac{3}{4}} \cdot z^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \cdot z - \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot z^{\frac{7}{4}} \cdot \ldots\ldots$$

Diese Reihe, welche sich in vier eindeutige Reihenformen zerlegen lässt, repräsentirt in sich allein die beiden zweiförmigen Reihen XXV und XXXII. Somit sind auch jetzt die neun für U sich ergebenden Ausdrücke, unter denen sich jedoch drei gleiche befinden, ebenso vollständig hergestellt, wie bei der ersten Eliminationsmethode. Diese erste hat jedoch den Vortheil, dass man bei ihr erkennt, welche Form des U und des z jedesmal zusammengehören.

Nunmehr soll die in der Aufgabe gestellte Forderung, für y und z solche Functionen aufzusuchen, bei denen U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, wirklich erfüllt, und zu diesem Ende drei Auflösungen durchgeführt werden.

Erste Auflösung.

Man eliminire das mittelbar mutable Element y schon vor dem Mutiren, wodurch man entweder $(U - z)^3 = 0$ oder $(U^2 + Uz + z^2)^3 - 27Uz \cdot (U + z) \cdot x^3 = 0$ bekommt.

Aus $(U - z)^3 = 0$ folgt $U = z$, $\delta U = \delta z$, $\delta^2 U = \delta^2 z$ etc. Nun sieht man, dass der zu dem unmittelbaren Mutationscoefficient δz gehörige Factor die bestimmte Zahl 1 ist, dem man also weder die Bedeutung Null noch die Bedeutung $\frac{\mathfrak{A}}{0}$ beilegen kann; und somit kann hier kein Maximum-stand oder Minimum-stand stattfinden.

Aus der Gleichung

$$\text{XLIV)} \quad (U^2 + Uz + z^2)^3 - 27x^3 \cdot U \cdot z \cdot (U + z) \cdot x^3 = 0$$

folgt zunächst

$$\text{XLV)} \quad \delta U = -\frac{(U + 2z) \cdot [(U^2 + Uz + z^2)^2 - 9U \cdot x^3]}{(2U + z) \cdot [(U^2 + Uz + z^2)^2 - 9z \cdot x^3]} \cdot \delta z$$

Erstens. Es wird $\frac{d_z U}{dz} = 0$, entweder wenn $U + 2z = 0$, oder wenn $(U^2 + Uz + z^2)^2 - 9U \cdot x^3 = 0$.

A) Setzt man $U + 2z = 0$, so ist $U = -2z$, und Gleichung XLIV geht über in $(z^3 - 2 \cdot x^3) \cdot z^3 = 0$; also ist entweder $z^3 - 2 \cdot x^3 = 0$, oder $z^3 = 0$.

α) Bei $z^3 - 2x^3 = 0$ bekommt man $z = x \cdot \sqrt[3]{2}$, und $U' = -2z = -2x \cdot \sqrt[3]{2}$.

Da man aber hier nur reelle Functionen berücksichtigen darf, so darf man auch nur $z = x \cdot \sqrt[3]{2}$ und $U' = -2x \cdot \sqrt[3]{2}$ beibehalten. Um die entsprechende Function y von x zu bekommen, muss man die für z und U erlangten Functionen in die Gleichungen I und II einführen, und zusehen, ob sich dann aus beiden Gleichungen für y eine und dieselbe Function ergibt. Substituirt man nun $x \cdot \sqrt[3]{2}$ an die Stelle des z in Gleichung I, so bekommt man folgende Gleichung

$$(y - x \cdot \sqrt[3]{4}) \cdot \left[y + \frac{x}{2} \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{4}\right] \cdot \left[y + \frac{x}{2} \cdot (1 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{4}\right] = 0$$

Substituirt man $(-2x \cdot \sqrt[3]{2})$ an die Stelle des U in Gleichung II, so bekommt man folgende Gleichung

$$\left[y - x \cdot \sqrt[3]{4}\right] \cdot \left[y^2 + y \cdot x \cdot \sqrt[3]{4} + 8x^2 \cdot \sqrt[3]{2}\right] = 0$$

Der diesen beiden Gleichungen gemeinschaftliche Theiler ist $\left[y - x \cdot \sqrt[3]{4}\right]$; nur dieser kann genommen werden, und die hier zusammengehörigen Functionen sind $y = x \cdot \sqrt[3]{4}$, $z = x \cdot \sqrt[3]{2}$, $U' = -2x \cdot \sqrt[3]{2}$. Mutirt man Gleichung XLIV noch einmal, so gibt sich $\delta^2 U = + \frac{8}{3x \cdot \sqrt[3]{2}} \cdot \delta z^2$, woran man erkennt, dass bei positivem x ein Minimum-stand, und dass bei negativem x ein Maximum-stand stattfindet.

β) Ist $z = 0$, d. h. ist z eine identische Function von x; so ist auch $U' = 0$, d. h. auch U' ist eine identische Function von x. Dabei folgt aus I und aus II, dass auch $y = 0$, d. h. dass auch y eine identische Function von x ist. Unter diesen Umständen nimmt aber Gleichung XLV die Form $\delta U = \frac{0}{0} \cdot \delta z$ an, und desshalb muss man die dem $U' = 0$ nächstanliegenden Nachbarzustände durch directe Reihenentwicklung herstellen, wobei sich zugleich die Bedeutung der hiesigen unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ ergibt. Man setze also $\mathfrak{u}$ an die Stelle des U, und $(0 + \varkappa \cdot \mathfrak{Q})$ oder schlechthin $\varkappa \cdot \mathfrak{Q}$ an die Stelle des z in Gleichung XLIV ein, so bekommt man

$$\begin{aligned} &\varkappa^6 \cdot \mathfrak{Q}^6 - 27 \cdot x^3 \cdot \mathfrak{u} \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{Q}^2 + 3\mathfrak{u} \cdot \varkappa^5 \cdot \mathfrak{Q}^5 - 27 \cdot x^3 \cdot \mathfrak{u}^2 \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} \\ &+ 6\mathfrak{u}^2 \cdot \varkappa^4 \cdot \mathfrak{Q}^4 + 7 \cdot \mathfrak{u}^3 \cdot \varkappa^3 \cdot \mathfrak{Q}^3 + 6\mathfrak{u}^4 \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{Q}^2 + 3\mathfrak{u}^5 \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} + \mathfrak{u}^6 = 0 \end{aligned}$$

Daraus geben sich folgende nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigende Reihen:

$$27)\quad \mathfrak{u} = \left(\frac{1}{3x}\right)^3 \cdot \varkappa^4 \cdot \mathfrak{Q}^4 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^6 \cdot \varkappa^7 \cdot \mathfrak{Q}^7 \;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$28)\quad \mathfrak{u} = (-1) \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} - \left(\frac{1}{3x}\right)^3 \cdot \varkappa^4 \cdot \mathfrak{Q}^4 \;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$29)\quad \mathfrak{u} = (3x)^{\frac{3}{4}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} - \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^{\frac{7}{4}} \;.\;.\;.\;.\;.$$

Durch alle diese Reihen sind Zustände dargestellt, welche dem $U' = 0$ nächstanliegen; es müssen also alle drei Reihen noch besonders untersucht werden.

Die Reihe 27, welche mit $\left(\frac{1}{3x}\right)^3 \cdot \varkappa^4 \cdot \mathfrak{Q}^4$ anfängt, ist aus derjenigen Form des U entstanden, welche in Gleichung XI durch $U = \psi_1(x, z)$ dargestellt worden ist; und man erkennt an der Reihe 27, dass bei $z = 0$ der Ausdruck $U = \psi_1(x, z)$ ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, je nachdem x negativ oder positiv ist. Zugleich

erkennt man an Gleichung 27, dass bei $z = 0$ die drei identischen Gleichungen $\frac{d_zU}{dz} = 0$, $\frac{d_z^2U}{dz^2} = 0$, $\frac{d_z^3U}{dz^3} = 0$ stattfinden, und dass erst $\frac{d_z^4U}{dz^4} = 1.2.3.4 \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^3$ ist. Die in Frage stehende unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ muss jetzt als aus $U = \psi_1(x, z)$ entstanden betrachtet werden; und man erkennt an Reihe 27, weil sie erst mit $\left(\frac{1}{3x}\right)^3 \cdot \varkappa^4 . \mathfrak{Q}^4$ anfängt, dass hierbei $\frac{0}{0} = 0$ ist.

Die Reihe 28, welche mit $(-1) \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q}$ anfängt, ist aus derjenigen Form des U entstanden, welche in Gleichung XII durch $U = \psi_2(x, z)$ dargestellt wurde; und man erkennt an der Reihe 28, dass bei $z = 0$ der Ausdruck $U = \psi_2(x, z)$ weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand wird. Die in Frage stehende unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ muss jetzt als aus $U = \psi_2(x, z)$ entstanden betrachtet werden; und man erkennt an Reihe 28, dass, weil sie mit $(-1) \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q}$ anfängt, hierbei $\frac{0}{0} = -1$ ist.

Die Reihe 29, welche mit $\left(\frac{1}{3x}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^{\frac{1}{4}}$ anfängt, ist aus derjenigen Form des U entstanden, welche in Gleichung XLIII durch $U = \psi_6(x, z)$ dargestellt wurde; und man erkennt an Reihe 29, dass bei $z = 0$ der Ausdruck $U = \psi_6(x, z)$ ein Gränz-stand wird. Die in Frage stehende unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ muss jetzt als aus $U = \psi_6(x, z)$ entstanden betrachtet werden; und weil die Reihe 29 mit $\left(\frac{1}{3x}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^{\frac{1}{4}}$ anfängt, so erkennt man, dass der hiesigen Form $\frac{0}{0}$ die Bedeutung $\frac{\mathfrak{B}}{0}$ zukommt.

B) Setzt man

$$\text{XLVI)} \quad (U^2 + Uz + z^2)^2 - 9U \cdot x^3 = 0$$

so geht Gleichung XLIV über in $9U \cdot x^3 \cdot (U^2 - 2Uz - 2z^2) = 0$; und daraus folgt entweder $U = 0$ oder $U^2 - 2Uz - 2z^2 = 0$.

α) Bei $U' = 0$ ist auch $z = 0$ und $y = 0$, welcher Fall bereits untersucht ist.

β) Aus $U^2 - 2Uz - 2z^2 = 0$ folgt $U = z \cdot (1 + \sqrt{3})$. Dabei geht Gleichung XLVI über in $z^3 \cdot (6 + 3 \cdot \sqrt{3})^2 - 9 \cdot x^3 \cdot (1 + \sqrt{3}) = 0$, oder in $z^3 \cdot (2 + \sqrt{3})^2 - x^3 \cdot (1 + \sqrt{3}) = 0$, oder $\frac{z^3}{4} \cdot (1 + \sqrt{3})^4 - x^3 \cdot (1 + \sqrt{3}) = 0$. Daraus folgt $z = \frac{x}{1 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{4}$. Weil man aber hier nur reelle Functionen sucht, so kann auch nur $z = \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt{3}}$ gesetzt werden. Da ferner oben $U = z \cdot (1 + \sqrt{3})$ gefunden wurde, so ist jetzt $U' = x \cdot \sqrt[3]{4}$. Um die entsprechende Function y von x zu bekommen, muss man die hier für z und U gefundenen Functionen in die Gleichungen I und II einführen, und zusehen, ob sich dann aus beiden Gleichungen für y eine und dieselbe Function ergibt. Gleichung II geht dabei über in

$$(y - x \cdot \sqrt[3]{2})^2 \cdot (y + 2x \cdot \sqrt[3]{2}) = 0$$

Gleichung I aber geht dabei über in

$$y^3 - 3x^2 \cdot y \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt{3}} + \frac{4x^3}{(1 + \sqrt{3})^3} = 0$$

oder

$$\left(y - x \cdot \sqrt[3]{2}\right) \cdot \left(y^2 + y \cdot x \cdot \sqrt[3]{2} - \frac{(2 - \sqrt[3]{3}) \cdot x^2 \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{3}}\right) = 0$$

Hieran erkennt man, dass $y = x \cdot \sqrt[3]{2}$ genommen werden muss, und die jetzt zusammengehörigen Functionen sind $z = \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{3}} = -\frac{x}{2} \cdot (1 - \sqrt[3]{3}) \cdot \sqrt[3]{4}$, $y = x \cdot \sqrt[3]{2}$, und $U' = x \cdot \sqrt[3]{4}$. Mutirt man Gleichung XLIV nochmal, so gibt sich $\delta^2 U = -\frac{4 \cdot \sqrt[3]{2}}{3x} \cdot \delta z^2$, woran man erkennt, dass bei positivem x ein Maximum-stand, dagegen bei negativem x ein Minimum-stand stattfindet.

Zweitens. Schaut man wieder auf Gleichung XLV zurück, und setzt man $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$; so bekommt man entweder $2U + z = 0$ oder $(U^2 + Uz + z^2)^2 - 9 . x^3 . z = 0$.

A) Setzt man $2U + z = 0$, so ist $z = -2U$, und Gleichung XLIV geht über in $U^3 \cdot (U^3 - 2x^3) = 0$; also ist entweder $U = 0$ oder $U^3 - 2x^3 = 0$.

α) Setzt man $U' = 0$, so ist auch $y = 0$ und $z = 0$, welcher Fall bereits vollständig untersucht ist.

β) Setzt man $U^3 - 2 \cdot x^3 = 0$, so bekommt man $U' = x \cdot \sqrt[3]{2}$ und $z = -2x \cdot \sqrt[3]{2}$. Da man aber hier nur reelle Functionen berücksichtigen darf, so darf man auch nur $U' = x \cdot \sqrt[3]{2}$, und $z = -2x \cdot \sqrt[3]{2}$ beibehalten. Um die entsprechende Function y von x zu bekommen, muss man die für z und U erlangten Functionen in die Gleichungen I und II einführen. Gleichung I geht dabei über in

$$\left(y - x \cdot \sqrt[3]{4}\right) \cdot \left(y^2 + yx \cdot \sqrt[3]{4} + 8 \cdot x^2 \cdot \sqrt[3]{2}\right) = 0$$

Gleichung II geht aber über in

$$\left(y - x \cdot \sqrt[3]{4}\right) \cdot \left[y + \frac{x}{2} \cdot (1 + \sqrt[3]{3}) \cdot \sqrt[3]{4}\right] \cdot \left[y + \frac{x}{2} \cdot (1 - \sqrt[3]{3}) \cdot \sqrt[3]{4}\right] = 0$$

oder

$$\left(y - x \cdot \sqrt[3]{4}\right) \cdot \left(y - \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 - \sqrt[3]{3}}\right) \cdot \left(y - \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{3}}\right) = 0$$

Der diesen Gleichungen gemeinschaftliche Theiler ist $(y - x \cdot \sqrt[3]{4})$, nur dieser kann genommen werden, und die hier zusammengehörigen Functionen sind $z = -2x \cdot \sqrt[3]{2}$, $y = x \cdot \sqrt[3]{4}$ und $U' = x \cdot \sqrt[3]{2}$. Um aber das Prüfungsmittel herzustellen, setze man $\mathfrak{U}$ an die Stelle des U, und $(-2x \cdot \sqrt[3]{2} + \varkappa \cdot \mathfrak{Q})$ an die Stelle des z in Gleichung XLIV ein, und entwickle für $\mathfrak{U}$ alle nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigenden Reihen. Alle diese Reihen haben aber keine andere Form, als folgende:

$$\mathfrak{U} = A_1 + A_2 \cdot \varkappa^{\beta} + A_3 \cdot \varkappa^{\gamma} \text{}$$

Zur Bestimmung von A_1 hat man folgende Coefficientengleichung:

$$A_1^6 - (6x \cdot \sqrt[3]{2}) \cdot A_1^5 + (24x^2 \cdot \sqrt[3]{4}) \cdot A_1^4 - (112 \cdot x^3) A_1^3 + (246x^4 \cdot \sqrt[3]{2}) \cdot A_1^2$$
$$- (300x^5 \cdot \sqrt[3]{4}) \cdot A_1 + 256 \cdot x^6 = 0$$

oder

$$(A_1 - x \cdot \sqrt[3]{2})^2 \cdot \left[A_1^4 - (4x \cdot \sqrt[3]{2}) \cdot A_1^3 + (15x^2 \cdot \sqrt[3]{4}) \cdot A_1^2 \right.$$

$$\left. - (44x^3) \cdot A_1 + 128x^4 \cdot \sqrt[3]{2}\right] = 0$$

Hieraus folgt zunächst $A_1 = x \cdot \sqrt[3]{2}$, und die damit anfangende Reihe ist

$$30) \quad \mathfrak{U} = x \cdot \sqrt[3]{2} + \frac{1}{2} \cdot (3x \cdot \sqrt[3]{2})^{\frac{1}{2}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots$$

Diese Reihe, welche zweiförmig ist, repräsentirt die dem $U' = x \cdot \sqrt[3]{2}$ nächstanliegenden Nachbarzustände; und somit braucht man die andern sich für $\mathfrak{U}$ ergebenden Reihen nicht herzustellen. Zugleich erkennt man, dass $U' = x \cdot \sqrt[3]{2}$ ein Gränz-stand ist.

B) Setzt man

$$\text{XLVII)} \quad (U^2 + Uz + z^2)^2 - 9z \cdot x^3 = 0$$

so geht Gleichung XLIV über in $9z \cdot x^3 \cdot (z^2 - 2Uz - 2U^2) = 0$, und daraus folgt entweder $z = 0$ oder $z^2 - 2Uz - 2U^2 = 0$.

α) Bei $z = 0$ ist auch $y = 0$ und $U' = 0$, welcher Fall bereits vollständig untersucht ist.

β) Aus $z^2 - 2Uz - 2U^2 = 0$ folgt $z = U \cdot (1 + \sqrt{3})$. Dabei geht Gleichung XLVII über in $U^3 \cdot (6 + 3 \cdot \sqrt{3})^2 - 9 \cdot x^3 \cdot (1 + \sqrt{3}) = 0$, oder in $U^3 \cdot (2 + \sqrt{3})^2 - x^2 \cdot (1 + \sqrt{3}) = 0$, oder in $\frac{U^3}{4} \cdot (1 + \sqrt{3})^3 - x^3 = 0$; und daraus folgt $U' = \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt{3}}$. Weil man aber hier nur reelle Functionen sucht, so kann nur $U' = \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt{3}}$ gesetzt werden. Da ferner $z = U \cdot (1 + \sqrt{3})$ gefunden wurde, so ist jetzt $z = x \cdot \sqrt[3]{4}$. Um die entsprechende Function y von x zu bekommen, muss man die für z und U' gefundenen Functionen in die Gleichungen I und II einführen und zusehen, ob sich dann aus beiden Gleichungen für y eine und dieselbe Function ergibt. Gleichung I geht dabei über in

$$(y - x \cdot \sqrt[3]{2})^2 \cdot (y + 2x \cdot \sqrt[3]{2}) = 0$$

Gleichung II aber geht über in

$$(y - x \cdot \sqrt[3]{2}) \cdot \left(y^2 + y \cdot x \cdot \sqrt[3]{2} - \frac{(2 - \sqrt{3}) \cdot x^2 \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt{3}}\right) = 0$$

Hieran erkennt man, dass $y = x \cdot \sqrt[3]{2}$ genommen werden muss: und die jetzt zusammengehörigen Functionen sind $z = x \cdot \sqrt[3]{4}$, $y = x \cdot \sqrt[3]{2}$, und $U' = \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt{3}}$. Um aber das Prüfungsmittel herzustellen, setze man $\mathfrak{U}$ an die Stelle des U, und $(x \cdot \sqrt[3]{4} + \varkappa \cdot \mathfrak{Q})$ an die Stelle des z in Gleichung XLIV ein, und entwickle für $\mathfrak{U}$ alle nach Potenzen des $\varkappa$ aufsteigenden Reihen. Diese Reihen haben aber keine andere Form als folgende:

$$\mathfrak{U} = B_1 + B_2 \cdot \varkappa^b + B_3 \cdot \varkappa^c \ldots\ldots\ldots$$

Zur Bestimmung von B_1 hat man folgende Coefficientengleichung:

$$B_1^6 + (3x\cdot\sqrt[3]{4})\cdot B_1^5 + (12x^2\cdot\sqrt[3]{2})\cdot B_1^4 + (28x^3)\cdot B_1^3 - (3x^4\cdot\sqrt[3]{4})\cdot B_1^2$$
$$- (30x^5\cdot\sqrt[3]{2})\cdot B_1 + 16x^6 = 0$$

oder

$$[B_1^2 + (x\cdot\sqrt[3]{4})\cdot B_1 - (x^2\cdot\sqrt[3]{2})]^2\cdot[B_1^2 + (x\cdot\sqrt[3]{4})\cdot B_1 + 8x^2\cdot\sqrt[3]{2}] = 0$$

Lässt man den ersten Factor zu Null werden, so bekommt man

$$B_1 = -\frac{x}{2}\cdot(1-\sqrt{3})\cdot\sqrt[3]{4} = \frac{x\cdot\sqrt[3]{4}}{1+\sqrt{3}}$$

und die damit anfangende Reihe hat entweder folgende Form

$$31)\quad \mathfrak{U} = -\frac{x}{2}\cdot(1-\sqrt{3})\cdot\sqrt[3]{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(3-\sqrt{3})\cdot\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt{3}}\cdot(-x)^{\frac{1}{2}}\cdot(\varkappa\cdot\mathfrak{Q})^{\frac{1}{2}}\ \ldots$$

oder folgende ganz gleichbedeutende Form

$$32)\quad \mathfrak{U} = \frac{x\cdot\sqrt[3]{4}}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot(-3x)^{\frac{1}{2}}\cdot(\varkappa\cdot\mathfrak{Q})^{\frac{1}{2}}\ \ldots\ldots\ldots$$

Da die Bedeutungen des Radicals $\sqrt{3}$ ganz unabhängig sind von den Bedeutungen des Productes $(-x)^{\frac{1}{2}}\,.\,(\varkappa\,.\,\mathfrak{Q})^{\frac{1}{2}}$ oder des Productes $(-3x)^{\frac{1}{2}}\cdot(\varkappa\,.\,\mathfrak{Q})^{\frac{1}{2}}$; so hat in diesen beiden (übrigens, wie gesagt, einander ganz gleichbedeutenden) Reihen schon das erste Glied zwei selbstständige Formen. Diese Reihen sind also vierförmig, und repräsentiren die dem $U' = \frac{x\cdot\sqrt[3]{4}}{1+\sqrt{3}}$ nächstanliegenden Nachbarzustände. Somit braucht man die zwei andern für $\mathfrak{U}$ sich ergebenden Reihenformen nicht herzustellen. Man erkennt also, dass $U' = \frac{x\cdot\sqrt[3]{4}}{1+\sqrt{3}}$ ein Gränz-stand ist.

Zweite Auflösung.

Man mutire vorerst Gleichung I und II, und eliminire dann die mittelbaren Mutationscoefficienten. Aus Gleichung I folgt

$$\text{XLVIII)}\quad (y^2 - xz)\cdot\delta y - (xy - z^2)\cdot\delta z = 0$$

$$\text{XLIX)}\quad (y^2 - xz)\cdot\delta^2 y - (xy - z^2)\cdot\delta^2 z + 2y\cdot\delta y^2 - 2x\cdot\delta y\cdot\delta z + 2z\cdot\delta z^2 = 0$$

Aus Gleichung II aber folgt

$$\text{L)}\quad (U^2 - xy)\cdot\delta U - (xU - y^2)\cdot\delta y = 0$$

$$\text{LI)}\quad (U^2 - xy)\cdot\delta^2 U - (xU - y^2)\cdot\delta^2 y + 2U\cdot\delta U^2 - 2x\cdot\delta U\cdot\delta y + 2y\cdot\delta y^2 = 0$$

Man eliminire δy aus L, so gibt sich

$$\text{LII)}\quad \delta U = \frac{(xy - z^2)\cdot(xU - y^2)}{(y^2 - xz)\cdot(U^2 - xy)}\cdot\delta z$$

Erstens. Der bei δz befindliche Factor $\frac{d_z U}{dz}$ wird Null, entweder wenn $xy - z^2 = 0$ oder wenn $xU - y^2 = 0$.

A) Setzt man $xy - z^2 = 0$, so ist $y = \frac{z^2}{x}$, und dabei geht Gleichung I über in $\frac{z^3}{x^3} \cdot (z^3 - 2 \cdot x^3) = 0$, so dass entweder $z = 0$ oder $z^3 - 2 \cdot x^3 = 0$ ist.

α) Setzt man $z^3 - 2 \cdot x^3 = 0$, so ist $z = x \cdot \sqrt[3]{2}$; weil man aber nur reelle Functionen sucht, so darf auch nur $z = x \cdot \sqrt[3]{2}$ genommen werden. Wegen $y = \frac{z^2}{x}$ ist $y = x \cdot \sqrt[3]{4}$. Gleichung II geht nun über in

$$\text{LIII)}\quad (U - x \cdot \sqrt[3]{2})^2 \cdot (U + 2x \cdot \sqrt[3]{2}) = 0$$

Es ist also zu untersuchen, ob $U' = x \cdot \sqrt[3]{2}$ oder $U' = -2x \cdot \sqrt[3]{2}$ genommen werden muss, oder ob beide Ausdrücke zugleich genommen werden dürfen.

Wegen $xy - z^2 = 0$ reducirt sich Gleichung XLVIII auf $(y^2 - x \cdot z) \cdot \delta y = 0$, aus welcher Gleichung aber nur $\delta y = 0$ geschlossen werden kann, d. h. wenn $xy - z^2 = 0$, so ist der mittelbare Mutationscoefficient $\delta y = 0$ bei jedem beliebigen Werthe des x. Da nun auch $\delta U = 0$ ist, so reduciren sich die Gleichungen XLIX und LI auf $(y^2 - xz) \cdot \delta^2 y + 2z \cdot \delta z^2 = 0$ und $(U^2 - xy) \cdot \delta^2 U - (xU - y^2) \cdot \delta^2 y = 0$, so dass sich jetzt ergibt

$$\text{LIV)}\quad \delta^2 U = -\frac{2z \cdot (U \cdot x - y^2)}{(U^2 - x \cdot y) \cdot (y^2 - x \cdot z)} \cdot \delta z^2$$

a) Nimmt man $U' = -2x \cdot \sqrt[3]{2}$, so geht Gleichung LIV über in $\delta^2 U = \frac{8}{3x \cdot \sqrt[3]{2}} \cdot \delta z^2$, d. h. bei positivem x findet ein Minimum-stand, und bei negativem x findet ein Maximum-stand statt, wie bei der ersten Auflösung.

b) Nimmt man $U' = x \cdot \sqrt[3]{2}$, so ist jetzt $U = z$. Dabei geht aber Gleichung LII über in $\delta U = \frac{0}{0} \cdot \delta z$, so dass man die Bedeutung dieser unbestimmten Form durch directe Reihenentwickelung aufsuchen muss; und wenn man findet, dass dem zu δz gehörigen Factor nicht die Bedeutung Null zukommt, so muss man die Verbindung von $U' = x \cdot \sqrt[3]{2}$ mit $z = x \cdot \sqrt[3]{2}$ verwerfen, eben weil dabei die hier gemachte Voraussetzung $\frac{d_z U}{dz} = 0$ nicht erfüllt wird. Man setze also $\mathfrak{Y}$ an die Stelle des y, und $(x \cdot \sqrt[3]{2} + \varkappa \cdot \mathfrak{Q})$ an die Stelle des z in Gleichung I ein, so bekommt man

$$2x^3 + (3x^2 \cdot \sqrt[3]{4}) \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} + (3x \cdot \sqrt[3]{2}) \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{Q}^2 + \varkappa^3 \cdot \mathfrak{Q}^3$$
$$- (3x^2 \cdot \sqrt[3]{2}) \cdot \mathfrak{Y} - 3x \cdot \mathfrak{Y} \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} + \mathfrak{Y}^3 = 0$$

Die hieraus sich ergebende Reihenform ist keine andere als

$$\mathfrak{Y} = A + B \cdot \varkappa^b + C \cdot \varkappa^c + \ldots\ldots\ldots$$

d. h. das erste Glied aller aus letzterer Gleichung sich ergebenden Reihen enthält kein $\varkappa$. Die erste Coefficientengleichung ist

$$A^3 - 2A \cdot x^2 \cdot \sqrt[3]{2} + 2 \cdot x^3 = 0$$

oder

$$(A - x \cdot \sqrt[3]{4}) \cdot (A^2 + Ax \cdot \sqrt[3]{4} - x^2 \cdot \sqrt[3]{2}) = 0$$

Man kann aber nur $A = x\cdot\sqrt[3]{4}$ berücksichtigen, und die damit anfangende Reihe hat folgende Form:

$$33)\quad \mathfrak{Y} = A_1 + A_3\cdot\varkappa^2 + A_4\cdot\varkappa^3 + A_5\cdot\varkappa^4 + \ldots\ldots$$

wozu sich die Coefficienten A_3, A_4, A_5 aus folgenden Gleichungen

$$34)\quad (3x\cdot\sqrt[3]{2}) - (3x^2\cdot\sqrt[3]{2})\cdot A_3 + (3A_1A_1A_3) = 0$$

$$35)\quad 1 - (3x^2\cdot\sqrt[3]{2})\cdot A_4 - 3x\cdot A_3 + (3A_1A_1A_4) = 0$$

$$36)\quad - (3x^2\cdot\sqrt[3]{2})\cdot A_5 - 3x\cdot A_4 + (3A_1A_1A_5 + 3A_1A_3A_3) = 0$$

etc. etc.

dadurch ergeben, dass man nur $A_1 = x\cdot\sqrt[3]{4}$ setzt. Die Reihe 33 ist also folgende:

$$37)\quad \mathfrak{Y} = x\cdot\sqrt[3]{4} - \frac{1}{x}\cdot\varkappa^2\cdot\mathfrak{D}^2 - \frac{2\cdot\sqrt[3]{4}}{3\cdot x^2}\cdot\varkappa^3\cdot\mathfrak{D}^3 - \frac{5\cdot\sqrt[3]{2}}{3\cdot x^3}\cdot\varkappa^4\cdot\mathfrak{D}^4\ldots\ldots$$

wo aber die Radicale $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{4}$ nur nach ihrer reellen Bedeutung genommen werden dürfen, weil sie auch in Gleichung 32 nur nach ihrer reellen Bedeutung genommen sind. Diese Reihe 37 repräsentirt also nur eine Form des $\mathfrak{Y}$, und gibt die dem $y = x\cdot\sqrt[3]{4}$ nächstanliegenden Nachbarzustände. Die beiden andern aus Gleichung 32 sich ergebenden Reihenformen haben als erstes Glied einen der beiden aus $A^2 + Ax\cdot\sqrt[3]{4} - x^2\cdot\sqrt[3]{2} = 0$ für A sich ergebenden Ausdrücke; diese beiden Reihenformen brauchen aber nicht beachtet zu werden, weil sie nicht die dem $y = x\cdot\sqrt[3]{4}$ nächstanliegenden Nachbarzustände repräsentiren. Man setze nun $\mathfrak{U}$ an die Stelle des U, und die Reihe 37 oder vorerst nur die Reihe 33 an die Stelle des y in Gleichung II ein; so bekommt man

$$\begin{aligned}38)\quad & (A_1A_1A_1) + (3A_1A_1A_3)\cdot\varkappa^2\cdot\mathfrak{D}^2 + (3A_1A_1A_4)\cdot\varkappa^3\cdot\mathfrak{D}^3 \\ & + (3A_1A_1A_5 + 3A_1A_3A_3)\cdot\varkappa^4\cdot\mathfrak{D}^4 \ldots\ldots\ldots \\ & - 3x\cdot A_1\mathfrak{U} - 3x\cdot A_3\mathfrak{U}\cdot\varkappa^2\cdot\mathfrak{D}^2 - 3x\cdot A_4\cdot\mathfrak{U}\cdot\varkappa^3\cdot\mathfrak{D}^3 \ldots\ldots\ldots \\ & + \mathfrak{U}^3 = 0\end{aligned}$$

Die hieraus sich ergebende Reihenform ist keine andere, als

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\cdot\varkappa^\beta + \mathfrak{C}\cdot\varkappa^\gamma \ldots\ldots\ldots$$

d. h. das erste Glied der aus letzterer Gleichung sich ergebenden Reihen enthält kein $\varkappa$. Die erste Coefficientengleichung ist

$$\mathfrak{A}^3 - (3x^2\cdot\sqrt[3]{4})\cdot\mathfrak{A} + 4\cdot x^3 = 0$$

oder

$$(\mathfrak{A} + 2x\cdot\sqrt[3]{2})\cdot(\mathfrak{A} - x\cdot\sqrt[3]{2})^2 = 0$$

Es ergeben sich aber aus Gleichung 4 folgende drei einförmige Reihen:

$$39)\quad \mathfrak{U} = -2x\cdot\sqrt[3]{2} + \frac{8}{3x\cdot\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\varkappa^2\cdot\mathfrak{D}^2}{1\cdot 2}\ldots\ldots$$

$$40)\quad \mathfrak{U} = x\cdot\sqrt[3]{2} - \varkappa\cdot\mathfrak{D} - \frac{4}{3x\cdot\sqrt[3]{2}}\cdot\varkappa^2\cdot\mathfrak{D}^2\ldots\ldots$$

$$41)\quad \mathfrak{U} = x \cdot \sqrt[3]{2} + \varkappa \cdot \mathfrak{D} + R_2$$

Um zu wissen, welche Bedeutung man dem R_2 in der Reihe 41 beilegen muss; setze man diese Reihe an die Stelle des U in Gleichung 38, reducire soviel als möglich, und es gibt sich

$$42)\quad [(3x \cdot \sqrt[3]{2}) - (3x^2 \cdot \sqrt[3]{2}) \cdot A_3 + (3A_1A_1A_3)] \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{D}^2$$
$$+ [1 - (3x^2 \cdot \sqrt[3]{2}) \cdot A_4 - 3x \cdot A_3 + (3A_1A_1A_4)] \cdot \varkappa^3 \cdot \mathfrak{D}^3$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ [- 3x \cdot (A_3 \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{D}^2 + A_4 \cdot \varkappa^3 \cdot \mathfrak{D}^3 \ldots) + 3 \cdot (\varkappa^2 \cdot \mathfrak{D}^2 + 2x \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{D} \cdot \sqrt[3]{2})$$
$$+ 3 \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{D} + x \cdot \sqrt[3]{2}) \cdot R_2 + R_2^2] \cdot R_2 = 0$$

Schaut man aber auf die Gleichungen 34, 35, 36 zurück, so sieht man, dass sich Gleichung 42 zurückzieht auf

$$[- 3x \cdot (A_3 \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{D}^2 + A_4 \cdot \varkappa^3 \cdot \mathfrak{D}^3 \ldots) + 3 \cdot (\varkappa^2 \cdot \mathfrak{D}^2 + 2x \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{D} \cdot \sqrt[3]{2})$$
$$+ 3 \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{D} + x \cdot \sqrt[3]{2}) \cdot R_2 + R_2^2] \cdot R_2 = 0$$

Daraus folgt

$$\text{entweder } R_2 = - 3x \cdot \sqrt[3]{2} - \varkappa \cdot \mathfrak{D} + \frac{8}{3x \cdot \sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\varkappa^2 \cdot \mathfrak{D}^2}{1 \cdot 2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\text{oder } R_2 = - 2 \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{D} - \frac{4}{3x \cdot \sqrt[3]{2}} \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{D}^2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\text{oder } R_2 = 0$$

Setzt man den ersten für R_2 gefundenen Ausdruck in 41 ein, so bekommt man wieder 39; setzt man aber den zweiten für R_2 gefundenen Ausdruck in 41 ein, so bekommt man wieder 40. Hiermit ist nachgewiesen, dass nur $R_2 = 0$ in Gleichung 41 gesetzt werden darf. Gleichung 41 geht also über in

$$43)\quad \mathfrak{U} = x \cdot \sqrt[3]{2} + \varkappa \cdot \mathfrak{D}$$

Die hier gefundenen drei Reihen sind also alle einförmig.

Die Reihe 39, welche mit $- 2x \cdot \sqrt[3]{2}$ anfängt, braucht nicht beachtet zu werden, weil es sich hier nur um die dem $U' = x \cdot \sqrt[3]{2}$ nächstanliegenden Nachbarzustände handelt. Uebrigens stimmt in Reihe 39 das zweite Glied genau mit dem schon hergestellten Ausdrucke $\delta^2 U = \frac{8}{3x \cdot \sqrt[3]{2}} \cdot \delta z^2$ überein. Bei Reihe 40, welche wirklich einen Zustand darstellt, der dem $U' = x \cdot \sqrt[3]{2}$ nächstanliegt, hat die in Rede stehende unbestimmte Form $\delta U = \frac{0}{0} \cdot \delta z$ die Bedeutung $\delta U = (-1) \cdot \delta z$, d. h. es ist $\frac{0}{0} = - 1$. Hier wird also nicht $\delta U = 0 \cdot \delta z$, d. h. es wird nicht $\frac{d_z U}{dz} = 0$; und somit widerspricht die Verbindung von $z = x \cdot \sqrt[3]{2}$ und $U' = x \cdot \sqrt[3]{2}$ der Voraussetzung, ist also zu verwerfen.

Bei Reihe 41, oder vielmehr 43, welche gleichfalls einen Zustand darstellt, der dem $U' = x \cdot \sqrt[3]{2}$ nächstanliegt, hat die in Rede stehende unbestimmte Form $\delta U = \frac{0}{0} \cdot \delta z$

die Bedeutung $\delta U = (+1) \cdot \delta z$, d. h. es ist $\frac{0}{0} = +1$. Hier wird also wieder nicht $\delta U = 0 \cdot \delta z$, d. h. es wird wieder nicht $\frac{d_z U}{dz} = 0$; und somit widerspricht auch jetzt die Verbindung von $U' = x \cdot \sqrt[3]{2}$ mit $z = x \cdot \sqrt[3]{2}$ der Voraussetzung, ist also auch jetzt zu verwerfen.

β) Nimmt man $z = 0$, so ist auch $y = 0$ und $U' = 0$. Aus Gleichung XLVIII folgt also jetzt $\delta y = \frac{0}{0} \cdot \delta z$; und somit muss das Prüfungsmittel auf directem Wege hergestellt werden. Das Erste ist aber, zu ermitteln, was die hiesige unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ für eine Bedeutung hat. Man setze daher $\mathfrak{Y}$ an die Stelle des y, und $\left(0 + \varkappa \cdot \delta z + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 z \ldots\ldots\right)$ oder schlechthin $\varkappa \cdot \mathfrak{O}$ an die Stelle des z in Gleichung I überall ein, so bekommt man

$$44)\quad \varkappa^3 \cdot \mathfrak{O}^3 - 3x \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{O} \cdot \mathfrak{Y} + \mathfrak{Y}^3 = 0$$

so ergeben sich die beiden Reihen:

$$45)\quad \mathfrak{Y} = \left(\frac{1}{3x}\right) \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{O}^2 + \left(\frac{1}{3x}\right)^4 \cdot \varkappa^5 \cdot \mathfrak{O}^5 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^7 \cdot \varkappa^8 \cdot \mathfrak{O}^8 \ldots\ldots\ldots$$

$$46)\quad \mathfrak{Y} = (3x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{O})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3x}\right) \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{O}^2 - \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{O})^{\frac{7}{2}} \ldots\ldots$$

Durch beide Reihen sind Zustände dargestellt, welche dem $y = 0$ nächstanliegen; beide Reihen müssen also besonders betrachtet werden.

Die Reihe 45 ist aus derjenigen Form des y entstanden, welche in Gleichung V durch $y = \varphi_1(x, z)$ dargestellt wurde; und man erkennt an Reihe 45, dass die aus $y = \varphi_1(x, z)$ entstandenen und dem $y = 0$ sowohl vorangehenden als nachfolgenden Nachbarzustände reell sind, und dass dabei die Form $\delta y = \frac{0}{0} \cdot \delta z$ die Bedeutung $\delta y = 0 \cdot \delta z$ hat, d. h. dass dabei $\frac{0}{0} = 0$ ist.

Die Reihe 46 ist aus derjenigen Form des y entstanden, welche in Gleichung VI durch $y = \varphi_2(x, z)$ dargestellt wurde; und man erkennt an Reihe 46, dass die aus $y = \varphi_2(x, z)$ entstandenen und dem $y = 0$ nächstanliegenden Nachbarzustände vom Reellen ins Imaginäre oder umgekehrt übergehen, und dass dabei die Form $\delta y = \frac{0}{0} \cdot \delta z$ die Bedeutung $\delta y = \frac{\mathfrak{B}}{0} \cdot \delta z$ hat, d. h. dass dabei $\frac{0}{0} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$ ist.

Will man untersuchen, ob $U' = 0$ ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist; so darf man, wie bekannt, von den dem $U' = 0$ nächstanliegenden Nachbarzuständen nur diejenigen berücksichtigen, welche dadurch erzeugt werden, dass man an die Stelle des z und des y solche den für z und y gefundenen Functionen nächstanliegende Nachbarfunctionen einsetzt, die unter allen Umständen reell bleiben. Desshalb kann man, wenn man nur das Vorhandensein eines Maximum-standes oder Minimum-standes untersucht, auch nur die Reihe 45 an die Stelle des y in Gleichung II einsetzen; und setzt man noch $\mathfrak{U}$ anstatt U, so geht Gleichung II über in

$$47)\quad \left(\frac{1}{3x}\right)^3 \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{O})^6 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^6 \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{O})^9 + 9 \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^9 \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{O})^{12} \ldots\ldots$$
$$- (\varkappa \cdot \mathfrak{O})^2 \cdot \mathfrak{U} - \left(\frac{1}{3x}\right)^3 \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{O})^5 \cdot \mathfrak{U} - 3 \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^6 \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{O})^8 \cdot \mathfrak{U} \ldots\ldots$$
$$+ \mathfrak{U}^3 = 0$$

Daraus ergeben sich für $\mathfrak{U}$ folgende drei einförmige Reihen:

$$48)\quad \mathfrak{U} = \left(\frac{1}{3x}\right)^3 \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^4 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^6 \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^7 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

$$49)\quad \mathfrak{U} = (-1) \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} - \left(\frac{1}{3x}\right)^3 \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^4 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

$$50)\quad \mathfrak{U} = (+1) \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q}$$

Die Reihe 48 ist dieselbe, wie 27; und es gelten die schon dort gemachten Bemerkungen.

Die Reihe 49 ist dieselbe, wie 28; und es gelten die schon dort gemachten Bemerkungen.

Die Reihe 50, welche nur aus einem Gliede besteht, ist aus derjenigen Form des U entstanden, welche in Gleichung XV durch $U = \psi_3(x, z)$ dargestellt wurde. Sie gehört auch zu den drei einander gleichen Fällen, welche in Gleichung XXXVII, d. h. in der Gleichung $(U - z)^3 = 0$, enthalten sind, gleich am Anfange der ersten Auflösung ausgeschieden wurden, und dann im Verlaufe der ersten Auflösung nicht mehr vorkommen konnten. Auch erkennt man an Reihe 50, dass bei $z = 0$ der Ausdruck $U = \psi_3(x, z)$ weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand ist.

Nun ist noch zu untersuchen, wie die dem $U' = 0$ nächstanliegenden Nachbarzustände beschaffen sind, wenn man die Reihe 46 an die Stelle des y in Gleichung II einsetzt. Um aber beurtheilen zu können, welche Formen des $\mathfrak{Y}$ und des $\mathfrak{U}$ zusammengehören, zerlege man die Reihe 46 in ihre eindeutigen Formen

$$51)\quad \mathfrak{Y} = (3x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3x}\right) \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{Q}^2 - \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^{\frac{7}{2}} \,.\,.\,.\,.\,.$$

und

$$52)\quad \mathfrak{Y} = -(3x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3x}\right) \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{Q}^2 + \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{3x}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^{\frac{7}{2}} \,.\,.\,.\,.\,.$$

Führt man die Reihe 51 in Gleichung II ein, so gibt sich

$$53)\quad \mathfrak{U} = (+1) \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q}$$

und

$$54)\quad \mathfrak{U} = \left((3x)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left((\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} - \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{1}{(3x)^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left((\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{7}{2}} \,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

Die Reihe 53, welche einförmig ist, und nur aus einem Gliede besteht, ist aus derjenigen Form des U entstanden, welche in Gleichung XXVIII durch $U = \psi_3(x, z) = z$ dargestellt wurde. Uebrigens gelten bei Reihe 53 dieselben Bemerkungen, welche schon zu Reihe 50 gemacht worden sind.

Die Reihe 54, welche zweiförmig ist, ist aus derjenigen Form des U entstanden, welche in Gleichung XXV durch $U = \psi_4(x, z)$ dargestellt wurde; und man erkennt an Reihe 54, dass bei $z = 0$ der Ausdruck $U = \psi_4(x, z)$ ein Gränz-stand ist.

Führt man die Reihe 52 an die Stelle des y in Gleichung II ein, so bekommt man

$$55)\quad \mathfrak{U} = (+1) \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q}$$

und

$$56)\quad \mathfrak{U} = \left(-(3x)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} - \frac{5}{8} \cdot \left(-\frac{1}{(3x)^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left((\varkappa \,.\, \mathfrak{Q})^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{7}{2}} \,.\,.\,.\,.\,.$$

Die Reihe 55, welche einförmig ist, und nur aus einem Gliede besteht, ist aus derjenigen Form des U entstanden, welche in Gleichung XXXV durch $U = \psi_3(x, z) = z$

dargestellt wurde. Uebrigens gelten bei Reihe 55 dieselben Bemerkungen, welche schon zu Reihe 50 gemacht worden sind.

Die Reihe 56 ist aus derjenigen Form des U entstanden, welche in Gleichung XXXII durch $U = \psi_5(x, z)$ dargestellt wurde; und man erkennt an Reihe 56, dass bei $z = 0$ der Ausdruck $U = \psi_5(x, z)$ ein Gränz-stand ist.

Die beiden Beihen 54 und 56 sind in der einzigen Reihe 29 zugleich enthalten; und man vergleiche die dort gemachten Bemerkungen.

B) Setzt man $xU - y^2 = 0$, so bekommt man $U = \frac{y^2}{x}$; und Gleichung II geht über in $\frac{y^3}{x^3} \cdot (y^3 - 2 \cdot x^3) = 0$, so dass entweder $y = 0$ oder $y^3 - 2 \cdot x^3 = 0$ ist.

α) Nimmt man $y = 0$, so ist auch $z = 0$ und $U = 0$, welcher Fall schon vollständig untersucht ist.

β) Nimmt man $y^3 - 2 \cdot x^3 = 0$, so ist $y = x \cdot \sqrt[3]{2}$; da man aber nur reelle Functionen sucht, so kann auch nur $y = x \cdot \sqrt[3]{2}$ genommen werden. Um U' zu bestimmen, muss man $x \cdot \sqrt[3]{2}$ an die Stelle des y in Gleichung $x \cdot U - y^2 = 0$ und in $U^3 - 3xy \cdot U + y^3 = 0$ einführen, und zusehen, ob sich aus beiden Gleichungen einerlei Function für U ergibt. Die Gleichung $x \cdot U - y^2 = 0$ geht über in $x \cdot (U - x \cdot \sqrt[3]{4}) = 0$; und daraus folgt $U' = x \cdot \sqrt[3]{4}$. Die Gleichung $U^3 - 3xyU + y^3 = 0$ geht aber über in

$$(U - x \cdot \sqrt[3]{4}) \cdot \left(U - \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt{3}}\right) \cdot \left(U - \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 - \sqrt{3}}\right) = 0$$

woraus abermals $U' = x \cdot \sqrt[3]{4}$ folgt. Man erkennt also, dass nur $U' = x \cdot \sqrt[3]{4}$ berücksichtigt werden darf. Um z zu bestimmen, führe man $x \cdot \sqrt[3]{2}$ an die Stelle des y in Gleichung I ein, und sie geht über in

$$(z - x \cdot \sqrt[3]{4}) \cdot \left(z - \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt{3}}\right) \cdot \left(z - \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 - \sqrt{3}}\right) = 0$$

woraus entweder $z = x \cdot \sqrt[3]{4}$ oder $z = \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt{3}}$ folgt; und es fragt sich, ob man für z den zweiförmigen Ausdruck $\frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt{3}}$ oder den einförmigen $x \cdot \sqrt[3]{4}$ nehmen muss, oder ob man beide zugleich nehmen darf.

a) Nimmt man $z = \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt{3}}$, und mutirt man die Gleichung LII noch einmal; so bekommt man $\delta^2 U = - \frac{4 \cdot \sqrt[3]{2}}{3x} \cdot \delta z^2$, wie bei der ersten Auflösung; und man erkennt, dass bei $z = \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt{3}}$ und bei $y = x \cdot \sqrt[3]{2}$ das $U' = x \cdot \sqrt[3]{4}$ ein Maximum-stand oder Minimum-stand ist, je nachdem x positiv oder negativ ist.

b) Nimmt man $z = x \cdot \sqrt[3]{4}$, so ist jetzt $U' = z$, und Gleichung LII geht über in $\delta U = \frac{0}{0} \cdot \delta z$, so dass man die Bedeutung dieser unbestimmten Form durch directe Rei-

henentwickelung ermitteln muss; und wenn man dann findet, dass dem zu δz gehörigen Factor nicht die Bedeutung Null zukommt, so muss man die Verbindung von $U' = x \cdot \sqrt[3]{4}$ mit $z = x \cdot \sqrt[3]{4}$ verwerfen, eben weil dabei die hier gemachte Voraussetzung $\frac{d_z U}{dz} = 0$ nicht erfüllt wird. Man setzte also $\mathfrak{Y}$ an die Stelle des y, und $(x \cdot \sqrt[3]{4} + \varkappa \cdot \mathfrak{Q})$ an die Stelle des z in Gleichung I überall ein; so bekommt man

$$57)\quad 4x^3 + (6x^2 \cdot \sqrt[3]{2}) \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} + (3x \cdot \sqrt[3]{4}) \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{Q}^2 + \varkappa^3 \cdot \mathfrak{Q}^3$$
$$- (3x^2 \cdot \sqrt[3]{4}) \cdot \mathfrak{Y} - 3x \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{Y} + \mathfrak{Y}^3 = 0$$

Daraus folgt die mit $x \cdot \sqrt[3]{2}$ anfangende Reihe

$$58)\quad \mathfrak{Y} = x \cdot \sqrt[3]{2} + (-x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} \ldots\ldots\ldots$$

Diese Reihe repräsentirt zwei Formen des $\mathfrak{Y}$; die dritte Form des $\mathfrak{Y}$ gibt nicht die dem $y = x \cdot \sqrt[3]{2}$ nächstanliegenden Nachbarzustände, ist also nicht zu beachten. Weil aber die in 58 dargestellte Reihenform vom Reellen ins Imaginäre oder umgekehrt übergeht, so erkennt man schon jetzt, dass bei $z = x \cdot \sqrt[3]{4}$ das $U' = x \cdot \sqrt[3]{4}$ kein Maximum-stand und kein Minimum-stand ist.

Die dem $U' = x \cdot \sqrt[3]{4}$ nächstanliegenden Nachbarzustände werden jetzt nicht dadurch erzeugt, dass man an die Stelle des z und des y solche den für z und y gefundenen Functionen nächstanliegende Nachbarfunctionen einsetzt, die unter allen Umständen reell bleiben. Führt man aber dennoch die Reihe 58 in Gleichung II ein, so bekommt man

$$59)\quad \mathfrak{U} = \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \cdot (-3x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$60)\quad \mathfrak{U} = x \cdot \sqrt[3]{4} + \varkappa \cdot \mathfrak{Q}$$

Die Reihe 59 braucht nicht beachtet zu werden, weil es sich hier nur um die dem $U' = x \cdot \sqrt[3]{4}$ nächstanliegenden Nachbarzustände handelt. (Man sehe die zur Reihe 31 und 32 gemachte Bemerkung.)

Bei Reihe 60, welche die dem $U' = x \cdot \sqrt[3]{4}$ nächstanliegenden Nachbarzustände darstellt, hat die in Rede stehende unbestimmte Form $\delta U = \frac{0}{0} \cdot \delta z$ die Bedeutung $\delta U = (+1) \cdot \delta z$, d. h. es ist $\frac{0}{0} = +1$. Hier wird also nicht $\delta U = 0 \cdot \delta z$, d. h. es wird nicht $\frac{d_z U}{dz} = 0$; und somit widerspricht die Verbindung von $U' = x \cdot \sqrt[3]{4}$ mit $z = x \cdot \sqrt[3]{4}$ der Voraussetzung, ist also zu verwerfen.

Zweitens. Schaut man wieder auf Gleichung LII, und setzt man $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$; so ist entweder $U^2 - x \cdot y = 0$, oder $y^2 - x \cdot z = 0$.

A) Setzt man $U^2 - x \cdot y = 0$, so bekommt man $y = \frac{U^2}{x}$; und Gleichung II geht über in $U^3 \cdot (U^3 - 2 \cdot x^3) = 0$. Daraus folgt entweder $U = 0$ oder $U^3 - 2 \cdot x^3 = 0$.

α) Setzt man $U' = 0$, so ist auch $y = 0$ und $z = 0$, welcher Fall bereits vollständig untersucht ist.

β) Setzt man $U^3 - 2 \cdot x^3 = 0$, so ist $U' = x \cdot \sqrt[3]{2}$, und $y = \frac{U^2}{x} = x \cdot \sqrt[3]{4}$. Dabei geht Gleichung I über in

$$(z - x \cdot \sqrt[3]{2})^2 \cdot (z + 2x \cdot \sqrt[3]{2}) = 0$$

woraus $z = x \cdot \sqrt[3]{2}$ und $z = -2x \cdot \sqrt[3]{2}$ folgt, so dass noch untersucht werden muss, ob man für z den ersten oder zweiten Ausdruck nehmen soll, oder ob beide zugleich genommen werden dürfen.

Man untersuche zuerst, ob $z = -2x \cdot \sqrt[3]{2}$ genommen werden darf, und substituire desshalb $\mathfrak{Y}$ an die Stelle des y, und $(-2x \cdot \sqrt[3]{2} + \varkappa \cdot \mathfrak{Q})$ an die Stelle des z in Gleichung I; so geht sie über in

$$61) \quad -16x^3 + (12x^2 \cdot \sqrt[3]{4}) \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} - (6x \cdot \sqrt[3]{2}) \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{Q}^2 + \varkappa^3 \cdot \mathfrak{Q}^3$$
$$+ (6x^2 \cdot \sqrt[3]{2}) \cdot \mathfrak{Y} - 3x \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{Y} + \mathfrak{Y}^3 = 0$$

Daraus folgt die mit $x \cdot \sqrt[3]{4}$ anfangende Reihe

$$62) \quad \mathfrak{Y} = x \cdot \sqrt[3]{4} - \frac{3 \cdot \sqrt[3]{2}}{4} \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} + \frac{1}{32 \cdot x} \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{Q}^2 \ldots\ldots$$

Führt man diese Reihe an die Stelle des y in Gleichung II ein, so gibt sich folgende mit $x \cdot \sqrt[3]{2}$ anfangende zweiförmige Reihe

$$63) \quad \mathfrak{U} = x \cdot \sqrt[3]{2} + \frac{1}{2} \cdot (3x \cdot \sqrt[3]{2})^{\frac{1}{2}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots$$

und daran erkennt man, dass $U' = x \cdot \sqrt[3]{2}$ in Verbindung mit $z = -2x \cdot \sqrt[3]{2}$ ein Gränz-stand ist.

Verbindet man $U' = x \cdot \sqrt[3]{2}$ mit $z = x \cdot \sqrt[3]{2}$, so ist jetzt $U' = z$, und Gleichung LII geht über in $\delta U = \frac{0}{0} \cdot \delta z$, so dass man die Bedeutung dieser unbestimmten Form durch directe Reihenentwickelung ermitteln muss; und wenn man dann findet, dass dem zu δz gehörigen Factor nicht die Bedeutung $\frac{\mathfrak{B}}{0}$ zukommt, so muss man die Verbindung von $U' = x \cdot \sqrt[3]{2}$ mit $z = x \cdot \sqrt[3]{2}$ verwerfen, eben weil dabei die hier gemachte Voraussetzùng $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$ nicht erfüllt wird. Man setze also $\mathfrak{Y}$ an die Stelle des y, und $(x \cdot \sqrt[3]{2} + \varkappa \cdot \mathfrak{Q})$ an die Stelle des z in Gleichung I ein, so bekommt man

$$64) \quad 2x^3 + (3x^2 \cdot \sqrt[3]{4}) \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} + (3x \cdot \sqrt[3]{2}) \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{Q}^2 + \varkappa^3 \cdot \mathfrak{Q}^3$$
$$- (3x^2 \cdot \sqrt[3]{2}) \cdot \mathfrak{Y} - 3x \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{Y} + \mathfrak{Y}^3 = 0$$

Daraus gibt sich folgende mit $x \cdot \sqrt[3]{4}$ anfangende Reihe

$$65) \quad \mathfrak{Y} = x \cdot \sqrt[3]{4} - \frac{1}{x} \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{Q}^2 - \frac{2 \cdot \sqrt[3]{4}}{3 \cdot x^2} \cdot \varkappa^3 \cdot \mathfrak{Q}^3 \ldots\ldots$$

Führt man die Reihe an die Stelle des y in Gleichung II ein, so bekommt man folgende drei einförmige Reihen

$$66)\quad \mathfrak{U} = -2x\cdot\sqrt[3]{2} + \frac{8}{3x\cdot\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\varkappa^2\cdot\mathfrak{Q}^2}{1\cdot 2}\cdots\cdots$$

$$67)\quad \mathfrak{U} = x\cdot\sqrt[3]{2} - \varkappa\cdot\mathfrak{Q} - \frac{4}{3x\cdot\sqrt[3]{2}}\cdot\varkappa^2\cdot\mathfrak{Q}^2\cdots\cdots$$

$$68)\quad \mathfrak{U} = x\cdot\sqrt[3]{2} + \varkappa\cdot\mathfrak{Q}$$

Die Reihe 66 braucht nicht beachtet zu werden, weil es sich hier nur um die dem $U' = x\cdot\sqrt[3]{2}$ nächstanliegenden Nachbarzustände handelt.

Bei Reihe 67, welche wirklich einen Zustand darstellt, der dem $U' = x\cdot\sqrt[3]{2}$ nächstanliegt, hat die in Rede stehende unbestimmte Form $\delta U = \frac{0}{0}\cdot\delta z$ die Bedeutung $\delta U = (-1)\cdot\delta z$, d. h. es ist $\frac{0}{0} = -1$. Hier wird also nicht $\delta U = \frac{\mathfrak{B}}{0}\cdot\delta z$, d. h. es wird nicht $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$, und somit widerspricht die Verbindung $U' = x\cdot\sqrt[3]{2}$ mit $z = x\cdot\sqrt[3]{2}$ der Voraussetzung, ist also zu verwerfen.

Bei Reihe 68, welche gleichfalls einen Zustand darstellt, der dem $U' = x\cdot\sqrt[3]{2}$ nächstanliegt, hat die in Rede stehende unbestimmte Form $\delta U = \frac{0}{0}\cdot\delta z$ die Bedeutung $\delta U = (+1)\cdot\delta z$, d. h. es ist $\frac{0}{0} = +1$. Hier wird also wieder nicht $\delta U = \frac{\mathfrak{B}}{0}\cdot\delta z$ d. h. es wird wieder nicht $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$; und somit widerspricht auch jetzt die Verbindung von $U' = x\cdot\sqrt[3]{2}$ mit $z = x\cdot\sqrt[3]{2}$ der Voraussetzung, ist also auch jetzt zu verwerfen.

B) Setzt man $y^2 - xz = 0$, so ist $z = \frac{y^2}{x}$, und Gleichung I geht über in $\frac{y^3}{x^3}\cdot(y^3 - 2\cdot x^3) = 0$; daraus folgt $y = 0$ oder $y^3 - 2\cdot x^3 = 0$.

α) Setzt man $y = 0$, so ist auch $z = 0$ und $U' = 0$, welcher Fall bereits vollständig untersucht ist.

β) Setzt man $y^3 - 2x^3 = 0$, so ist $y = x\cdot\sqrt[3]{2}$, und $z = x\cdot\sqrt[3]{4}$. Setzt man noch $x\cdot\sqrt[3]{2}$ an die Stelle des y in Gleichung I ein, so geht sie über in

$$(z - x\cdot\sqrt[3]{4})\cdot[z + \frac{x}{2}\cdot(1 + \sqrt{3})\cdot\sqrt[3]{4}]\cdot[z + \frac{x}{2}\cdot(1 - \sqrt{3})\cdot\sqrt[3]{4}] = 0$$

woraus abermals $z = x\cdot\sqrt[3]{4}$ folgt. Setzt man aber $x\cdot\sqrt[3]{2}$ an die Stelle des y in Gleichung II ein, so geht sie über in

$$(U - x\cdot\sqrt[3]{4})\cdot[U + \frac{x}{2}\cdot(1 + \sqrt{3})\cdot\sqrt[3]{4}]\cdot[U + \frac{x}{2}\cdot(1 - \sqrt{3})\cdot\sqrt[3]{4}] = 0$$

woraus $U' = x\cdot\sqrt[3]{4}$ und $U' = \frac{x\cdot\sqrt[3]{4}}{1 + \mathfrak{W}3}$ folgt; und es fragt sich, ob man für U' den zweiförmigen Ausdruck $\frac{x\cdot\sqrt[3]{4}}{1 + \mathfrak{W}3}$ oder den einförmigen $x\cdot\sqrt[3]{4}$ nehmen soll.

Man untersuche zuerst, ob $U' = \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{3}}$ genommen werden darf, und setze desshalb $\mathfrak{Y}$ an die Stelle des y, und $(x \cdot \sqrt[3]{4} + \varkappa \cdot \mathfrak{Q})$ an die Stelle des z in Gleichung I ein; so bekommt man die zweiförmige Reihe

$$69)\quad \mathfrak{Y} = x \cdot \sqrt[3]{2} + (-x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} \ldots\ldots\ldots$$

Die andere Reihe, welche nur einförmig ist, fängt nicht mit $x \cdot \sqrt[3]{2}$ an, ist also nicht zu beachten. Weil nun die Reihe 69 vom Reellen ins Imaginäre oder umgekehrt übergeht, so erkennt man schon jetzt, dass $U' = \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{3}}$ weder ein Maximum-stand noch Minimum-stand ist; denn die dem $U' = \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{3}}$ nächstanliegenden Nachbarzustände werden nicht dadurch erzeugt, dass man an die Stelle des z und des y solche den für z und y gefundenen Functionen nächstanliegende Nachbarfunctionen einsetzt, die unter allen Umständen reell bleiben. Führt man aber dennoch die Reihe 69 in Gleichung II ein, so bekommt man

$$70)\quad \mathfrak{U} = x \cdot \sqrt[3]{4} + \varkappa \cdot \mathfrak{Q}$$

und

$$71)\quad \mathfrak{U} = \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \cdot (-3x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Reihe 70 braucht nicht beachtet zu werden, weil es sich hier nur um die dem $U' = \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{3}}$ nächstanliegenden Nachbarzustände handelt.

An Reihe 71 aber erkennt man, dass $U' = \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{3}}$ ein Gränz-stand ist. (Man sehe die zu den Reihen 31 und 32 gemachte Bemerkung.)

Verbindet man $U' = x \cdot \sqrt[3]{4}$ mit $z = x \cdot \sqrt[3]{4}$, so ist jetzt $U' = z$, und Gleichung LII geht über in $\delta U = \frac{0}{0} \cdot \delta z$, so dass man die Bedeutung dieser unbestimmten Form durch directe Reihenentwickelung ermitteln muss; und wenn man dann findet, dass dem zu δz gehörigen Factor nicht die Bedeutung $\frac{\mathfrak{B}}{0}$ zukommt, so muss man die Verbindung von $U' = x \cdot \sqrt[3]{4}$ mit $z = x \cdot \sqrt[3]{4}$ verwerfen, eben weil die hier gemachte Voraussetzung $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$ nicht erfüllt wird. Man setze also $\mathfrak{Y}$ an die Stelle des y, und $(x \cdot \sqrt[3]{4} + \varkappa \cdot \mathfrak{Q})$ an die Stelle des z in Gleichung I ein, so bekommt man

$$72)\quad 4x^3 + (6x^2 \cdot \sqrt[3]{2}) \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} + (3x \cdot \sqrt[3]{4}) \cdot \varkappa^2 \cdot \mathfrak{Q}^2 + \varkappa^3 \cdot \mathfrak{Q}^3$$
$$- (3x^2 \cdot \sqrt[3]{4}) \cdot \mathfrak{Y} - 3x \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{Y} + \mathfrak{Y}^3 = 0$$

Die mit $x \cdot \sqrt[3]{2}$ anfangende Reihe, welche daraus folgt, ist

$$73)\quad \mathfrak{Y} = x \cdot \sqrt[3]{2} + (-x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \cdot \varkappa \cdot \mathfrak{Q} \ldots\ldots$$

und wenn man diese Reihe an die Stelle des y in Gleichung II einsetzt, so bekommt man

$$73)\quad \mathfrak{U} = \frac{x \cdot \sqrt[3]{4}}{1 + \sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \cdot (-3x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\varkappa \cdot \mathfrak{Q})^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots$$

und

$$74)\quad \mathfrak{U} = x \cdot \sqrt[3]{4} + \varkappa \cdot \mathfrak{Q}$$

Die Reihe 73 braucht nicht beachtet zu werden, weil es sich hier nur um die dem $U' = x \cdot \sqrt[3]{4}$ nächstanliegenden Nachbarzustände handelt.

Bei Reihe 74, welche wirklich einen Zustand darstellt, der dem $U' = x \cdot \sqrt[3]{4}$ nächstanliegt, hat die in Rede stehende unbestimmte Form $\delta U = \frac{0}{0} \cdot \delta z$ die Bedeutung $\delta U = (+1) \cdot \delta z$, d. h. es ist $\frac{0}{0} = +1$. Hier wird also nicht $\delta U = \frac{\mathfrak{B}}{0} \cdot \delta z$, d. h es wird nicht $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$; und somit widerspricht die Verbindung von $U' = x \cdot \sqrt[3]{4}$ mit $z = x \cdot \sqrt[3]{4}$ der Voraussetzung, ist also zu verwerfen.

Nun ist die zweite Auflösung in der Weise durchgeführt, dass man bei ihr von Stufe zu Stufe dieselben Resultate bekam, wie bei der ersten Auflösung.

Dritte Auflösung.

Wenn man die identische Gleichung I mit einer (vorerst unbekannten, jedenfalls aber) nichtmutablen Function $\mathfrak{L}$ von x multiplicirt, so ist das Product $\mathfrak{L} \cdot (y^3 - 3xyz + z^3)$ auch noch eine identische Gleichung; und wenn man dieses Product zu Gleichung II addirt, so ist die sich ergebende Summe gleichfalls eine identische Gleichung, d. h. es ist bei jedem beliebigen Werthe des x immer noch

$$\text{LIV)}\quad U^3 - 3xy \cdot U + y^3 + \mathfrak{L} \cdot (y^3 - 3xyz + z^3) = 0$$

Mutirt man, so bekommt man

$$\text{LV)}\quad (U^2 - xy) \cdot \delta U + (y^2 - xU + \mathfrak{L} \cdot y^2 - \mathfrak{L}xz) \cdot \delta y + (\mathfrak{L} \cdot z^2 - \mathfrak{L} \cdot xy) \cdot \delta z = 0$$

und

$$\text{LVI)}\quad (U^2 - xy) \cdot \delta^2 U + (y^2 - xU + \mathfrak{L} \cdot y^2 - \mathfrak{L}xz) \cdot \delta^2 y + (\mathfrak{L} \cdot z^2 - \mathfrak{L} \cdot xy) \cdot \delta^2 z$$
$$+ 2U \cdot \delta U^2 - 2x \cdot \delta U \cdot \delta y + (2y + 2\mathfrak{L}y) \cdot \delta y^2 - 2\mathfrak{L}x \cdot \delta y \cdot \delta z + 2\mathfrak{L}z \cdot \delta z^2 = 0$$

Nun soll der für δU herzustellende Ausdruck von dem mittelbaren Mutationscoefficient δy ganz frei sein; man denke sich also unter $\mathfrak{L}$ eine solche Function von x, dass die identische Gleichung

$$\text{LVII)}\quad y^2 - xU + \mathfrak{L} \cdot y^2 - \mathfrak{L} \cdot x \cdot z = 0$$

stattfindet; dabei reduciren sich die Gleichungen LV und LVI bezüglich auf

$$\text{LVIII)}\quad (U^2 - xy) \cdot \delta U + (\mathfrak{L} \cdot z^2 - \mathfrak{L}xy) \cdot \delta z = 0$$

und

$$\text{LIX)}\quad (U^2 - xy) \cdot \delta^2 U + (\mathfrak{L}z^2 - \mathfrak{L}xy) \cdot \delta^2 z + 2U \cdot \delta U^2$$
$$- 2x \cdot \delta U \cdot \delta y + (2y + 2\mathfrak{L}y) \cdot \delta y^2 - 2\mathfrak{L}x \cdot \delta y \cdot \delta z + 2\mathfrak{L}z \cdot \delta z^2 = 0$$

Aus LVIII folgt

$$\text{LX)}\quad \delta U = \mathfrak{L} \cdot \frac{x \cdot y - z^2}{U^2 - xy} \cdot \delta z$$

Erstens. Lässt man den zu δz gehörigen Factor zu Null werden, d. h. setzt man $\frac{d_z U}{dz} = 0$; so ist entweder $xy - z^2 = 0$, oder $\mathfrak{L} = 0$, während $\mathfrak{L}$ sich aus Gleichung LVII ergibt.

Zweitens. Will man dem zu δz gehörigen Factor, d. h. dem Quotienten $\frac{d_z U}{dz}$ die Form $\frac{\mathfrak{B}}{0}$ geben; so eliminire man zuerst $\mathfrak{L}$ aus LX, was mittelst Gleichung LVII geschieht.

Man hat an früheren Aufgaben zur Genüge gesehen, dass die Eigenthümlichkeiten, wodurch sich diese dritte Auflösung von der zweiten unterscheiden könnte, in weiter nichts bestehen, als darin, dass man, wo es nöthig ist, die Function $\mathfrak{L}$ wieder eliminirt. Desshalb soll auch diese dritte Auflösung nicht besonders durchgeführt werden.

Aufgabe 54.

Man sucht für y und z solche Functionen von x, dass dadurch nicht allein folgende Gleichungen

$$\text{I)}\quad U^3 + y^3 + z^3 = Uyz$$

$$\text{II)}\quad U^3 + Uyz = x^3$$

identisch werden, sondern dass auch das U selbst ein Maximum-stand oder Minimumstand wird.

Da die beiden Elemente y und z in den zwei Gleichungen vorkommen, so ist es einerlei, ob man y oder z als unmittelbar mutabel behandelt.

Man führe die Aufgabe wieder so durch, dass z als unmittelbar mutabel behandelt wird.

Eliminirt man y aus I und II schon vor dem Mutiren, so bekommt man

$$\text{III)}\quad U^9 - 2U^6 \cdot z^3 - 3U^6 \cdot x^3 - U^3 \cdot z^6 + 3U^3 \cdot x^6 + U^3 \cdot z^3 \cdot x^3 - x^9 = 0$$

Daraus folgt durch Mutiren

$$\text{IV)}\quad \delta U = \frac{U \cdot z^2 \cdot (2U^3 + 2z^3 - x^3)}{3U^6 - 4U^3 \cdot z^3 - 6U^3x^3 + 3x^6 - z^6 + 3x^3 \cdot z^3} \cdot \delta z$$

Erstens. Setzt man $\frac{d_z U}{dz} = 0$, so ist entweder $U = 0$, oder $z = 0$, oder $2U^3 + 2z^3 - x^3 = 0$

A) Bei $U = 0$ geht Gleichung III über in $-x^9 = 0$, welches ein Widerspruch gegen die Voraussetzung ist, da x jeden beliebigen Werth soll annehmen dürfen.

B) Bei $z = 0$ geht Gleichung III über in

$$\text{V)}\quad U^9 - 3U^6 \cdot x^3 + 3U^3 \cdot x^6 - x^9 = 0$$

oder

$$\text{VI)}\quad (U^3 - x^3)^3 = 0$$

Daraus folgt $U = x \cdot \sqrt[3]{1}$; weil aber nur reelle Functionen berücksichtigt werden dürfen, so darf man nur $U' = x$ setzen. Gleichung I und II gehen dabei bezüglich über in $x^3 + y^3 = 0$ und $x^3 = x^3$; aus der zweiten dieser Gleichungen folgt nichts, aber aus der ersten folgt $y = -x$, so dass $z = 0$, $y = -x$ und $U' = x$ die hier zusammengehörigen Functionen sind. Dabei ist aber $\delta U = \frac{0}{0} \cdot \delta z$, so dass man das Prüfungsmittel, sowie die Bedeutung dieser unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ durch directe Reihenentwickelung gewinnen muss.

C) Nun hat man noch $2U^3 + 2z^3 - x^3 = 0$ mit Gleichung III zu verbinden, und daraus zusammengehörige Functionen für U und für z aufzusuchen. Sind z. B. $z = \chi(x)$ und $U = \psi(x)$ zwei zusammengehörige Functionen, so führe man sie in I und II ein, welche dabei übergehen in

$$\text{I)}\quad (\psi(x))^3 + y^3 + (\chi(x))^3 = y \cdot (\chi(x)) \cdot (\psi(x))$$

$$\text{II)}\quad (\psi(x))^3 + y \cdot (\chi(x)) \cdot (\psi(x)) = x^3$$

und wenn man aus diesen beiden Gleichungen nicht eine und dieselbe Function für y bekommt; so muss dieser dritte Fall verworfen werden.

Zweitens. Setzt man $\frac{d_z U}{dz} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$, so ist

$$\text{VII)}\quad 3U^6 - 4U^3 \cdot z^3 - 6U^3 \cdot x^3 + 3x^6 - z^6 + 3x^3 \cdot z^3 = 0$$

Diese Gleichung muss man mit III verbinden, und für U und z zusammengehörige Functionen aufsuchen. Hierauf muss man diese zusammengehörigen Functionen in I und II einführen, und zusehen, ob aus beiden Gleichungen für y eine und dieselbe Function folgt.

Will man lieber die indirecte Eliminationsmethode mittelst eines Multiplicators anwenden, so verwandle man I und II in folgende Gleichungen:

$$\text{I)}\quad U^3 + y^3 + z^3 - Uyz = 0$$

$$\text{II)}\quad U^3 + Uyz - x^3 = 0$$

Beide Gleichungen sind identische. Nun denke man sich unter $\mathfrak{L}$ eine (vorerst unbekannte, jedenfalls aber) nichtmutable Function von x, so ist das Product $\mathfrak{L} \cdot (U^3 + Uyz - x^3)$ auch noch eine identische Gleichung; und wenn man dieses Product zu I addirt, so ist die sich ergebende Summe gleichfalls eine identische Gleichung, d. h. es ist bei jedem beliebigen Werthe des x immer noch

$$\text{VIII)}\quad U^3 + y^3 + z^3 - Uyz + \mathfrak{L} \cdot (U^3 + Uyz - x^3) = 0$$

Mutirt man diese Gleichung, so bekommt man

$$\text{IX)}\quad (3U^2 - yz + 3\mathfrak{L} \cdot U^2 + \mathfrak{L} \cdot yz) \cdot \delta U + (3y^2 - Uz + \mathfrak{L} \cdot Uz) \cdot \delta y + (3z^2 - Uy + \mathfrak{L} \cdot Uy) \cdot \delta z = 0$$

Nun soll der für δU herzustellende Ausdruck von dem mittelbaren Mutationscoefficient δy ganz frei sein; man denke sich also unter $\mathfrak{L}$ eine solche Function von x, dass die identische Gleichung

$$\text{X)}\quad 3y^2 - Uz + \mathfrak{L} \cdot Uz = 0$$

stattfindet. Dabei reducirt sich IX auf

$$\text{XI)}\quad (3U^2 - yz + 3\mathfrak{L} \cdot U^2 + \mathfrak{L} \cdot yz) \cdot \delta U + (3z^2 - Uy + \mathfrak{L} \cdot Uy) \cdot \delta z = 0$$

woraus weiter

$$\text{XII)}\quad \delta U = -\frac{3z^2 - Uy + \mathfrak{L} \cdot Uy}{3U^2 - yz + 3\mathfrak{L} \cdot U^2 + \mathfrak{L} \cdot yz} \cdot \delta z$$

folgt. Und so fort.

Aufgabe 55.

Welche unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven hat in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft, dass sie folgenden Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = a^2 - y^2 + 2y \cdot y_a - y_a^2 - 2xy - 2ay_a$$

der aus der festen Abscisse a und der zugehörigen Ordinate y_a sowie aus einer nach Belieben gewählten Abscisse x und der zugehörigen Ordinate y zusammengesetzt ist,

grösser oder kleiner macht, als ihn bei derselben beliebig gewählten Abscisse x alle andern der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven machen können?

Durch Mutiren bekommt man

$$\text{II)}\quad \delta U = -2\cdot(y - y_a + x)\cdot\delta y - 2\cdot(y_a - y + a)\cdot\delta y_a$$

$$\text{III)}\quad \delta^2 U = -2\cdot(y - y_a + x)\cdot\delta^2 y - 2\cdot(y_a - y + a)\cdot\delta^2 y_a$$
$$-2\cdot\delta y^2 + 4\cdot\delta y\cdot\delta y_a - 2\cdot\delta y_a^2\quad .$$

Erster Fall. Soll die gesuchte Curve aus allen möglichen einander stetsfort nächstanliegenden herausgesucht werden, so sind (nach §. 92) die Ausdrücke δy und δy_a dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander; und es muss (nach §. 164) Gleichung II in folgende zwei gleichzeitig bestehende identische Gleichungen

$$\text{IV)}\quad y - y_a + x = 0,\ \text{und}\qquad \text{V)}\quad y_a - y + a = 0$$

zerfallen. Aus IV folgt $y_a = y + x$, und aus V folgt $y_a = y - a$, so dass sich die sich selbst widersprechende Gleichung $y + x = y - a$ ergeben würde. Hiermit erkennt man, dass die Aufgabe in der Allgemeinheit, wie sie dieser erste Fall verlangt, unmöglich ist.

Zweiter Fall. Soll man die gesuchte Curve nur aus denen einander stetsfort nächstanliegenden herauswählen, bei welchen allen die Ordinate y_a den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth hat; so findet zwischen den zur Abscisse a gehörigen Ordinaten aller hier in Betracht zu ziehenden Curven folgende Gleichung

$$y_a = y_a + \varkappa\cdot\delta y_a + \frac{\varkappa^2}{1.2}\cdot\delta^2 y_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3}\cdot\delta^3 y_a + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

statt. Da aber diese Gleichung für ein im Momente des Verschwindens befindliches $\varkappa$ gelten soll, so muss einzeln stattfinden $\delta y_a = 0$, $\delta^2 y_a = 0$ etc. Die Gleichungen II und III reduciren sich also auf

$$\text{VI)}\quad \delta U = -2\cdot(y - y_a + x)\cdot\delta y$$

$$\text{VII)}\quad \delta^2 U = -2\cdot(y - y_a + x)\cdot\delta^2 y - 2\cdot\delta y^2$$

Man hat daher jetzt nur die einzige identische Gleichung

$$\text{VIII)}\quad y - y_a + x = 0$$

Daraus folgt $y = y_a - x$; und wenn man C statt des constanten Ausdruckes y_a in Gleichung VIII einsetzt, so bekommt man

$$\text{IX)}\quad y = C - x$$

Um aber zu untersuchen, ob diese Function die Gleichung VIII identisch macht, setze man $(C - x)$ statt y, und $(C - a)$ statt y_a in VIII ein; und man bekommt

$$\text{X)}\quad (C - x) - (C - a) + x = 0$$

welche Gleichung aber nur unter der einzigen Bedingung wahr ist, dass $a = 0$. Daraus folgt, dass dieser zweite Fall nur dann beachtet werden kann, wenn $a = 0$. Dabei bleibt aber der Constante C immer noch unbestimmt, und zu seiner Bestimmung muss noch irgend eine Nebenbedingung gegeben sein.

1) Ist z. B. vorgeschrieben, dass bei $x = 0$ die Ordinate den bestimmt gegebenen Werth A habe; so folgt aus Gleichung IX, dass $A = C$; und Gleichung IX formt sich für die hier gestellte Bedingung um in

$$\text{XI)}\quad y = A - x$$

Dieses ist die Gleichung einer Graden, von welcher da, wo $x = A$, die Abscissenaxe unter einem halben rechten Winkel geschnitten wird. Unter der hiesigen Voraussetzung, wo $a = 0$, gehen nun die Gleichungen I und VII über in $U' = x\cdot(x - 2A)$ und $\delta^2 U = -2\cdot\delta y^2$, so dass jetzt ein Maximum-stand stattfindet.

2) Ist aber vorgeschrieben, dass zur Abscisse n die bestimmte Ordinate m gehöre;

so geht dabei Gleichung IX über in $m = C - n$, woraus $C = m + n$ folgt; und Gleichung IX formt sich um in

$$y = (m + n) - x$$

Dieses ist die Gleichung einer Graden, von welcher da, wo $x = m + n$ ist, die Abscissenaxe unter einem halben rechten Winkel geschnitten wird. Jetzt gehen die Gleichungen I und VII über in $U' = x \cdot (x - 2m - 2n)$, und $\delta^2 U = - 2 \cdot \delta y^2$, so dass abermals ein Maximum-stand stattfindet.

Aufgabe 56.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Curve. In der Ebene, worin die gesuchte Curve liegt, befindet sich irgend ein fester Punkt (n, m). Man zieht durch diesen festen Punkt und durch den zur Abscisse a gehörigen Punkt der gesuchten Curve eine Grade. Man nimmt auch den zu einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt (x, y) der gesuchten Curve, zieht zu diesem Punkte die Ordinate, und fällt hierauf von dem nemlichen Punkte ein Perpendikel auf die vorhin gezogene Grade. Welche ebene Curve ist es aber, wenn der zu der grade genommenen Abscisse x gehörige Punkt die Eigenschaft hat, dass die Summe der Quadrate der besagten Ordinate und des besagten Perpendikels ein Maximum-stand oder Minimum-stand, d. h. grösser oder kleiner wird, als bei den zu der nemlichen Abscisse x gehörigen Punkten aller andern der gesuchten Curve stetsfort nächstanliegenden Nachbarcurven der Fall sein kann?

Unter einem festen Puncte (n, m) versteht man bekanntlich einen solchen Punkt, dessen Abscisse $= n$. und dessen auf der Abscissenaxe senkrechte Ordinate $= m$.

Die Entfernung eines Punktes (x, y) von einer durch die Gleichung

$$\text{I)}\quad y' + A \cdot x' + B = 0$$

gegebenen Graden ist bekanntlich

$$\text{II)}\quad \frac{y + Ax + B}{\sqrt{1 + A^2}}$$

Die durch I gegebene Grade soll durch den Punkt (n, m) gehen; für diesen Punkt geht also I über in

$$m + A \,.\, n + B = 0$$

Dieselbe Grade soll auch durch den Punkt der gesuchten Curve gehen, dessen Abscisse $= a$ und dessen Ordinate $= y_a$; für diesen Punkt geht also Gleichung I über in

$$y_a + A \,.\, a + B = 0$$

Bestimmt man aus den beiden letzteren Gleichungen A und B, so geht Gleichung I über in

$$\text{III)}\quad y' - \frac{y_a - m}{a - n} \,.\, x' + \frac{n \cdot y_a - m \,.\, a}{a - n} = 0$$

und der Ausdruck II geht über in

$$\text{IV)}\quad \frac{(a - n) \cdot y - (y_a - m) \,.\, x + n \,.\, y_a - m \,.\, a}{\sqrt{(a - n)^2 + (y_a - m)^2}}$$

Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe durchaus nicht, aber ihre Durchführung wird vereinfacht, wenn man sich den festen Punkt (n, m) im Anfangspunkte der Coordinaten befindlich denkt. Dabei ist $n = 0$ und $m = 0$; und der Ausdruck IV reducirt sich auf

$$\text{V)}\quad \frac{a \,.\, y - y_a \cdot x}{\sqrt{a^2 + y_a^2}}$$

Die hier gestellte Aufgabe führt also zunächst auf den allgemeinen Ausdruck

$$\text{VI)}\quad U = y^2 + \frac{(ay - y_a . x)^2}{a^2 + y_a^2}$$

Man mutire, so gibt sich zunächst

$$\text{VII)}\quad \delta U = \frac{2 . (2a^2 . y + y_a^2 . y - a . y_a . x)}{a^2 + y_a^2} . \delta y - \frac{2a . (ay - y_a . x) . (ax + y . y_a)}{(a^2 + y_a^2)^2} . \delta y_a$$

Erster Fall. Soll die gesuchte Curve aus allen möglichen einander stetsfort nächstanliegenden herausgesucht werden, so sind (nach §. 92) die Ausdrücke δy und δy_a dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander; und es muss (nach §. 164) Gleichung VII in folgende zwei gleichzeitig bestehende identische Gleichungen zerfallen:

$$\text{VIII)}\quad 2a^2 . y + y_a^2 . y - a . y_a . x = 0$$

$$\text{IX)}\quad (a . y - y_a . x) . (ax + y_a . y) = 0$$

Die Gleichung IX wird aber erfüllt, entweder wenn $a . y - y_a . x = 0$ oder wenn $a . x + y_a . y = 0$.

Erstens. Man verbinde Gleichung VIII mit $a . x + y_a . y = 0$. Aus letzterer Gleichung folgt $y_a = -\frac{a . x}{y}$; und wenn man diesen für y_a gefundenen Ausdruck in VIII einsetzt, so bekommt man $\frac{2 . a^2}{y} . (x^2 + y^2) = 0$, woraus

$$\text{X)}\quad y = x . \sqrt{-1}$$

folgt. Führt man diesen für y gefundenen Ausdruck in $y_a = -\frac{ax}{y}$ ein, so bekommt man $y_a = -\frac{ax}{x . \sqrt{-1}} = a . \sqrt{-1}$, welches derselbe Ausdruck ist, wie wenn man a an die Stelle des x in Gleichung X eingesetzt hätte. Die hier für y gefundene Function ist aber eine imaginäre, braucht also nicht beachtet zu werden.

Zweitens. Man verbinde Gleichung VIII mit $a . y - y_a . x = 0$. Aus letzterer Gleichung folgt $y_a = \frac{ay}{x}$; und wenn man diesen für y_a gefundenen Ausdruck in VIII einsetzt, so bekommt man $a^2 . (x^2 + y^2) . y = 0$, welche Gleichung erfüllt wird, entweder wenn $x^2 + y^2 = 0$ oder wenn $y = 0$ ist.

A) Aus $x^2 + y^2 = 0$ folgt $y = x . \sqrt{-1}$, d. h. eine imaginäre Function, welche nicht weiter beachtet zu werden braucht.

B) Ist $y = 0$, d. h. ist y eine identische Function von x, so hat man die in die Abscissenaxe fallende Grade. Dabei ist $U' = 0$, und

$$\delta^2 U = \left(2 . \delta y - \frac{x}{a} . \delta y_a\right)^2 + \left(\frac{x}{a} . \delta y_a\right)^2$$

woran man erkennt, dass ein Minimum-stand stattfindet.

Zweiter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung, wie beim zweiten Falle der vorigen Aufgabe; so reducirt sich Gleichung VII auf

$$\text{XI)}\quad \delta U = \frac{2 . (2a^2 . y + y_a^2 . y - a . y_a . x)}{a^2 + y_a^2} . \delta y$$

Man hat also jetzt nur die einzige identische Gleichung

$$\text{XII)}\quad 2a^2 . y + y_a^2 . y - a . y_a . x = 0$$

und daraus folgt $y = \frac{a . y_a}{2 . a^2 + y_a^2} . x$. Man setze C statt des bei x befindlichen constanten Factors, so bekommt man

$$\text{XIII)}\quad y = C \cdot x$$

Führt man nun $C \cdot x$ an die Stelle von y, und $C \cdot a$ an die Stelle von y_a in XII ein; so bekommt man $a^2 \cdot (1 + C^2) \cdot Cx = 0$, woran man erkennt, dass $C = 0$ sein muss, wenn XII durch XIII identisch werden soll. Die hier gesuchte Function ist also

$$\text{XIV)}\quad y = 0$$

d. h. y ist eine identische Function von x, und man hat die in die Abscissenaxe fallende Grade. Dabei ist wieder $U' = 0$; und ferner ist $\delta^2 U = 4 \cdot \delta y^2$, woran man erkennt, dass ein Minimum-stand stattfindet.

Aufgabe 57.

Man sucht eine auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogene ebene Curve. In der Ebene, worin die gesuchte Curve liegt, befindet sich irgend ein fester Punkt (n, m). Man zieht durch diesen festen Punkt (n, m) und durch den zu einer nach Belieben gewählten Abscisse x gehörigen Punkt (x, y) der gesuchten Curve eine grade Linie. Von den beiden in dieser Curve gelegenen Punkten (a, y_a) und (α, y_α) fällt man Perpendikel auf besagte Grade. Bei welcher ebenen Curve ist aber das Product dieser beiden Perpendikel ein Maximum-stand oder Minimum-stand?

Die Entfernung des Punktes (a, y_a) der gesuchten Curve bis zu der durch die Gleichung

$$\text{I)}\quad y' + A \cdot x' + B = 0$$

gegebenen Graden ist bekanntlich

$$\text{II)}\quad \frac{y_a + A \cdot a + B}{\sqrt{1 + A^2}}$$

Ebenso ist des Punktes (α, y_α) der gesuchten Curve Entfernung bis zu der durch Gleichung I gegebenen Graden bekanntlich

$$\text{III)}\quad \frac{y_\alpha + A \cdot \alpha + B}{\sqrt{1 + A^2}}$$

Da die durch I gegebene Grade durch den festen Punkt (n, m) gehen soll, so geht dafür I über in

$$m + A \cdot n + B = 0$$

Da ferner dieselbe Grade durch den Punkt (x, y) der gesuchten Curve gehen soll, so geht dafür I über in

$$y + A \cdot x + B = 0$$

Bestimmt man aus den beiden letzten Gleichungen A und B, so geht Gleichung I über in

$$\text{IV)}\quad y' - \frac{y - m}{x - n} \cdot x' + \frac{ny - mx}{x - n} = 0$$

Die Ausdrücke II und III gehen also jetzt über in

$$\text{V)}\quad \frac{(x - n) \cdot y_a - (y - m) \cdot a + ny - mx}{\sqrt{(x - n)^2 + (y - m)^2}}$$

und

$$\text{VI)}\quad \frac{(x - n) \cdot y_\alpha - (y - m) \cdot \alpha + ny - mx}{\sqrt{(x - n)^2 + (y - m)^2}}$$

Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe durchaus nicht, dagegen ihre Durchführung wird vereinfacht, wenn man sich den festen Punkt (n, m) im Anfangspunkte der Coordinaten befindlich denkt. Dabei ist $n = 0$ und $m = 0$, und die Ausdrücke V und VI reduciren sich auf

$$\text{VII)}\ \frac{x \cdot y_a - a \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ und VIII)}\ \frac{x \cdot y_\alpha - \alpha \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Das in der Aufgabe verlangte Product ist also

$$\text{IX)}\ U = \frac{(x \cdot y_a - a \cdot y) \cdot (x \cdot y_\alpha - \alpha \cdot y)}{x^2 + y^2}$$

Durch Mutiren bekommt man zunächst

$$\text{X)}\ \delta U = -\frac{x}{x^2 + y^2} \cdot (\alpha \cdot y - x \cdot y_\alpha) \cdot \delta y_a - \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot (a \cdot y - x \cdot y_a) \cdot \delta y_\alpha$$
$$+ \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (2a\alpha \cdot x^2 \cdot y - a \cdot x^3 \cdot y_\alpha - \alpha \cdot x^3 \cdot y_a + ax \cdot y^2 \cdot y_\alpha$$
$$+ \alpha x \cdot y^2 \cdot y_a - 2x^2 \cdot y \cdot y_a \cdot y_\alpha) \cdot \delta y$$

Erster Fall. Soll die gesuchte Curve aus allen möglichen einander stetsfort nächstanliegenden herausgewählt werden, so sind (nach §. 92) die Ausdrücke δy, δy_a und δy_α dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander; und es muss (nach §. 170) Gleichung X in folgende drei identische Gleichungen zerfallen:

$$\text{XI)}\ 2a\alpha \cdot x^2 \cdot y - a \cdot x^3 \cdot y_\alpha - \alpha \cdot x^3 \cdot y_a + ax \cdot y^2 \cdot y_\alpha$$
$$+ \alpha x \cdot y^2 \cdot y_a - 2x^2 \cdot y \cdot y_a \cdot y_\alpha = 0$$

$$\text{XII)}\ \alpha \cdot y - x \cdot y_\alpha = 0$$

$$\text{XIII)}\ a \cdot y - x \cdot y_a = 0$$

Aus XII und XIII folgt $y = \frac{y_\alpha}{\alpha} \cdot x$, und $y = \frac{y_a}{a} \cdot x$. Diese beiden Gleichungen liefern aber $\frac{y_\alpha}{\alpha} = \frac{y_a}{a}$. Man setze also vorerst $\frac{y_\alpha}{\alpha} = \frac{y_a}{a} = C$, und aus den Gleichungen XII und XIII folgt gleichzeitig

$$\text{XIV)}\ y = C \cdot x$$

Führt man nun $C \cdot x$ an die Stelle von y, $C \cdot a$ an die Stelle von y_a, und $C \cdot \alpha$ an die Stelle von y_α in XI, XII, XIII ein, so geht dabei XI über in

$$2C \cdot a\alpha \cdot x^3 - 2C^3 \cdot a\alpha \cdot x^3 + C^3 \cdot a\alpha \cdot x^3 - C \cdot a\alpha \cdot x^3 + C^3 \cdot a \cdot \alpha \cdot x^3$$
$$- C \cdot a\alpha \cdot x^3 = 0$$

ist also identisch. Gleichung XII geht über in

$$C\alpha x - C\alpha x = 0$$

ist also gleichfalls identisch. Gleichung XIII geht über in

$$Cax - Cax = 0$$

ist also auch identisch; und somit erkennt man, dass die durch die Gleichung XIV gegebene grade Linie, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, die hier gesuchte Curve ist. Da ferner keine Bedingung existirt, welche der Constante C zu erfüllen hat; so kann man ihn jeder beliebigen Bedingung unterwerfen, z. B. die gesuchte Curve soll durch den festen Punkt (k, h) gehen. Dabei geht Gleichung XIV über in $h = C \cdot k$, also ist $C = \frac{h}{k}$; und die Gleichung XIV formt sich für die hier gestellte Bedingung um in

$$\text{XV)}\ y = \frac{h}{k} \cdot x$$

Zweiter Fall. Soll man die gesuchte Curve nur aus denen einander stetsfort nächstanliegenden herauswählen, bei welchen allen die Ordinate y_a den nemlichen (ge-

gebenen oder nichtgegebenen) Werth behält, und bei welchen allen die Ordinate y_α den nemlichen (gegebenen oder nichtgegebenen) Werth behält; so findet zwischen der zur Abscisse a gehörigen Ordinate der gesuchten Curve und zwischen den zur Abscisse a gehörigen Ordinaten aller hier in Betracht zu ziehenden Curven folgende Gleichung

$$y_a = y_a + \varkappa \cdot \delta y_a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_a + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y_a + \ldots\ldots\ldots$$

statt. Ebenso findet zwischen der zur Abscisse α gehörigen Ordinate der gesuchten Curve und zwischen den zur Abscisse α gehörigen Ordinaten aller hier in Betracht zu ziehenden Curven folgende Gleichung

$$y_\alpha = y_\alpha + \varkappa \cdot \delta y_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_\alpha + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y_\alpha + \ldots\ldots\ldots$$

statt. Da aber diese Gleichungen für ein im Momente des Verschwindens befindliches $\varkappa$ gelten sollen; so muss einzeln stattfinden $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$, etc. Die Gleichung X reducirt sich also auf

$$\text{XVI)}\quad \delta U = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (2a\alpha \cdot x^2 \cdot y - a \cdot x^3 \cdot y_\alpha - \alpha \cdot x^3 \cdot y_a + ax \cdot y^2 \cdot y_\alpha$$
$$+ \alpha x \cdot y^2 \cdot y_a - 2 \cdot x^2 \cdot y \cdot y_a \cdot y_\alpha) \cdot \delta y$$

Daraus folgt die identische Gleichung

$$\text{XVII)}\quad 2a\alpha \cdot x^2 \cdot y - a \cdot x^3 \cdot y_\alpha - \alpha \cdot x^3 \cdot y_a + ax \cdot y^2 \cdot y_\alpha$$
$$+ \alpha x \cdot y^2 \cdot y_a - 2x^2 \cdot y \cdot y_a \cdot y_\alpha = 0$$

Diese Gleichung lässt sich aber auch auf folgende Weise darstellen:

$$\text{XVIII)}\quad y^2 + 2 \cdot \frac{a\alpha - y_a \cdot y_\alpha}{a \cdot y_\alpha + \alpha \cdot y_a} \cdot x \cdot y - x^2 = 0$$

Man setze E statt des constanten Factors $\dfrac{a\alpha - y_a \cdot y_\alpha}{a \cdot y_\alpha + \alpha \cdot y_a}$, so bekommt man

$$\text{XIX)}\quad y^2 + 2 \cdot E \cdot x \cdot y - x^2 = 0$$

oder

$$\text{XX)}\quad \left[y + (E + \sqrt{1 + E^2}) \cdot x\right] \cdot \left[y + (E - \sqrt{1 + E^2}) \cdot x\right] = 0$$

Daraus ergeben sich also folgende zwei Gleichungen:

$$\text{XXI)}\quad y = -\left(E + \sqrt{1 + E^2}\right) \cdot x$$

und

$$\text{XXII)}\quad y = -\left(E - \sqrt{1 + E^2}\right) \cdot x$$

Durch jede dieser beiden Gleichungen wird Gleichung XVII identisch.

Und so fort.

Aufgabe 58.

Bei welcher unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven wird die Summe der Quadrate der in voriger Aufgabe verlangten Perpendikel ein Maximum-stand oder Minimum-stand?

Diese Aufgabe führt auf den allgemeinen Ausdruck

$$\text{I)}\quad U = \frac{(a \cdot y - x \cdot y_a)^2}{x^2 + y^2} + \frac{(\alpha \cdot y - x \cdot y_\alpha)^2}{x^2 + y^2}$$

Durch Mutiren bekommt man zunächst

$$\text{II)}\quad \delta U = \frac{2 \cdot x^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \left[\left(a^2 + \alpha^2 - y_a^2 - y_\alpha^2\right) \cdot y - (a \cdot y_a + \alpha \cdot y_\alpha) \cdot x\right] \cdot \delta y$$

$$- \frac{2 \cdot x}{x^2 + y^2} \cdot (ay - x \cdot y_a) \cdot \delta y_a - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot (\alpha y - x \cdot y_\alpha) \cdot \delta y_\alpha$$

Erster Fall. Soll die gesuchte Curve aus allen möglichen einander stetsfort nächstanliegenden herausgewählt werden, so sind (nach §. 92) die Ausdrücke δy, dy_a, δy_α dem Werthe nach ganz unabhängig voneinander, und es muss (nach §. 170) Gleichung II in folgende drei identische zerfallen:

$$\text{III)}\quad \left(a^2 + \alpha^2 - y_a^2 - y_\alpha^2\right) \cdot y - (a \cdot y_a + \alpha \cdot y_\alpha) \cdot x = 0$$

$$\text{IV)}\quad a \cdot y - x \cdot y_a = 0$$

$$\text{V)}\quad \alpha \cdot y - x \cdot y_\alpha = 0$$

Aus IV und V folgt $y = \frac{y_a}{a} \cdot x$, und $y = \frac{y_\alpha}{\alpha} \cdot x$. Diese beiden Gleichungen liefern aber $\frac{y_a}{a} = \frac{y_\alpha}{\alpha}$. Man setze also vorerst $\frac{y_a}{a} = \frac{y_\alpha}{\alpha} = C$, und aus den Gleichungen IV und V folgt gleichzeitig

$$\text{VI)}\quad y = C \cdot x$$

Führt man Cx an die Stelle von y, Ca an die Stelle von y_a, und $C \cdot \alpha$ an die Stelle von y_α in die Gleichungen III, IV, V ein, so werden IV und V allerdings identisch bei jeder beliebigen Bedeutung des C; dagegen Gleichung III geht über in

$$[(a^2 + \alpha^2) - (a^2 + \alpha^2) \cdot C^2 - (a^2 + \alpha^2)] \cdot C \cdot x = 0$$

welche Gleichung sich reducirt auf $-(a^2 + \alpha^2) \cdot C^3 \cdot x = 0$; und man erkennt, dass $C = 0$ sein muss, wenn III durch VI identisch werden soll. Die hier gesuchte Function ist also

$$\text{VII)}\quad y = 0$$

d. h. y ist eine identische Function von x, und man hat die in die Abscissenaxe fallende Grade.

Zweiter Fall. Macht man dieselbe Einschränkung, wie beim zweiten Falle der vorigen Aufgabe, so ist $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$ etc. Gleichung II reducirt sich also auf

$$\text{VIII)}\quad \delta U = \frac{2 \cdot x^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot \left[\left(a^2 + \alpha^2 - y_a^2 - y_\alpha^2\right) \cdot y - (a \cdot y_a + \alpha \cdot y_\alpha) \cdot x\right] \cdot \delta y$$

Daraus folgt die identische Gleichung

$$\text{IX)}\quad \left(a^2 + \alpha^2 - y_a^2 - y_\alpha^2\right) \cdot y - (a \cdot y_a + \alpha \cdot y_\alpha) \cdot x = 0$$

welche sich auch auf folgende Weise umformen lässt

$$\text{X)}\quad y = \frac{a \cdot y_a + \alpha \cdot y_\alpha}{a^2 + \alpha^2 - y_a^2 - y_\alpha^2} \cdot x$$

Man setze E statt des bei x befindlichen Factors, so hat man

$$\text{XI)}\quad y = E \cdot x$$

Nun setze man $E \cdot x$ statt y, $E \cdot a$ statt y_a, und $E \cdot \alpha$ statt y_α in Gleichung IX ein; so gelangt man zu dem Resultate, dass $E = 0$ sein muss, und man hat abermals

$$\text{XII)}\quad y = 0$$

Es ist also wieder y eine identische Function von x, d. h. man hat wieder die in die Abscissenaxe fallende Grade.

Dritter Fall. Soll die gesuchte Curve nur aus denen einander stetsfort nächstanliegenden herausgewählt werden, welche alle den zu der grade gewählten Abscisse x gehörigen Punkt miteinander gemein haben, während bei der Abscisse a die Ordinate der gesuchten und aller hier in Betracht zu ziehenden Curven allerlei (jedoch einander nächstanliegende) Werthe bekommen können, und während auch bei der Abscisse α die Ordinate der gesuchten und aller hier in Betracht zu ziehenden Curven allerlei (jedoch einander nächstanliegende) Werthe bekommen können; so findet jetzt zwischen der zur beliebig gewählten Abscisse x gehörigen Ordinate der gesuchten Curve und zwischen den zur nemlichen Abscisse x gehörigen Ordinaten aller in Betracht zu ziehenden Curven folgende Gleichung

$$y = y + \varkappa \cdot \delta y + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{1.2.3} \cdot \delta^3 y + \ldots\ldots\ldots$$

statt. Diese Gleichung soll aber bei dem im Momente des Verschwindens gedachten $\varkappa$ gelten, ist also nur möglich, wenn bei dem grade für x gewählten Werthe einzeln $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$ etc. ist.

Mancher Anfänger möchte behaupten, wenn einzeln stattfindet $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$ etc., in welchen Ausdrücken der Werth des x noch ganz unbestimmt ist; so muss auch bei den bestimmten Werthen $x = a$ und $x = \alpha$ einzeln stattfinden $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$ etc., so dass durch die Gleichungen $\delta y_a = 0$, $\delta y_\alpha = 0$, $\delta^2 y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha = 0$ etc. die Zahl der zu vergleichenden Curven nicht enger eingeschränkt wird, als es schon durch die Gleichungen $\delta y = 0$, $\delta^2 y = 0$ etc. geschehen ist. Dieses wäre ganz richtig, wenn die Ausdrücke δy, $\delta^2 y$ etc. identische Functionen von x wären. Obgleich aber der Werth des x unbestimmt ist, so ist er doch bei allen zu vergleichenden Functionen der nemliche unveränderliche Werth; und für einen solchen nach Belieben genommenen aber festzuhaltenden Werth des x, und für keinen andern, müssen auch die allgemeinen Gleichungen stattfinden. (Man vergleiche noch zum Ueberflusse §. 168 D. Auch die Anmerkung zum dritten Falle der 95. Aufgabe.)

Unter diesen Umständen reducirt sich Gleichung II auf

$$\text{XIII)} \quad \delta U = -\frac{2 \cdot x}{x^2 + y^2} \cdot (ay - x \cdot y_a) \cdot \delta y_a - \frac{2 \cdot x}{x^2 + y^2} \cdot (\alpha y - x \cdot y_\alpha) \cdot \delta y_\alpha$$

Daraus folgen die beiden identischen Gleichungen

$$\text{XIV)} \quad ay - x \cdot y_a = 0$$

$$\text{XV)} \quad \alpha \cdot y - x \cdot y_\alpha = 0$$

und man gelangt wieder zu der Function

$$\text{XVI)} \quad y = F \cdot x$$

durch welche bei jeder beliebigen Bedeutung des F die beiden Gleichungen XIV und XV zugleich identisch werden. Das F kann man durch eine Nebenbedingung bestimmen, z. B. dadurch, dass man die gesuchte Curve zwingt, durch einen festen Punkt (k, h) zu gehen.

Vierter Fall. Lässt man die im vorigen Falle gemachte Einschränkung wieder gelten, und macht man dazu noch die weitere, dass bei allen in Betracht zu ziehenden Curven der Unterschied der zu den Abscissen a und α gehörigen Ordinaten den bestimmten Werth $\mathfrak{G}$ haben solle; so hat man für die gesuchte Curve folgende Gleichung

$$\text{XVII)} \quad y_\alpha - y_a = \mathfrak{G}$$

und für alle andern in Betracht zu ziehenden Curven hat man die Gleichung

$$\text{XVIII)} \quad \left(y_\alpha + \varkappa \cdot \delta y_\alpha + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_\alpha + \ldots\right) - \left(y_a + \varkappa \cdot \delta y_a + \frac{\varkappa^2}{1.2} \cdot \delta^2 y_a + \ldots\right) = \mathfrak{G}$$

Da aber letztere Gleichung für ein im Momente des Verschwindens befindliches $\varkappa$ gelten soll, so muss einzeln stattfinden $\delta y_\alpha - \delta y_a = 0$, $\delta^2 y_\alpha - \delta^2 y_a = 0$ etc. Aus diesen Gleichungen folgt $\delta y_a = \delta y_\alpha$, $\delta^2 y_a = \delta^2 y_\alpha$ etc. und Gleichung XIII geht über in

$$\text{XIX)} \quad \delta U = -\frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot (a \cdot y + \alpha \cdot y - x \cdot y_a - x \cdot y_\alpha) \cdot \delta y_\alpha$$

Daraus folgt die identische Gleichung

$$\text{XX)}\quad ay + \alpha y - x \cdot y_a - x \cdot y_\alpha = 0$$

Diese Gleichung kann man auch umformen in

$$\text{XXI)}\quad y = \frac{y_a + y_\alpha}{a + \alpha} \cdot x$$

und wenn man den bei x befindlichen constanten Factor mit H bezeichnet, so hat man

$$\text{XXII)}\quad y = H \cdot x$$

Setzt man Hx statt y, $H \cdot a$ statt y_a, und $H\alpha$ statt y_α in Gleichung XX ein, so bekommt man

$$aHx + \alpha Hx - aHx - \alpha Hx = 0$$

welche Gleichung bei jeder beliebigen Bedeutung des H identisch wird. Es muss aber auch Gleichung XVII durch XXII erfüllt werden; desshalb setze man Ha statt y_a, und $H\alpha$ statt y_α in XVII ein, und es gibt sich $H \cdot \alpha - H \cdot a = \mathfrak{G}$, woraus $H = \frac{\mathfrak{G}}{\alpha - a}$ folgt, so dass

$$\text{XXIII)}\quad y = \frac{\mathfrak{G}}{\alpha - a} \cdot x$$

eine vollständige bestimmte Gleichung ist, welche einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden graden Linie angehört.

Und so fort.

Aufgabe 59.

Man legt in zwei im Raume irgendwo festliegende Punkte (n, m, l) und (k, h, g), und in den zu irgend einer beliebig gewählten Abscisse x gehörigen Punkt (x, y, z) einer räumlichen Curve eine Ebene. Von den beiden in dieser räumlichen Curve liegenden Punkten (a, y_a, z_a) und $(\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ fällt man Perpendikel auf besagte Ebene. Bei welcher räumlichen Curve ist aber das Product dieser beiden Perpendikel ein Maximum-stand oder Minimum-stand?

Unter einem im Raume befindlichen festen Punkte (n, m, l) versteht man bekanntlich einen solchen Punkt, dessen Abscisse = n, und dessen rechtwinkelige Ordinaten m und l sind.

Die Entfernung eines Punktes (a, y_a, z_a) bis zu der durch die Gleichung

$$\text{I)}\quad A \cdot x' + B \cdot y' + C \cdot z' + E = 0$$

gegebenen Ebene ist bekanntlich

$$\text{II)}\quad \frac{A \cdot a + B \cdot y_a + C \cdot z_a + E}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ebenso ist die Entfernung des Punktes $(\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ bis zu der durch Gleichung I gegebenen Ebene

$$\text{III)}\quad \frac{A \cdot \alpha + B \cdot y_\alpha + C \cdot z_\alpha + E}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Daher ist das hier in Rede stehende Product

$$\text{IV)}\quad U = \frac{(A \cdot a + B \cdot y_a + C \cdot z_a + E) \cdot (A \cdot \alpha + B \cdot y_\alpha + C \cdot z_\alpha + E)}{A^2 + B^2 + C^2}$$

wo man vorerst noch die Coefficienten A, B, C, E zu bestimmen hat. Weil die in der Aufgabe besagte Ebene durch die drei Punkte (n, m, l), (k, h, g) und (x, y, z) gelegt werden soll, so geht Gleichung I für diese drei Punkte bezüglich über in

$$V)\quad A \cdot n + B \cdot m + C \cdot l + E = 0$$

$$VI)\quad A \cdot k + B \cdot h + C \cdot g + E = 0$$

$$VII)\quad A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + E = 0$$

Diese drei Gleichungen reichen (wie aus der analytischen Geometrie bekannt ist) hin, um die vier Coefficienten A, B, C, E zu bestimmen.

Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe durchaus nicht, dagegen ihre Durchführung wird vereinfacht, wenn man sich den festen Punkt (n, m, l) im Anfangspunkte der Coordinaten befindlich denkt. Dabei ist $n = 0$, $m = 0$, $l = 0$; Gleichung V reducirt sich also auf $E = 0$, und somit reduciren sich die Gleichungen VI und VII auf

$$VIII)\quad A \cdot k + B \cdot h + C \cdot g = 0$$

$$IX)\quad A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = 0$$

Man dividire diese beiden Gleichungen mit A, und setze $\mathfrak{A}$ statt $\frac{B}{A}$, und $\mathfrak{B}$ statt $\frac{C}{A}$; so gibt sich

$$X)\quad k + \mathfrak{A} \cdot h + \mathfrak{B} \cdot g = 0$$

$$XI)\quad x + \mathfrak{A} \cdot y + \mathfrak{B} \cdot z = 0$$

Daraus folgt $\mathfrak{A} = -\frac{k \cdot z - g \cdot x}{h \cdot z - g \cdot y}$, und $\mathfrak{B} = +\frac{k \cdot y - h \cdot x}{hz - g \cdot y}$; und Gleichung I geht jetzt über in

$$XII)\quad (hz - gy) \cdot x' - (kz - gx) \cdot y' + (ky - hx) \cdot z' = 0$$

Somit ist $A = hz - gy$, $B = -(kz - gx)$, $C = ky - hx$ und $E = 0$, welche Ausdrücke man noch in Gleichung IV einführen muss.

Und so fort.

Aufgabe 60.

Man legt in zwei im Raume irgendwo festliegende Punkte (n, m, l) und (k, h, g), und in den zu irgend zwei nach Belieben gewählten Abscissen x und y gehörigen Punkt (x, y, z) einer Fläche eine Ebene. Von den beiden in dieser Fläche befindlichen Punkten $(a, b, z_{a,b})$ und $(\alpha, \beta, z_{\alpha,\beta})$ fällt man Perpendikel auf besagte Ebene. Bei welcher Fläche ist aber das Product dieser beiden Perpendikel ein Maximum-stand oder Minimum-stand?

Die Entfernung des Punktes $(a, b, z_{a,b})$ bis zu der durch die Gleichung

$$I)\quad A \cdot x' + B \cdot y' + C \cdot z' + E = 0$$

gegebenen Ebene ist bekanntlich

$$II)\quad \frac{A \cdot a + B \cdot b + C \cdot z_{a,b} + E}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ebenso ist die Entfernung des Punktes $(\alpha, \beta, z_{\alpha,\beta})$ bis zu der durch Gleichung I gegebenen Ebene

$$III)\quad \frac{A \cdot \alpha + B \cdot \beta + C \cdot z_{\alpha,\beta} + E}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Daher ist das in Rede stehende Product

$$IV)\quad U = \frac{(A \cdot a + B \cdot b + C \cdot z_{a,b} + E) \cdot (A \cdot \alpha + B \cdot \beta + C \cdot z_{\alpha,\beta} + E)}{A^2 + B^2 + C^2}$$

wo man vorerst noch die Coefficienten A, B, C, E zu bestimmen hat. Weil die in der Aufgabe besagte Ebene durch die drei Punkte (n, m, l), (k, h, g) und (x, y, z) gelegt werden soll, so geht Gleichung I für diese drei Punkte bezüglich über in

$$V)\quad A \cdot n + B \cdot m + C \cdot l + E = 0$$

$$VI)\quad A \cdot k + B \cdot h + C \cdot g + E = 0$$

$$\text{VII)}\quad A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + E = 0$$

Diese drei Gleichungen reichen (wie aus der analytischen Geometrie bekannt ist) hin, um die vier Coefficienten A, B, C, E zu bestimmen.

Es schadet der Allgemeinheit der Aufgabe durchaus nicht, dagegen ihre Durchführung wird vereinfacht, wenn man sich den festen Punkt (n, m, l) im Anfangspunkte der Coordinaten befindlich denkt. Dabei ist $n = 0$, $m = 0$, $l = 0$; Gleichung V reducirt sich also auf $E = 0$, und somit reduciren sich die Gleichungen VI und VII auf

$$\text{VIII)}\quad A\cdot k + B\cdot h + C\cdot g = 0$$

$$\text{IX)}\quad A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z = 0$$

Man dividire diese beiden Gleichungen mit C, und setze $\mathfrak{A}$ statt $\frac{A}{C}$, und $\mathfrak{B}$ statt $\frac{B}{C}$; so gibt sich

$$\text{X)}\quad \mathfrak{A}\cdot k + \mathfrak{B}\cdot h + g = 0$$

$$\text{XI)}\quad \mathfrak{A}\cdot x + \mathfrak{B}\cdot y + z = 0$$

Daraus folgt $\mathfrak{A} = +\frac{gy - hz}{hx - ky}$, und $\mathfrak{B} = -\frac{gx - kz}{hx - ky}$; und Gleichung I geht jetzt über in

$$\text{XII)}\quad (gy - hz)\cdot x' - (gx - kz)\cdot y' + (hx - ky)\cdot z' = 0$$

Somit ist $A = gy - hz$, $B = -(gx - kz)$, $C = hx - ky$, und $E = 0$, welche Ausdrücke man noch in Gleichung IV einführen muss. Wenn dieses geschehen ist, so mutire man nach z, nach $z_{a,b}$ und $z_{\alpha,\beta}$; und es ergibt sich z als Function von x und y. Und so fort.

Hiermit mag die Reihe dieser Aufgaben geschlossen sein, da die bereits gegebenen für alle Fälle hinreichend vorbereitet haben.

Die Aufgaben 55—60 sind geeignet, eine noch klarere Einsicht in das wahre Wesen zu verschaffen, welches meiner (in §. 47 dargelegten) Idee der Mutationen zu Grunde liegt.

Vorzüglich sind die unentwickelten Functionen und die dabei nöthigen Reihenentwickelungen bedacht worden, Reihenentwickelungen, welche einen hohen Grad von Uebung und Umsicht erfordern, aber dessenungeachtet anderwärts entweder gar keine oder nur sehr dürftige und mangelhafte Berücksichtigung gefunden haben.

Besondere Beachtung verdient auch die Methode, mittelst welcher ich die wahre Bedeutung der sich bei unentwickelten Functionen so oft darbietenden Form $\frac{0}{0}$ ermittelt habe. (Man vergleiche wegen dieser Ermittelung die Aufgaben 19, 21, 33, 34 etc., und besonders 53.)

Die Aufgabe 53 ist mit grosser Vollständigkeit durchgeführt worden, weil in ihr so viele Einzelnheiten vorkommen, dass sie zum Muster für alle derartigen Aufgaben dienen kann.

Inhalt des ersten Bandes.

I. Sätze, welche in den Differentialcalcul gehören.

Seite

Unterscheidende Bezeichnungsweise der totalen und partiellen Differentiale (§. 1) . 1

Bezeichnungsweise derjenigen totalen Differentialquotienten, die aus einer Function abgeleitet sind, in welcher relativ unabhängige Veränderliche vorkommen:

a) die Function enthalte nur einen relativ unabhängigen Veränderlichen (§. 2) 2

b) die Function enthalte zwei relativ unabhängige Veränderliche (§. 3) . 3

Bezeichnungsweise derjenigen partiellen Differentialquotienten, die aus einer Function abgeleitet sind, in welcher relativ unabhängige Veränderliche vorkommen (§. 4) 5

II. Sätze, welche in den Integralcalcul gehören.

Ein allgemein hergestelltes Integral kann in besondern Fällen Null in den Nenner bekommen. Das Verfahren dabei (§. 5) 8

Einem und demselben Differential können oft mehrere Integrale genügen (§. 6) . 8

Bezeichnungsweise der bestimmten Integrale (§. 7) 9

Bezeichnungsweise der wiederholenden Integrale (§. 7) 10

Ist $\varphi(x, \varkappa)$ eine Function von x und $\varkappa$; sind ferner x und a ganz unabhängig von $\varkappa$, und ist wiederum $\varkappa$ ganz unabhängig von x und a; so gilt folgender Satz

$$\frac{d_{\varkappa}^{m}\overset{(n)}{\int_a^x}\varphi(x, \varkappa)\cdot dx^{n}}{d\varkappa^{m}} = \overset{(n)}{\int_a^x}\frac{d_{\varkappa}^{m}\varphi(x, \varkappa)}{d\varkappa^{m}}\cdot dx^{n}$$

d. h. bei der hier gemachten Voraussetzung ist es gleichgiltig, ob man zuerst nach x integrirt und dann nach $\varkappa$ differentiirt, oder ob man zuerst nach $\varkappa$ differentiirt und dann nach x integrirt (§. 8) 10

Ist $\varphi(x, y, \varkappa)$ eine Function von x, y, $\varkappa$; sind ferner x, a, y, b von $\varkappa$ unabhängig, und ist wiederum $\varkappa$ von x, a, y, b unabhängig; so gilt ebenfalls der Satz

$$\frac{d_{\varkappa}^{m}\overset{(n)}{\int_a^x}\overset{(p)}{\int_b^y}\varphi(x, y, \varkappa)\cdot dy^{p}\cdot dx^{n}}{d\varkappa^{m}} = \overset{(n)}{\int_a^x}\overset{(p)}{\int_b^y}\frac{d_{\varkappa}^{m}\varphi(x, y, \varkappa)}{d\varkappa^{m}}\cdot dy^{p}\cdot dx^{n}$$

d. h. auch bei den hier gemachten Voraussetzungen ist es gleichgiltig, ob man zuerst integrirt und dann differentiirt, oder umgekehrt (§. 8) 11

Bestimmung der Bedingungen, unter denen ein bestimmtes Integral als positiv oder als negativ gelten muss (§. 9 und 10) 12

Seite.

III. Aufsuchung der Bedingungen, unter denen die homogenen Functionen, welche entweder rational und von grader Dimension sind, oder welche sich auf eine solche Form bringen lassen, ihr Zeichen nicht wechseln können.

α) Die Functionen sind rational und von grader Dimension:
$\alpha\alpha$) Erste Methode, gegründet auf die Theorie der unbestimmten Coefficienten (§. 11—14) 13
$\beta\beta$) Zweite Methode, gegründet auf die Theorie der Gleichungen (§. 15—18) 17
β) Die Functionen sind irrational (§. 19) 20

IV. Entwickelung ungesonderter Functionen in Reihen.

Einleitung in die Theorie der Reihen überhaupt (§. 20—22) 20

Allgemeine Aufsuchung der Mittel, durch welche ungesonderte Functionen in Reihen entwickelt werden können.
A) Es ist die ungesonderte Gleichung $\varphi(u, v) = 0$ gegeben.
a) Man sucht für u die nach steigenden Potenzen von v fortschreitenden Reihen (§. 23—25) 25
b) Man sucht für u die nach fallenden Potenzen von v fortschreitenden Reihen (§. 26) 32
B) Es ist die ungesonderte Gleichung $\varphi(u, v \ldots\ldots w) = 0$ gegeben, und man sucht für u die nach steigenden oder fallenden Dimensionen der Elemente v w fortschreitenden Reihen (§. 27) 32
C) Es sind die beiden ungesonderten Gleichungen $\varphi(u, v, w) = 0$ und $f(v, w) = 0$ gegeben, wo w der absolute Unabhängige und v der relative Unabhängige ist. Man sucht für u die nach Potenzen von w fortschreitenden Reihen (§. 27) 32
D) Es sind die beiden ungesonderten Gleichungen $\varphi(u, v, w) = 0$ und $\psi(u, v, w) = 0$ gegeben, wo w der absolute Unabhängige und v der relative Unabhängige ist. Man sucht für u die nach Potenzen von w fortschreitenden Reihen (§. 27) 32

Eigenthümliche Bezeichnungsweise der vielförmigen Radicale und der vielförmigen Potenzen . 33

Man soll aus der ungesonderten Gleichung
$$u^2 - 2muv - 2nv + v^2 = 0$$
die nach steigenden Potenzen des v fortschreitenden Reihen entwickeln (§. 28) 33

Man soll aus derselben Gleichung die nach fallenden Potenzen des v fortschreitenden Reihen entwickeln (§. 29) 36

Man soll aus der ungesonderten Gleichung
$$u^3 - 6u^2 \cdot v + 12u \cdot v^2 - 27 \cdot v^2 - 8 \cdot v^3 = 0$$
die nach steigenden Potenzen des v fortschreitenden Reihen entwickeln (§. 30) 39

Specieller Nachweis, dass die einzige steigende Reihe, welche sich aus dieser Gleichung ergibt, nicht mehr und nicht weniger als drei verschiedene Formen hat (§. 30) 41

Man soll aus derselben Gleichung die nach fallenden Potenzen des v fortschreitenden Reihen entwickeln (§. 31) 43

Man soll aus der ungesonderten Gleichung
$$u^3 - 3nuv + v^3 = 0$$
die nach steigenden Potenzen des v fortschreitenden Reihen entwickeln (§. 32) 44

Bemerkung hinsichtlich der zuzufügenden Ergänzung (§. 32) 47

Man soll aus derselben Gleichung die nach fallenden Potenzen des v fortscheitenden Reihen entwickeln (§. 33) 48

Bemerkung hinsichtlich der zuzufügenden Ergänzung (§. 33) 50

Seite

Man soll aus der ungesonderten Gleichung
$$m \cdot v^2 + v^3 + m^2 \cdot u + 2mvu - 2m \cdot u^2 - 3v \cdot u^2 + u^3 = 0$$
die nach steigenden Potenzen des v fortschreitenden Reihen entwickeln (§. 34) 50

Man soll aus derselben Gleichung die nach fallenden Potenzen des v fortschreitenden Reihen entwickeln (§. 35) 52

Man soll aus der ungesonderten Gleichung
$$v^3 + 6 \cdot v^4 + 12 \cdot v^5 + 8 \cdot v^6 + 27 \cdot v^7 - 3v^2 \cdot u - 12v^3 \cdot u - 12v^4 \cdot u + 3v \cdot u^2 + 6v^2 \cdot u^2 - u^3 = 0$$
die nach steigenden Potenzen des v fortschreitenden Reihen entwickeln (§. 36) 54

Man soll aus der ungesonderten Gleichung
$$c \cdot v^8 + b \cdot v^4 \cdot u^2 + a \cdot v^2 \cdot u^3 + u^4 = 0$$
die nach steigenden Potenzen des v fortschreitenden Reihen entwickeln (§. 37) 55

Man soll aus der ungesonderten Gleichung
$$a \cdot x^m = y + 2 \cdot y^2 + 3 \cdot y^3 + \cdots\cdots + n \cdot y^n$$
die nach steigenden Potenzen des x fortschreitenden Reihen entwickeln (§ 38) 56

Man soll aus derselben Gleichung die nach fallenden Potenzen des x fortschreitenden Reihen entwickeln (§. 39) 58

Man soll aus der ungesonderten Gleichung
$$a \cdot x^m + x^{m-1} \cdot y + x^{m-2} \cdot y^3 + x^{m-3} \cdot y^6 + x^{m-4} \cdot y^{10} + \cdots\cdots\cdots + x^{m-n} \cdot y^{\frac{n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2}} = 0$$
die nach steigenden Potenzen des x fortschreitenden Reihen entwickeln (§. 40) 59

Man soll aus derselben Gleichung die nach fallenden Potenzen des x fortschreitenden Reihen entwickeln (§. 41) 60

Specieller Nachweis, dass die einzige fallende Reihe, welche sich aus dieser Gleichung ergibt, nicht mehr und nicht weniger, als $\frac{n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2}$ verschiedene Formen hat (§. 41) 61

Bemerkungen zur Ermittelung des Bildungsgesetzes, welches die Coefficientengleichungen beobachten (§. 42) 63

Andeutung des Verfahrens, welches die Reihenentwickelungen erleichtert, wenn schon in der gegebenen Gleichung $\varphi(u, v) = 0$ gebrochene Potenzen des u und v vorkommen (§. 43) 64

Darlegung des Zweckes, zu welchem man ungesonderte Functionen in Reihen entwickelt (§. 44) 65

Aus einer ungesonderten Function lassen sich höchstens soviele einförmige steigende Reihenformen entwickeln, als der höchste Exponent des abhängigen Veränderlichen Einheiten enthält (§. 45) 66

Ebenso verhält es sich mit den fallenden Reihenformen (§. 45) 67

Reihenentwickelungen in den Fällen, wo den unabhängigen Veränderlichen Werthänderungen beigelegt, und an die Stelle der abhängigen Veränderlichen bestimmte Functionen gesetzt werden (§. 46) 67

V. Theorie des sogenannten Variationscalculs.

Einleitung. Darstellung und Vergleichung der zweierlei Aenderungen, welche eine Function erleiden kann. Definition des (bis jetzt sogenannten) Variationscalculs. Die Gründe, warum man diesem Calcul eine andere Benennung beilegen muss. System, nach welchem er vorgetragen werden soll (§. 47) . . . 69

Seite.

A) Einfache Mutationen.

a) Einfache reine Mutationen.

aa) Unmittelbare reine Mutationen.

Begriffsbestimmung einer einfachen, einer einfachen reinen, einer unmittelbaren reinen Mutation (§. 48) 72

Einführung des mutirenden Elementes $\varkappa$ (§. 48) 73

Der eingeschränkteste Begriff einer unmittelbaren reinen Mutation besteht darin, dass man bei einer Function an die Stelle der Constanten andere Constanten setzt. Die dabei vorkommenden Reihenentwickelungen (§. 49—52) 73

Der weiteste Begriff einer unmittelbaren reinen Mutation besteht darin, dass man an die Stelle einer Function eine andere Function setzt. Andeutung des allgemeinen Verfahrens bei den dabei vorkommenden Reihenentwickelungen (§. 53) 78

Anhang. Vergleichung des Differenzencalculs und des (bis jetzt sogenannten) Variationscalculs (§. 53) 80

Eine Function $\varphi(x)$ geht in eine andere $F(x)$ über (§. 54) 80

Eine Function $\varphi(x, w)$ geht in eine andere $F(x, w)$ über (§. 55) 81

Nicht immer genügt es, das mutirende Element $\varkappa$ allein einzuführen; sondern oft muss man die Producte $m \cdot \varkappa$, $n \cdot \varkappa$, etc. zu Hilfe nehmen (§. 56) 82

Begriffsbestimmung der unmittelbaren reinen Gesammtmutation und der zugehörigen Mutationstheile und Mutationscoefficienten (§. 57) 83

Beispiele für unmittelbare reine Mutationen. Besondere Beachtung verdienen wegen ihrer Allgemeinheit das zehnte und zwanzigste Beispiel (§. 58) . . . 84

Beweis der Sätze, welche durch folgende Gleichungen

$$\delta^m(\delta^n z) = \delta^{m+n} z, \quad \delta^m\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right) = \frac{d^n \delta^m z}{dx^n}, \quad \delta^m \int_a^{x} {}^{(n)} z \cdot dx^n = \int_a^{x} {}^{(n)} \delta^m z \cdot dx^n, \text{ etc. etc.}$$

ausgesprochen sind (§. 59) 92

Verfahren, wenn eine Function gradezu in eine andere mit $\varkappa$ versehene neue Function übergeht, ohne dass die von $\varkappa$ freie Form der neuen Function vorgeschrieben ist (§. 60) 94

Verfahren, wenn eine Function in jede beliebige andere Function übergeht (§. 60) 94

Einwendungen gegen den von Euler und Lagrange aufgestellten Begriff einer unmittelbaren Mutation (§. 61) 96

Man kann für unmittelbare reine Mutationen auch die unbestimmte Reihenform

$$\varphi(x) + \varkappa^p \cdot P + \varkappa^q \cdot Q + \varkappa^r \cdot R + \cdots\cdots$$

setzen, und sie zur Lösung von Aufgaben verwenden (§. 61) 96

Es gibt Lehrer und Schriftsteller, welche sich begnügen, auch für eine allgemeine Mutation bloss die allereinfachste geschlossene Reihenform

$$\varphi(x \,.\,.\,.\,.\,.\, w) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x \,.\,.\,.\,.\,.\, w)$$

zu setzen. Dieses Verfahren ist (man sehe Seite 163, etc.) die Quelle grober Irrthümer und Widersprüche (§. 61) 97

bb) Mittelbare reine Mutationen.

Begriffsbestimmung und allgemeine Reihenform der mittelbaren reinen Mutation (§. 62 und 63) 97

Mittelbare reine Gesammtmutation und die zugehörigen Mutationstheile und Mutationscoefficienten (§. 63) 98

I. Entwicklung der mittelbaren reinen Mutationen, für den Fall, dass die zu mutirende Function lauter unmittelbar mutable Elemente enthält.

1) Diese Function sei eine gesonderte:

α. mit einem unmittelbar mutablen Elemente (§. 64) 99

β. mit zwei unmittelbar mutablen Elementen (§. 65) 100

Seite.

2) Diese Function sei eine ungesonderte:
 α. mit einem unmittelbar mutablen Elemente (§. 66) 101
 β. mit zwei unmittelbar mutablen Elementen (§. 67) 102

II. Entwicklung der mittelbaren reinen Mutationen, für den Fall, dass die zu mutirende Function auch mittelbar mutable Elemente enthält.
 1) Es kommt ein unmittelbar mutables und ein mittelbar mutables Element vor (§. 68 und 69) 104
 2) Es kommen zwei unmittelbar mutable und ein mittelbar mutables Element vor (§. 70) 107
 3) Es kommen ein unmittelbar mutables und zwei mittelbar mutable Elemente vor (§. 71) 109

Das Verfahren, wenn die zu mutirende Function auch mit mutablen Differentialen oder mit mutablen Integralen versehen ist (§. 72) 110

Allgemeine Darstellung des Verfahrens bei mittelbaren Mutationen (§. 73) . . 111

Anhang. Beispiele für mittelbare Mutationen mit besonderer Beachtung der Fälle, in welchen die allgemeine (nach ganzen Potenzen des x aufsteigende) Reihenform nicht stattfindet (§. 73) 112

b) Einfache gemischte Mutationen.
 aa) Unmittelbare gemischte Mutationen.

Begriffsbestimmung und allgemeine Reihenform einer unmittelbaren gemischten Mutation (§. 74 und 75) 114

Gesammtdifferenz. Differenztheil. Differenzcoefficient. Unmittelbare gemischte Gesammtmutation und die zugehörigen Mutationstheile und Mutationscoefficienten (§. 76) 116

Eine Function $\varphi(x)$ mit dem einzigen nichtmutablen Veränderlichen x erleidet eine unmittelbare gemischte Mutation (§. 77) 117

Eine Function $\varphi(x, w)$ mit den zwei nichtmutablen Veränderlichen x und w erleidet eine unmittelbare gemischte Mutation (§. 78) 118

 bb) Mittelbare gemischte Mutationen.

Begriffsbestimmung einer mittelbaren gemischten Mutation (§. 79) . . . 120

Entwickelung der mittelbaren gemischten Mutationen.

I. Die zu mutirende Function sei eine gesonderte,
 1) mit einem nichtmutablen und einem unmittelbar mutablen Veränderlichen (§. 79) 120
 2) mit einem nichtmutablen und zwei unmittelbar mutablen Veränderlichen (§. 80) 121
 3) mit zwei nichtmutablen und einem unmittelbar mutablen Veränderlichen (§. 81) 123
 4) mit zwei nichtmutablen und zwei unmittelbar mutablen Veränderlichen (§. 82) 124

II. Die zu mutirende Function sei eine ungesonderte.
 1) mit einem einzigen nichtmutablen Veränderlichen (§. 83) . . 125
 2) mit zwei nichtmutablen Veränderlichen:
 α) beide sind absolut unabhängig (§. 84) 126
 β) einer ist von dem andern abhängig (§. 84) 127

B) Zusammengesetzte reine und zusammengesetzte gemischte Mutationen.

Begriffsbestimmung einer zusammengesetzten Mutation. Zusammengesetzte reine Gesammtmutation und die zugehörigen Mutationstheile und Mutationscoefficienten. Zusammengesetzte gemischte Gesammtmutation und die zugehörigen Mutationstheile und Mutationscoefficienten. Entwickelung der betreffenden Reihen (§. 85) 128

VI. Einige Specialitäten, welche zur Theorie der Mutationen gehören.

Wenn man den veränderlichen Elementen bestimmte Werthe beilegt, so werden letztere rechts unten angehängt (§. 86) 132

Seite.

Man hat zwei Functionen $\varphi(x)$ und $F(x)$, deren Werthe immer einander nächstanliegend bleiben bei jedem beliebigen Werthe des x. Die verschiedenen Ergebnisse, welche zwischen diesen beiden Functionen und zwischen den von ihnen abgeleiteten totalen Differentialquotienten stattfinden (§. 87) 132

Man hat zwei Functionen $\varphi(x, w)$ und $F(x, w)$, deren Werthe immer einander nächstanliegend bleiben bei jedem beliebigen Werthe des x und des w. Die verschiedenen Ergebnisse, welche zwischen diesen beiden Functionen und zwischen den von ihnen abgeleiteten partiellen Differentialquotienten stattfinden (§. 88) 135

Man hat wieder zwei Functionen $\varphi(x)$ und $F(x)$, deren Werthe immer einander nächstanliegend bleiben bei jedem beliebigen Werthe des x. Die verschiedenen Ergebnisse, welche zwischen den Integralen stattfinden, wenn man $\varphi(x)$ und $F(x)$ als Differentialcoefficienten nimmt, und sie integrirt (§. 89) . . 142

Man hat wieder zwei Functionen $\varphi(x, w)$ und $F(x, w)$, deren Werthe immer einander nächstanliegend bleiben bei jedem beliebigen Werthe des x und des w. Die verschiedenen Ergebnisse, welche zwischen den Integralen stattfinden, wenn man $\varphi(x, w)$ und $F(x, w)$ als Differentialcoefficienten nimmt, und sie integrirt (§. 90) 144

Wenn δy jede beliebige Function von x vorstellt, so gelten folgende Sätze:

1) Die Ausdrücke $\delta y, \frac{d\delta y}{dx}, \frac{d^2\delta y}{dx^2}, \frac{d^3\delta y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^m\delta y}{dx^m}$ sind nur der Form nach von einander abhängig, dem Werthe nach sind sie voneinander unabhängig und willkürlich (§. 91) 145

2) In der Gleichung

$$\mathfrak{A} + A_0 \cdot \delta y + A_1 \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \cdots\cdots + A_m \cdot \frac{d^m\delta y}{dx^m} = 0$$

ist jeder Coefficient $\mathfrak{A}, A_0, A_1, \cdots\cdots, A_m$ für sich Null (§. 91) . 146

3) Die Werthe von δy_a, δy_b, δy_c sind ganz voneinander unabhängig und willkürlich (§. 92) 147

4) In der Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} + A_0 \cdot \delta y_a + B_0 \cdot \delta y_b + C_0 \cdot \delta y_c \\ \quad + A_1 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a + B_1 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_b + C_1 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_c \\ \quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} = 0$$

ist jeder Coefficient für sich Null (§. 92) 148

5) In der Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} + A_0 \cdot \delta y + A_1 \cdot \frac{d\delta y}{dx} + \cdots\cdots + A_m \cdot \frac{d^m\delta y}{dx^m} \\ + B_0 \cdot \delta y_a + B_1 \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a + \cdots\cdots + B_n \cdot \left(\frac{d^n\delta y}{dx^n}\right)_a \end{array}\right\} = 0$$

ist jeder Coefficient für sich Null (§. 93) 149

Wenn mehrere ganz beliebige Functionen $\delta y, \delta z, \delta v$, etc. des einzigen Veränderlichen x vorkommen, und diese untereinander unabhängig sind; so gelten abermals die so eben aufgestellten Sätze (§. 94) 150

Ganz analoge Sätze gelten auch, wenn δy jede beliebige Function der beiden Veränderlichen x und w vorstellt (§. 95—98) 150

Wenn δy jede beliebige Function von x vorstellt, so kann die Gleichung $\int_a^\alpha \varphi(x) \cdot \delta y \cdot dx = 0$ nur unter der Bedingung bestehen, dass $\varphi(x)$ eine identische Function ist (§. 99) 154

Wenn δy jede beliebige Function von x und w vorstellt, so kann die Gleichung $\int_a^\alpha\int_b^\beta \varphi(x, w) \cdot \delta y \cdot dw \cdot dx = 0$ nur stattfinden, wenn $\varphi(x, w)$ sowohl nach x als auch nach w eine identische Function ist (§. 100) 154

Seite

Untersuchung der Gleichung

$$Q_\alpha \cdot \delta y_\alpha + R_\alpha \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha + \cdots\cdots - V_\alpha \cdot \left(\frac{d^m\delta y}{dx^m}\right)_\alpha$$

$$- Q_a \cdot \delta y_a - R_a \cdot \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a - \cdots\cdots - V_a \cdot \left(\frac{d^m\delta y}{dx^m}\right)_a$$

$$+ \int_a^\alpha \varphi(x) \cdot \delta y \cdot dx = 0$$

für folgende zwei Fälle:

1) Die Ausdrücke δy_α, δy_a, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_\alpha$, $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_a$, etc. sind dem Werthe nach alle unabhängig voneinander (§. 101) 154

2) Diese Ausdrücke sind dem Werthe nach voneinander abhängig (§. 102) 155

Untersuchung der reinen Mutationsgleichungen, welche sich aus

$$F(a, \alpha, y_a, y_\alpha) = 0$$

oder aus

$$F\left(a, \alpha, y_a, y_\alpha, \left(\frac{dy}{dx}\right)_a, \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha, \cdots\cdots\right) = 0$$

ergeben (§. 103 und 104) 156

Untersuchung der reinen Mutationsgleichungen, welche sich

aus $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, aus $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$

aus $F\left(a, x, y, y_a, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, und aus $F\left(x, w, y, \frac{d_x y}{dx}, \frac{d_w y}{dw}\right) = 0$

ergeben (§. 105—107) 157

Untersuchung der gemischten Mutationsgleichungen, welche sich aus

$F(a, y_a) = 0$, und aus $F(a, \alpha, y_a, y_\alpha) = 0$

ergeben, wo also die Elemente a und α Werthänderungen erleiden (§. 108 und 109) 160

Nachweis der Irrthümer und Widersprüche, denen jene Lehrer und Schriftsteller nicht entgehen, welche sich begnügen, auch für eine allgemeine Mutation bloss die allereinfachste geschlossene Reihenform

$$\varphi(x \cdots w) + \varkappa \cdot \delta\varphi(x \cdots w)$$

zu setzen (§. 110) 163

VII. Theorie des Grössten und Kleinsten und andere damit zusammenhangende Untersuchungen, gegründet auf die Mutationen.

1. Allgemeiner Theil dieser Theorie.

Allgemeine Darstellung der ausgezeichneten Zustände, in welche ein mit mutablen und nichtmutablen Veränderlichen gebildeter Ausdruck versetzt werden kann (§. 111) 165

Definition von Maximum-stand, Minimum-stand, Gränz-stand, Einzel-stand: ebenso von Maximumwerth, Minimumwerth, Gränzwerth, Einzelwerth (§. 112) . 166

Definition von Maximumwerth eines Maximum-standes, von Minimumwerth eines Minimum-standes, von Gränzwerth eines Gränz-standes, von Einzelwerth eines Einzel-standes (§. 113) 168

Einige nachträgliche, auf die Beurtheilung der ausgezeichneten Zustände sich beziehende Bemerkungen, besonders in Betreff der vielförmigen Ausdrücke (§. 114) 169

Seite.

2. Besonderer Theil dieser Theorie.

A) *Ausdrücke, welche wirkliche Urfunctionen sind.*

Untersuchung 1—3. Der (gesondert oder ungesondert gegebene) Ausdruck U soll ein Maximumstand oder Minimum-stand werden, und zwar in folgenden Fällen:
1) Der Ausdruck enthält die Veränderlichen x · · · · w, y, von welchen nur y mutabel ist (§. 115—119) 171
2) Der Ausdruck U enthält die Veränderlichen x · · · · · w, y, z, von welchen die beiden y und z mutabel und unter sich unabhängig sind (§. 120—125) 176
3) Der Ausdruck U enthält die Veränderlichen x · · · · w, y, z, v, von welchen die drei y, z, v mutabel und unter sich unabhängig sind (§. 126—129) 183

Untersuchung 4. Der (gesondert oder ungesondert gegebene) Ausdruck U soll ein Gränz-stand werden, und zwar in folgenden Fällen:
1) Der Ausdruck U enthält die Veränderlichen x · · · · w, y, von welchen nur y mutabel ist (§. 130) 187
2) Der Ausdruck U enthält die Veränderlichen x · · · · w, y, z, von welchen die beiden y und z mutabel und unter sich unabhängig sind (§. 131) 188

Untersuchung 5. Der (gesondert oder ungesondert gegebene) Ausdruck U soll ein Einzel-stand werden (§. 132) 189

Untersuchung 6—12. Der (gesondert oder ungesondert gegebene) Ausdruck U soll ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, und zwar in folgenden Fällen:
1) Der Ausdruck U enthält die Veränderlichen x · · · · · w, y, z, von welchen nur die beiden y und z mutabel sind, und
a. in solcher Beziehung zusammenstehen, dass die Bedingungsgleichung F(x · · · · w, y, z) = 0 erfüllt wird (§. 133—135) . 190
b. oder in solcher Beziehung, dass der bestimmt vorgeschriebene Ausdruck F(x · · · · · w, y, z) entweder immer der nemlichen (aber nichtgegebenen) Function von x · · · · w gleichbleibt oder immer den nemlichen (aber nichtgegebenen) Werth behält (§. 136 und 137) 192
2) Der Ausdruck U enthält die Veränderlichen x · · · · w, y, z, v, von welchen nur die drei y, z, v mutabel sind, und
a. in solcher Beziehung zusammenstehen, dass die bestimmt vorgeschriebene Bedingungsgleichung F(x · · · · w, y, z, v) = 0 erfüllt wird (§. 138 und 139) 194
b. oder in solcher Beziehung, dass der bestimmt vorgeschriebene Ausdruck F(x · · · · w, y, z, v) entweder immer der nemlichen (aber nichtgegebenen) Function von x · · · · w gleichbleibt oder immer den nemlichen (aber nichtgegebenen) Werth behält (§. 140) 196
c. oder in solcher Beziehung, dass die beiden bestimmt vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen F′(x · · · · w, y, z, v) = 0 und F″(x · · · · w, y, z, v) = 0 erfüllt werden (§. 141 und 142) . 197
d. oder in solcher Beziehung, dass die bestimmt vorgeschriebene Bedingungsgleichung F′(x · · · · · · · · w, y, z, z) = 0 erfüllt wird, und dass zugleich der bestimmt vorgeschriebene Ausdruck F″(x · · · · w, y, z, v) immer der nemlichen (aber nichtgegebenen) Function von x · · · · · w gleichbleibt oder immer den nemlichen (aber nichtgegebenen) Werth behält (§. 143) . . 198
e. oder in solcher Beziehung, dass nicht nur der bestimmt vorgeschriebene Ausdruck F′(x · · · · w, y, z, v) immer der nemlichen (aber nichtgegebenen) Function von x · · · · w gleichbleibt oder immer den nemlichen (aber nichtgegebenen) Werth behält, sondern dass auch noch irgend ein anderer bestimmt vorgeschriebener Ausdruck F″(x · · · · w, y, z, v) immer der nemlichen (aber nichtgegebenen) Function von x · · · · w gleichbleibt oder immer den nemlichen (aber nichtgegebenen) Werth behält (§. 144) 198

Untersuchung 13. Es sind zwei ungesonderte Gleichungen F′(U, x · · · w, y, z) = 0 und F″(U, x · · · · w, y, z) = 0 gegeben. In beiden ist U enthalten. U soll ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden (§. 145 und 146) . . 199

Seite.

Untersuchung 14—19. Der (gesondert oder ungesondert gegebene) Ausdruck U soll der Maximumwerth eines Maximum-standes oder der Minimumwerth eines Minimum-standes werden, und zwar in folgenden Fällen:

1) Der Ausdruck U enthält die Veränderlichen x und y, von denen nur y mutabel ist (§. 147—151) 201

2) Der Ausdruck U enthält die Veränderlichen x, y, z, von denen die beiden y und z mutabel sind (§. 152—155) 206

3) Der Ausdruck U enthält die Veränderlichen x, w, y, von denen nur y mutabel ist. Die beiden nichtmutablen Veränderlichen x und w sind
 a. entweder voneinander unabhängig (§. 156—158) 209
 b. oder sie stehen in solcher Beziehung zusammen, dass die Gleichung F(x, w) = 0 erfüllt wird (§. 159) 213

4) Der Ausdruck U enthält die Veränderlichen x, y, z, von denen nur die beiden y und z mutabel sind, und
 a. in solcher Beziehung zusammen stehen, dass die bestimmt vorgeschriebene Bedingungsgleichung F(x, y, z) = 0 erfüllt wird (§. 160) 215
 b. oder in solcher Beziehung, dass der bestimmt vorgeschriebene Ausdruck F(x, y, z) entweder immer derselben (aber nichtgegebenen) Function von x gleichbleibt oder immer denselben (aber nichtgegebenen) Werth behält (§. 161) 217

Untersuchung 20—23. Der (gesondert oder ungesondert gegebene) Ausdruck U soll ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, und zwar in folgenden Fällen:

1) Der Ausdruck U enthält die Elemente x, y, y_a (§. 162—166) . . 218

2) Der Ausdruck U enthält die Elemente x, y, y_a, y_α, während
 a. zwischen y_a und y_α und zwischen ihren Mutationen keine Abhängigkeit stattfindet (§. 167—172), oder während 222
 b. zwischen y_a und y_α und zwischen ihren Mutationen die durch die Gleichung F(a, α, y_a, y_α) = 0 ausgesprochene Abhängigkeit stattfindet (§. 173) 226

3) Der Ausdruck U enthält die Elemente x, y, z, y_a, y_α, z_a, z_α, während
 a. zwischen y und z und zwischen ihren Mutationen keine Abhängigkeit stattfindet (§. 174), oder während 226
 b. zwischen y und z und zwischen ihren Mutationen die durch die Gleichung F(y, z) = 0 ausgesprochene Abhängigkeit stattfindet (§. 175) 227

Untersuchung 24 und 25. Der (gesondert oder ungesondert gegebene) Ausdruck U soll der Maximumwerth eines Maximum-standes oder der Minimumwerth eines Minimum-standes werden, und zwar in folgenden Fällen:

1) Der Ausdruck U enthält die Elemente x, y, a, α, y_a, y_α (§. 176—178) 228

2) Der Ausdruck U enthält die Elemente x, w, y, z, $y_{a,b}$, $y_{\alpha,\beta}$, $z_{a,b}$, $z_{\alpha,\beta}$ (§. 179) 230

Schluss. Andeutung, dass diese Untersuchungen noch vervielfältigt werden können 231

B) *Ausdrücke, wo Differentiale vorkommen.*

(Statt der totalen Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$, · · · · · · wird man zur Abkürzung bezüglich p, $\mathfrak{p}$, q, $\mathfrak{q}$, r, $\mathfrak{r}$, · · · · · · · ·, und statt der partiellen Differentialquotienten $\frac{d_xy}{dx}$, $\frac{d_wy}{dw}$, $\frac{d_x^2y}{dx^2}$, $\frac{d_xd_wy}{dx.dw}$, $\frac{d_w^2y}{dw^2}$, · · · · · · · wird man bezüglich p, q, r, s, t, · · · · · · setzen.)

Untersuchung 26—35. Der Ausdruck U soll ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, und zwar in folgenden Fällen:

1) Der Ausdruck U enthält die Veränderlichen x, y, p, wo y und somit auch p mutabel sind (§. 180—188) 231

2) Der Ausdruck U enthält die Veränderlichen x, y, p, q, wo y und somit auch p und q mutabel sind (§. 189—198) 242

Seite.

3) Der Ausdruck U enthält die Veränderlichen x, y, p, wo y und somit auch p mutabel sind, und
a. in solcher Beziehung zusammenstehen, dass die bestimmt vorgeschriebene Bedingungsgleichung F(x, y, p) = 0 erfüllt wird (§. 199 und 200) 251
b. oder in solcher Beziehung, dass der bestimmt vorgeschriebene Ausdruck F(x, y, p) entweder immer der nemlichen (aber nichtgegebenen) Function von x gleichbleibt oder immer den nemlichen (aber nichtgegebenen) Werth behält (§. 201) . . . 253
4) Der Ausdruck U enthält die Veränderlichen x, y, p, q, wo y und somit auch p und q mutabel sind, und
a. in solcher Beziehung zusammenstehen, dass die bestimmt vorgeschriebene Bedingungsgleichung F(x, y, p, q) = 0 erfüllt wird (§. 202 und 203) 254
b. oder in solcher Beziehung, dass der bestimmt vorgeschriebene Ausdruck F(x, y, p, q) immer der nemlichen (aber nichtgegebenen) Function von x gleichbleibt oder immer den nemlichen (aber nichtgegebenen) Werth behält (§. 204) 257
c. oder in solcher Beziehung, dass die beiden bestimmt vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen F'(x, y, p, q) = 0 und F''(x, y, p, q) = 0 erfüllt werden (§. 205 und 206) . . . 258
d. oder in solcher Beziehung, dass die bestimmt vorgeschriebene Bedingungsgleichung F'(x, y, p, q) = 0 erfüllt wird, und dass zugleich der bestimmt vorgeschriebene Ausdruck F''(x, y, p, q) immer der nemlichen (aber nichtgegebenen) Function von x gleichbleibt oder immer den nemlichen (aber nichtgegebenen) Werth behält (§. 207 und 208) 261
e. oder in solcher Beziehung, dass nicht nur der bestimmt vorgeschriebene Ausdruck F'(x, y, p, q) immer der nemlichen (aber nichtgegebenen) Function von x gleichbleibt oder immer den nemlichen (aber nichtgegebenen) Werth behält, sondern dass auch noch irgend ein anderer bestimmt vorgeschriebener Ausdruck F''(x, y, p, q) immer der nemlichen (aber nichtgegebenen) Function von x gleichbleibt, oder immer den nemlichen (aber nichtgegebenen) Werth behält (§. 209) 263
5) Der Ausdruck U enthält die Veränderlichen x, y, y_a, y_α, p, p_a, p_α, q, q_a, q_α, etc. etc., wo y und somit auch p und q mutabel sind. Durch a und α sind zwei feste Werthe von x dargestellt (§. 210) . 264

Untersuchung 36—44. Der Ausdruck U soll ein Maximum-stand oder Minimumstand werden, und zwar in folgenden Fällen:
1) Der Ausdruck U enthält die Veränderlichen x, y, z, p, 𝔭, q, 𝔮, r, 𝔯, · · · · · ·, wo y und z mutabel und unter sich unabhängig sind. Ebenso verhält es sich zwischen p und 𝔭, zwischen q und 𝔮, etc. etc. (§. 211) 264
2) Der Ausdruck U enthält die Veränderlichen x, y, z, p, 𝔭, q, 𝔮, r, 𝔯, · · · · ·, wo y und z also auch die davon abgeleiteten totalen Differentialquotienten mutabel sind, und
a. in solcher Beziehung zusammenstehen, dass die bestimmt vorgeschriebene Bedingungsgleichung F(x, y, z) = 0 erfüllt wird (§. 212) 265
b. oder in solcher Beziehung, dass der bestimmt vorgeschriebene Ausdruck F(x, y, z) immer der nemlichen (aber nichtgegebenen) Function von x gleichbleibt oder immer den nemlichen (aber nichtgegebenen) Werth behält (§. 213) 267
c. oder in solcher Beziehung, dass die bestimmt vorgeschriebene Bedingungsgleichung F(x, y, z, p, 𝔭) = 0 erfüllt wird (§. 214) 268
d. oder in solcher Beziehung, dass der bestimmt vorgeschriebene Ausdruck F(x, y, z, p, 𝔭) immer der nemlichen (aber nichtgegebenen) Function von x gleichbleibt oder immer den nemlichen (aber nichtgegebenen) Werth behält (§. 215) 268
e. oder in solcher Beziehung, dass die beiden bestimmt vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen F'(x, y, z, p, 𝔭) = 0 und F''(x, y, z, p, 𝔭) = 0 erfüllt werden (§. 216) 269
f. oder in solcher Beziehung, dass die bestimmt vorgeschriebene Bedingungsgleichung F'(x, y, z, p, 𝔭) = 0 erfüllt wird, und

Seite.

dass zugleich der bestimmt vorgeschriebene Ausdruck $F''(x, y, z, p, \mathfrak{p})$ immer der nemlichen (aber nichtgegebenen) Function von x gleichbleibt, oder immer den nemlichen (aber nichtgegebenen) Werth behält (§. 217) 270

g. oder in solcher Beziehung, dass nicht nur der bestimmt vorgeschriebene Ausdruck $F'(x, y, z, p, \mathfrak{p})$ immer der nemlichen (aber nichtgegebenen) Function von x gleichbleibt oder immer den nemlichen (aber nichtgegebenen) Werth behält, sondern dass auch noch irgend ein anderer bestimmt vorgeschriebener Ausdruck $F''(x, y, z, p, \mathfrak{p})$ immer der nemlichen (aber nichtgegebenen) Function von x gleichbleibt oder immer den nemlichen (aber nichtgegebenen) Werth behält (§ 218) 271

3) Der Ausdruck U enthält die Veränderlichen x, y, y_a, y_α, z, z_a, z_α, p, p_a, p_α, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_a$, $\mathfrak{p}_\alpha$, q, q_a, q_α, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_a$, $\mathfrak{q}_\alpha$, etc. etc., wo y und z, folglich auch die davon abgeleiteten totalen Differentialquotienten mutabel sind. Durch a und α sind zwei feste Werthe von x dargestellt (§. 219) 271

Untersuchung 45. Der Ausdruck U, welcher ein Maximum-stand oder Minimumstand werden soll, enthält diesmal die Veränderlichen x, w, y, p, q, r, s, t, etc. etc. x und w sind nichtmutable Veränderliche. y ist eine Function von x und w zugleich; also sind y und die davon abgeleiteten partiellen Differentialquotienten p, q, r, s, t, etc. die mutablen Veränderlichen (§. 220) . 272

Schluss. Andeutung, dass die Untersuchungen, wo eine Function zweier Veränderlicher gefordert wird, jenen Untersuchungen, welche eine Function eines einzigen Veränderlichen verlangen, ganz analog sind 272

Untersuchung 46 und 47. Der Ausdruck U soll der Maximumwerth eines Maximum-standes oder der Minimumwerth eines Minimum-standes werden, und zwar in folgenden Fällen:

1) Der Ausdruck U enthält die Veränderlichen x, y, p, wo y und somit auch p mutabel sind (§ 221) 272

2) Der Ausdruck U enthält die Veränderlichen x, y, y_a, y_α, p, p_a, p_α, wo y und somit auch p mutabel sind. Durch a und α sind zwei feste Werthe von x dargestellt (§. 222) 274

Schluss. Andeutung, dass diese Untersuchungen noch vervielfältigt werden können 274

C) *Ausdrücke, wo Integrale vorkommen.*

(Statt der totalen Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^3z}{dx^3}, \cdots\cdots$ wird man zur Abkürzung bezüglich $p, \mathfrak{p}, q, \mathfrak{q}, r, \mathfrak{r}, \cdots\cdots$ setzen.)

Untersuchung 48 – 56. Der Ausdruck U soll ein Maximum-stand oder Minimumstand werden, und zwar in folgenden Fällen:

1) $U = \int_a^\alpha f(x, y) \cdot dx$ (§. 223 und 224) 274

2) $U = \int_a^\alpha f'(x, y) \cdot dx \times \int_a^\alpha f''(x, y) \cdot dx$ (§. 225 und 226) . . 277

3) $U = \int_a^\alpha f'(x,y) \cdot dx \times \int_a^\alpha f''(x,y) \cdot dx \times \int_a^\alpha f'''(x,y) \cdot dx$ (§. 227) . 279

4) $U = \dfrac{\int_a^\alpha f'(x, y) \cdot dx}{\int_a^\alpha f''(x, y) \cdot dx}$ (§. 228) 281

5) $U = \int_a^\alpha f(x, y, p) \cdot dx$ (§. 229 – 231) 282

Seite.

6) $U = \int_a^\alpha f'(x, y, p) \cdot dx \times \int_a^\alpha f''(x, y, p) \cdot dx$ (§. 232) 290

7) $U = \dfrac{\int_a^\alpha f'(x, y, p) \cdot dx}{\int_a^\alpha f''(x, y, p) \cdot dx}$ (§. 233) 291

8) $U = \int_a^\alpha f(x, y, p, q) \cdot dx$ (§. 234 — 236) 292

9) $U = \int_a^\alpha f(x, y, p, q, r) \cdot dx$ (§. 237) 301

Untersuchung 57 — 61. Der Ausdruck U soll ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, und zwar in folgenden Fällen:

1) Es ist $U = \int_a^\alpha f(x, y, z, p, \mathfrak{p}, q, \mathfrak{q}, \cdots) \cdot dx$ gegeben, wo y und z mutabel und untereinander unabhängig sind (§. 238 — 241) . . 303

2) Es ist $U = \int_a^\alpha f\left(x, y, z, v, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2v}{dx^2}, \cdots\right) . dx$ gegeben, wo y, z, v mutabel und untereinander unabhängig sind (§. 242) 310

3) Es ist $U = \int_a^\alpha f(x, y, z, p, \mathfrak{p}) \cdot dx$, wo y und z mutabel sind, und

a. in solcher Beziehung zusammenziehen, dass die bestimmt vorgeschriebene Bedingungsgleichung $F(x, y, z) = 0$ erfüllt wird (§. 243 — 251) 311

b. oder in solcher Beziehung, dass die bestimmt vorgeschriebene Bedingungsgleichung $F(x, y, z, p, \mathfrak{p}) = 0$ erfüllt wird (§. 252 bis 255) 321

4) Es ist $U = \int_a^\alpha f(x, y, z, p, \mathfrak{p}, q, \mathfrak{q}, r, \mathfrak{r}, \cdots) \cdot dx$ gegeben, wo y und z mutabel sind, und in solcher Beziehung zusammenstehen, dass die bestimmt vorgeschriebene Bedingungsgleichung $F(x, y, z, p, \mathfrak{p}, q, \mathfrak{q}, r, \mathfrak{r}, \cdots) = 0$ erfüllt wird (§. 256) . . 326

Untersuchung 62 und 63. Es soll U_α ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden, und zwar in folgenden Fällen:

1) Es ist die totale Differentialgleichung

$$F\left(x, y, U, \frac{dy}{dx}, \frac{dU}{dx}\right) = 0$$

gegeben (§. 257) 328

2) Es ist die totale Differentialgleichung

$$F\left(x, y, z, U, p, \mathfrak{p}, \frac{dU}{dx}, q, \mathfrak{q}, \frac{d^2U}{dx^2}, \cdots\right) = 0$$

gegeben, wo y und z mutabel und untereinander unabhängig sind (§. 258) 329

Untersuchung 64 und 65. Der Ausdruck U soll der Maximumwerth eines Maximum-standes oder der Minimumwerth eines Minimum-standes werden, d. h. für die mutablen Elemente sucht man Functionen von x, und für a und α sucht man bestimmte Werthe, und zwar in folgenden Fällen:

1) Es ist $U = \int_a^\alpha f(x, y, z, p, \mathfrak{p}, q, \mathfrak{q}, \cdots) \cdot dx$ gegeben, wo y und z mutabel und unter einander unabhängig sind (§. 259). Ganz vollständig ist aber der specielle Fall untersucht, wo nur

$U = \int_a^\alpha f(x, y, p) \cdot dx$ gegeben ist (§. 260 — 263) 330

Seite

2) Es ist $U = \int_a^\alpha f(a, \alpha, x, y, z, p, \mathfrak{p}, q, \mathfrak{q}, \cdot \cdot \cdot \cdot) \cdot dx$ gegeben, wo y und z mutabel und untereinander unabhängig sind. Dieser Fall ist desshalb bemerkenswerth, weil die Gränzelemente a und α auch unter dem Integralzeichen vorkommen (§. 264) 338

Untersuchung 66 – 69. Der Ausdruck U soll ein Maximum-stand oder Minimumstand werden, und zwar in folgenden Fällen:

1) Es ist $U = \int_a^\alpha f(x, y) \cdot dx$, während die für y gesuchte Function

a. nur aus der Zahl derer herausgewählt werden darf, bei welchen allen das bestimmte Integral $\int_a^\alpha \mathfrak{F}(x, y) \cdot dx$ einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt (§. 265) 339

b. oder nur aus der Zahl derer, bei welchen allen nicht nur das bestimmte Integral $\int_a^\alpha \mathfrak{F}'(x, y) \cdot dx$ einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth, sondern bei welchen auch noch ein anderes bestimmtes Integral $\int_a^\alpha \mathfrak{F}''(x, y) \cdot dx$ einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt (§. 266) 344

2) Es ist $U = \int_a^\alpha f(x, y, p) \cdot dx$, während die für y gesuchte Function

a. nur aus der Zahl derer herausgewählt werden darf, bei welchen allen das bestimmte Integral $\int_a^\alpha \mathfrak{F}(x, y, p) \cdot dx$ einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt (§. 267 und 268) 350

b. oder nur aus der Zahl derer, bei welchen allen nicht nur das bestimmte Integral $\int_a^\alpha \mathfrak{F}'(x, y, p) \cdot dx$ einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth, sondern bei welchen auch noch ein anderes bestimmtes Integral $\int_a^\alpha \mathfrak{F}''(x, y, p) \cdot dx$ einerlei (entweder einen gegebenen oder nichtgegebenen) Werth bekommt (§. 269) 355

Schluss. Erklärung, dass jene Untersuchungen, welche auf zweifache, dreifache etc. Integrale führen, im zweiten Bande vorkommen werden 356

Aufgaben
für die
Anwendung des sogenannten Variationscalculs
auf die
Lehre des Grössten und Kleinsten
und auf die andern damit zusammenhangenden Untersuchungen.

Erste Abtheilung.

Aufgaben, welche auf Ausdrücke führen, die wirkliche Urfunctionen sind.

Aufg.

1. Man nimmt bei einer ebenen Curve das Product der Ordinate und der um die Ordinate verminderten Abscisse 357

Aufg. Seite

2. Man nimmt bei einer ebenen Curve das Product der Ordinate und der um die Ordinate verminderten Abscisse nebst dem Producte der Abscisse und einer um die Abscisse verminderten constanten Linie. Die so erzeugte Summe soll der Maximumwerth eines Maximum-standes oder der Minimumwerth eines Minimum-standes sein . . . 358

3. $U = gx - h \cdot x^2 + 2 \cdot y + 3 \cdot \sqrt[3]{a \cdot (x - y)^2}$. . . 360

4. Es ist wieder der in voriger Aufgabe gestellte Ausdruck gegeben; man sucht aber nicht nur für y eine bestimmte Function, sondern auch für x einen festen Werth . . . 362

5. $U = gx - \lg \text{nat}\, hx + \frac{3}{2} \cdot (\sqrt[3]{2xy - y^2})^4$. . . 369

6. $U = h + kx + m \cdot x^2 + (e \cdot y + g \cdot x^2)^4$. . . 370

7. $U = (15 \cdot g^2 \cdot x^2 - 15 \cdot g^3 \cdot x + 5 \cdot g^2 \cdot y^2 - 3 \cdot y^4) \cdot y$. . . 371

8. $U = (3gx - 3x^2 - y^2) \cdot \left(gx - x^2 + y^2 - \frac{4}{3} \cdot x \cdot y\right)$. . . 372

9. $U = ax - x^2 + (y - 3x) \cdot \sqrt{x^2 - y^2}$. (Diese Aufgabe liefert nicht nur einen Maximum-stand, sondern auch einen Gränz-stand und einen Einzel-stand) 372

10. $U = \sqrt{x - 1} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(y - 2x)^3} + \sqrt{2xy - y^2}$. . . 374

11. $U = m \cdot x^2 - n \cdot x^3 + 3 \cdot (bx - y)^2 + g \cdot \sqrt{(bx - y)^9}$. In der ersten Abtheilung dieser Aufgabe bekommt man $\delta U = 0$ und $\delta^2 U = 6 \cdot \delta y^2$, so dass man versucht sein könnte, zu behaupten, es existire ein Minimum-stand. Eine genauere Untersuchung zeigt aber, dass ein Gränz-stand stattfindet . 375

12. $U = g \cdot x^2 - h \cdot x + (x - y)^4 + 2 \cdot \sqrt{(x - y)^9}$. In der ersten Abtheilung dieser Aufgabe bekommt man $\delta U = 0$, $\delta^2 U = 0$, $\delta^3 U = 0$, $\delta^4 U = 24 \cdot \delta y^2$, so dass man auch jetzt versucht sein könnte, zu behaupten, es existire ein Minimum-stand. Eine genauere Untersuchung zeigt aber, dass auch jetzt ein Gränz-stand stattfindet . . . 376

13. $U = x \cdot y + p^2 \cdot \lg \text{nat}\, qx + 3g \cdot \sqrt[3]{bx \cdot (x - y)}$. . . 377

14. $U = y^3 + 3gx \cdot y^2 - 9 \cdot g^2 \cdot x^2 \cdot y + \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{(2gx - x^2)^4}$. . . 378

15. $U = b \cdot (x - w) + 3 \cdot (hxw - y)^2 + g \cdot \sqrt{(hxw - y)^9}$. In der ersten Abtheilung dieser Aufgabe bekommt man $\delta U = 0$ und $\delta^2 U = 6 \cdot \delta y^2$, so dass man versucht sein könnte, zu behaupten, es existire ein Minimum-stand. Eine genauere Untersuchung zeigt aber, dass ein Gränz-stand stattfindet . 379

16. Es ist $U = 6ax + x^2 + w^2 + 6 \cdot y^2 - 4hy \cdot (x + w)$; und man sucht nicht nur für y eine bestimmte Function von x und w, sondern auch für x und w feste Werthe . . . 380

17. Es ist $U = gxw - h \cdot (x^2 - w) + 2y + 3 \cdot \sqrt[3]{(2xw - y)^2}$; und man sucht nicht nur für y eine bestimmte Function von x und w, sondern auch für x und w feste Werthe . . . 382

18. $U^3 - 6 \cdot U^2 \cdot y + 12U \cdot y^2 - 8y^3 - 27 \cdot y^2 + 54xy - 27 \cdot x^2 = 0$. . 385

19. $U^3 - 3 \cdot U^2 \cdot y + y^3 + g^3 \cdot x^3 = 0$. . . 387

20. $U^4 - 2x \cdot U^3 + (2 - ax)\, a \cdot x^3 \cdot U^2 + x^2 \cdot y^2 - 4x^3 \cdot y + 4 \cdot x^4 = 0$. 391

21. Es ist die ungesonderte Gleichung

$$U^4 - \frac{4}{3} \cdot U^3 \cdot \frac{x^2 - ax}{a} + x^2 \cdot y^2 - 4x^3 \cdot y + 4 \cdot x^4 = 0$$

gegeben; und man sucht nicht nur für y eine bestimmte Function von x, sondern auch für x einen festen Werth . . . 393

Aufg. Seite.

22. $U^3 - U + a \cdot \sqrt[5]{(y - ax)^6} = 0$ 396

23. Es ist die ungesonderte Gleichung
$$U^4 - 8 \cdot (ax + xw - x^2 - w^2) \cdot y \cdot U + c^2 \cdot y^2 = 0$$
gegeben; und man sucht nicht nur für y eine bestimmte Function von x und w, sondern auch für x und w feste Werthe 398

24. Es ist folgender Ausdruck
$$U = a + \sqrt[3]{(xy - y^2)^4} + \left(\sqrt[3]{bx - x^2}\right)^4$$
gegeben; und man sucht für y eine bestimmte Function und für x einen festen Werth 400

25. Man nimmt bei einer räumlichen Curve folgenden von den Coordinaten erzeugten Ausdruck
$$U = x \cdot y \cdot z \cdot (x - y - z)$$
und dieser soll ein Maximum-stand oder Minimum-stand werden . . . 401

26. $U = y^2 - x \cdot y + (ax - z)^4$ 403

27. $U = a^2 + (ax - y^2)^2 + \sqrt[3]{(x^2 - bz)^2}$ 404

28. $U = \frac{x^2}{m + x} + 2 \cdot y^2 - 4z + 9 \cdot \sqrt[3]{(gx - y^2)^2} + 6 \cdot \left(\sqrt[3]{z - hx}\right)^2$. . 405

29. Man sucht eine räumliche Curve, die in sich einen festen Punkt hat, bei welchem folgender von den Coordinaten abhängige Ausdruck
$$U = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz + hx - g^2 \cdot \lg\text{nat}\,\frac{x}{m}$$
der Minimumwerth eines Minimum-standes wird. (Hier werden einfache gemischte Mutationen angewendet) 408

30. Man sucht eine Fläche, die in sich einen festen Punkt hat, bei welchem der in voriger Aufgabe gestellte Ausdruck der Minimumwerth eines Minimumstandes wird. (Hier werden wieder einfache gemischte Mutationen angewendet) 409

31. Man sucht eine Fläche und eine in dieser liegende räumliche Curve, welche letztere in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft hat, dass sie den in den beiden vorigen Aufgaben gestellten Ausdruck zu einem Minimum-stande macht. (Hier werden zusammengesetzte reine Mutationen angewendet) . . . 410

32. Man sucht eine Fläche, eine in dieser liegende räumliche Curve und einen in letzterer liegenden Punkt, welcher den in den drei vorigen Aufgaben gestellten Ausdruck zu dem Minimumwerthe eines Minimum-standes macht. (Hier werden zusammengesetzte gemischte Mutationen angewendet) . . 411

33. $U = by + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot \left(xz - by - \frac{1}{4} \cdot z^2\right)^2}$ 412

34. $U^3 - 3Uyz + 3x \cdot y^2 + z^3 = 0$ 414

35. $U^3 - 3 \cdot U^2 \cdot y + 6xyz - 2 \cdot z^3 - \frac{(a^2 - ax + x^2)^3 + x^6}{\sqrt{(a^2 - ax + x^2)^3}} = 0$. . . 418

36. $x \cdot (U^3 + y^3 + z^3) = U^2 \cdot yz + U \cdot y^2 \cdot z + U \cdot y \cdot z^2$ 420

37. Man sucht für y und z Functionen von x, während die beiden Gleichungen
$$U = y \cdot z, \quad \text{und} \quad 3y + 4z = x^2$$
gegeben sind 422

38. Man sucht für y und z Functionen von x, während die beiden Gleichungen
$$U = g \cdot y + h \cdot z + \sqrt[3]{(ex - x^2)^4}, \quad \text{und} \quad y^2 + z^2 = x^2$$
gegeben sind 423

Aufg. Seite.

39. Man sucht für y und z Functionen von x, während die beiden Gleichungen
$$U = \sin x + \sin y + \sin z, \quad \text{und} \quad x + y + z = 2R$$
gegeben sind 426

40. Man sucht für y und z Functionen von x, während die beiden Gleichungen
$$U = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z, \quad \text{und} \quad x + y + z = 2R$$
gegeben sind 426

41. Man sucht für y und z bestimmte Functionen und für x einen festen Werth, während die beiden Gleichungen
$$U = \sin x + \sin y + \sin z, \quad \text{und} \quad x + y + z = 2R$$
gegeben sind 427

42. Man sucht für z und v Functionen von x und y, während die beiden Gleichungen $U = gy + hz + kv$, und $y^2 + z^2 + v^2 = x^2$
gegeben sind 430

43. Man sucht für z, v, y Functionen von x, während die beiden Gleichungen
$$U = gy + hz + kv + \frac{x^2}{1 + x^2}, \quad \text{und} \quad y^2 + z^2 + v^2 = x^2$$
gegeben sind 432

44. Man sucht für z, v, y Functionen von x, während die drei Gleichungen
$$U = yzv, \quad \text{und} \quad z + y = x, \quad \text{und} \quad v - y = x$$
gegeben sind 433

45. Welches unter allen Dreiecken, die denselben (bestimmt gegebenen) Umfang m haben, und bei denen man eine Seite nach Willkür nimmt, schliesst den grössten Flächeninhalt ein? 435

46. Welches unter allen Dreiecken, die einerlei (aber einen nichtgegebenen) Umfang haben, und bei denen man eine Seite nach Willkür nimmt, schliesst den grössten Flächeninhalt ein? 437

47. Man sucht für y und z solche Functionen von x, dass der Ausdruck
$$U = x^2 + y^2 + z^2$$
ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während man folgender Summe
$$x + y + z$$
immer einen gleichgrossen (aber nichtgegebenen) Werth zudenkt . . . 438

48. Man sucht für y und z solche Functionen von x, dass der Ausdruck
$$U = x + y + z$$
ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während man folgender Summe
$$x^2 + y^2 + z^2$$
immer einen gleichgrossen (aber nichtgegebenen) Werth zudenkt . . . 439

49. Welches unter allen Vierecken, die denselben (gegebenen oder nichtgegebenen) Umfang haben, und bei denen man zwei nebeneinander liegende Seiten nach Willkür wählt, schliesst den grössten Inhalt ein? 439

50. Welches unter allen Vierecken, die denselben (gegebenen oder nichtgegebenen) Umfang haben, und bei denen man zwei gegenüberliegende Seiten nach Willkür wählt, schliesst den grössten Inhalt ein? 441

51. Welcher abgekürzte senkrechte Kegel hat bei jedem beliebigen zwischen dem Halbmesser der oberen und unteren Grundfläche stattfindenden Verhältnisse die Eigenschaft, dass er unter allen denen, die denselben (gegebenen oder nichtgegebenen) Körperinhalt einschliessen, von der kleinsten Oberfläche begränzt wird? 442

52. Man soll bei einem abgekürzten senkrechten Kegel die Halbmesser der oberen und unteren Grundfläche durch die nach Willkür zu nehmende Höhe in der Weise bestimmen, dass dieser Kegel unter allen denen, deren Körperinhalt dieselbe (gegebene oder nichtgegebene) Function der Höhe ist, von der kleinsten Oberfläche begränzt wird 444

Aufg. Seite.

53. Man sucht für y und z solche Functionen von x, dass das in folgender Gleichung

$$U^3 - 3xy \cdot U + y^3 = 0$$

enthaltene U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird, während noch folgende Bedingungsgleichung

$$y^3 - 3xyz + z^3 = 0$$

stattfindet. (Diese Aufgabe ist mit grosser Vollständigkeit durchgeführt worden, weil in ihr so mancherlei Reihenentwickelungen und soviele Einzelheiten vorkommen, dass sie zum Muster für alle derartige Aufgaben dienen kann) 445

54. Man sucht für y und z solche Functionen von x, dass das in folgenden zwei gleichzeitig bestehenden Gleichungen

$$U^3 + y^3 + z^3 = Uyz, \quad \text{und} \quad U^3 + Uyz = x^3$$

enthaltene U ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird 468

55. Man sucht für y eine solche Function, dass der Ausdruck

$$U = a^2 - y^2 + 2y \cdot y_a - y_a^2 - 2xy - 2a \cdot y_a$$

ein Maximum-stand oder Minimum-stand wird 469

56. Man zieht durch den zur festen Abscisse a gehörigen Punkt einer ebenen Curve und durch irgend einen andern festen Punkt eine grade Linie. Man wählt ferner einen beliebigen Punkt der Curve, zu welchem man die Ordinate zieht, und von welchem aus man ein Perpendikel auf jene grade Linie fällt. Nun nimmt man die aus dem Quadrate dieser Ordinate und aus dem Quadrate dieses Perpendikels zusammengesetzte Summe 471

57. Man zieht durch einen beliebigen Punkt einer ebenen Curve und durch irgend einen andern festen Punkt eine grade Linie; und hierauf fällt man von den zwei, zu den festen Abscissen a und α gehörigen, Punkten der Curve Perpendikel auf jene grade Linie. Nun nimmt man das Product dieser beiden Perpendikel 473

58. Man nimmt die Summe der Quadrate der in voriger Aufgabe besagten zwei Perpendikel 475

59. Man legt in einen beliebigen Punkt einer räumlichen Curve und in irgend zwei andere feste Punkte eine Ebene; und hierauf fällt man von zwei, zu festen Abscissen gehörigen, Punkten der Curve Perpendikel auf jene Ebene. Nun nimmt man das Product dieser beiden Perpendikel 478

60. Man legt in einen beliebigen Punkt einer Fläche und in irgend zwei andere feste Punkte eine Ebene; und hierauf fällt man von zwei, zu festen Abscissen gehörigen, Punkten der Fläche Perpendikel auf jene Ebene. Nun nimmt man das Product dieser beiden Perpendikel 479

Verzeichniss einiger Druckfehler

in diesem ersten Bande.

Seite 5, Zeile 10 steht $\frac{d_y\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dy}$ statt $\frac{d_y\left(\frac{dU}{dx}\right)}{dy}$

Seite 66, unterste Zeile steht $E \cdot u_e \cdot v^{e'}$ statt $E \cdot u^e \cdot v^{e'}$.

Seite 86, Zeile 2, am Ende steht $\frac{x^m}{x^n}$ statt $\frac{x^m}{x^\varkappa}$ (Diese Verbesserung ist nicht zu übersehen.)

Seite 110, Zeile 23 steht $\frac{d_x y}{dy}$ statt $\frac{d_x y}{dx}$

Seite 114, Zeile 16 von unten steht $z = -\frac{bh + cg}{ck + eg} \cdot x$ statt $z = -\frac{bh + cg}{ck + eh} \cdot x$

Seite 122, Zeile 5 steht $\left(\frac{dz_{(\varkappa)}}{d\varkappa}\right)_0$ statt $\left(\frac{dz_{(\varkappa)}}{d\varkappa}\right)_0$

Seite 122, Zeile 4 von unten steht $\frac{d\left(\frac{d_z U}{dz}\right)}{dx} \cdot dz$ statt $\frac{d\left(\frac{d_z U}{dz}\right)}{dx} \cdot \delta z$

Seite 125, Zeile 2 steht $\frac{d_x\left(\frac{d_y U}{dy}\right)}{dy}$ statt $\frac{d_x\left(\frac{d_y U}{dy}\right)}{dx}$

Seite 132, Zeile 1 steht $\varphi(a)$ statt $\varphi(\alpha)$

Seite 136, Zeile 23 steht $y_{\alpha,w} = y_{\alpha,w} + \Delta y_{\alpha,w}$, sollte heissen $y_{\alpha,w} + \Delta y_{\alpha,w} = F(\alpha, w)$.
Letztere Verbesserung ist nicht zu übersehen.

Seite 144, Zeile 13 und 14 sollte es nur heissen: „bei jedem beliebigen Werthe des x und bei jedem beliebigen Werthe des w."

Seite 145, Zeile 10 steht $-\delta^2 y_{\alpha,b} - \delta^2 y_{a,\beta}$, sollte heissen: $-\delta^2 z_{\alpha,b} - \delta^2 z_{a,\beta}$

Seite 165, Zeile 10 steht „sei es um", sollte heissen „sei es nun".

Seite 166, Zeile 34 steht „nichtmutablen", sollte heissen „mutablen".

Seite 204, Zeile 13 steht $\frac{d}{dx} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$, sollte heissen $\frac{dU}{dx} = \frac{\mathfrak{B}}{0}$

Seite 204, Zeile 3 von unten steht „Aufgabe 3", sollte heissen „Aufgabe 4".

Seite 220, Zeile 4 von unten steht $\delta y_a - 0$, sollte heissen $\delta y_a = 0$.

Seite 229, Zeile 3 von unten steht „Gleichung I", sollte heissen „Gleichung V".

Seite 260, letzte Zeile steht $\frac{d_x d_e \varphi(x, c, e)}{dx \cdot de} \cdot \vartheta e$, sollte heissen $\frac{d_x d_e \varphi(x, c, e)}{dx \cdot de} \cdot \vartheta e$

Seite 262, Zeile 2 von unten steht $\frac{d_x d_e \varphi(x, c, e)}{dx \cdot dc} \cdot \vartheta e$, sollte heissen $\frac{d_x d_e \varphi(x, c, e)}{dx \cdot de} \cdot \vartheta e$

Seite 308, Zeile 2 steht $\frac{d_q d_{\mathfrak{p}} V}{dp . d\mathfrak{p}}$, sollte heissen $\frac{d_q d_{\mathfrak{p}} V}{dq . d\mathfrak{p}}$

Seite 309, Zeile 9 steht $\left(\frac{d\delta y}{dy}\right)^2$, sollte heissen $\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$

Seite 362, Zeile 2 steht „Coordination“, sollte heissen „Coordinaten“.

Seite 443, Zeile 1, ganz am Ende fehlt $\cdot \delta z$.

Seite 443, Zeile 9, ganz am Ende fehlt $= 0$.

Seite 444, Zeile 30 steht „die Höhe“, sollte heissen „der Höhe“.

Seite 446, Zeile 20 steht $-2x$, sollte heissen $-3x$.

Seite 447, Zeile 21 steht x^3, sollte heissen z^3.

Seite 450, Zeile 14 von unten steht „Formen“, sollte heissen „Formen des U“.

Seite 451, Zeile 10, ganz vorne fehlt $U =$

Seite 451, Zeile 20 steht z, sollte heissen y.

Seite 455, Zeile 17 steht $-x^2$, sollte heissen $-x^3$.

Seite 456, Zeile 8 steht $\frac{1}{2} \cdot \frac{(3 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{2}}{1 + \sqrt{3}}$, sollte heissen $\frac{1}{2} \cdot \frac{(3 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{2}}{1 - \sqrt{3}}$

Seite 458, Zeile 12 steht „in Gleichung 32“, sollte heissen „in der erzeugenden Gleichung“. Diese aber ist nicht numerirt.

Seite 458, Zeile 14 ist der nemliche Fehler.

STAATL.BIBLIOTHEK
REGENSBURG

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Strauch, Georg Wilhelm,

Theorie und Anwendung des sogenannten Variationscalcul's

Bd.: Erster Band

Zürich 1854

Regensburg, Staatliche Bibliothek -- 999/4Philos.5028(1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11069473-0